

# MEK1100

Løsningsforslag til oppgavene i  
**Feltteori og vektoranalyse**  
av Gjevik & Fagerland

Opprinnelig laget av  
Morten Wang Fagerland  
våren 2005

Rettinger og oppdateringer ved Karsten Trulsen

Takk til studenter, gruppelærere og kolleger for gode tilbakemeldinger!



Seksjon for mekanikk  
Matematisk institutt  
Universitetet i Oslo  
2018



# Innhold

1	Felt i naturen, skalar- og vektorfelt, skalering	5
2	Gradientvektoren, vektorfelt, strømlinjer, feltlinjer	19
3	Bruk av Matlab	33
4	Vektorfluks og sirkulasjon, divergens, virvling, strømfunksjonen	37
6	Kurve-, flate- og volumintegraler, beregning av arbeid og trykkraft	55
7	Integralsatser: Green, Stokes og Gauss	65
8	Polarkoordinater	73
9	Divergens- og virvelfrie felter. Potensialstrøm	83
10	Feltlikninger for fluider	95
11	Varmetransport i fluider og faste stoffer	103



# Kapittel 1

## Felt i naturen, skalar- og vektorfelt, skalering

### Oppgave 1

To vektorer  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  er parallelle hvis vi kan skrive  $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$ , der  $c$  er en skalar.

$$2\mathbf{a} - \frac{1}{6}\mathbf{b} = c\left(\frac{1}{4}\mathbf{b} - 3\mathbf{a}\right)$$

$$\mathbf{a}(2 + 3c) + \mathbf{b}\left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{4}c\right) = 0.$$

Dette gir to likninger for  $c$ . For å få en entydig løsning må begge likningene gi samme verdi.

$$2 + 3c = 0 \quad \text{og} \quad -\frac{1}{6} - \frac{1}{4}c = 0$$

$$c = -\frac{2}{3} \quad \text{og} \quad c = -\frac{2}{3}.$$

Vektorene er altså parallelle.

### Oppgave 2

Gitt vektorene  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ ,  $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ ,  $\mathbf{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$  og skalarene  $\alpha$  og  $\beta$ .

a) Vis at  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \cdot (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \\ &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \geq 0. \end{aligned}$$

b) Vis at  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$  hvis og bare hvis  $\mathbf{a} = 0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \cdot (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \\ &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2 = a_3 = 0. \end{aligned}$$

c) • Vis at  $\alpha \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ :

$$\begin{aligned} \alpha \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (\alpha a_1 \mathbf{i} + \alpha a_2 \mathbf{j} + \alpha a_3 \mathbf{k}) \cdot (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\ &= \alpha a_1 b_1 + \alpha a_2 b_2 + \alpha a_3 b_3 \\ &= \alpha(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \\ &= \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \end{aligned}$$

• Vis at  $\mathbf{a} \cdot \beta \mathbf{b} = \beta(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \beta \mathbf{b} &= (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) \cdot (\beta b_1 \mathbf{i} + \beta b_2 \mathbf{j} + \beta b_3 \mathbf{k}) \\ &= a_1 \beta b_1 + a_2 \beta b_2 + a_3 \beta b_3 \\ &= \beta(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \\ &= \beta(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \end{aligned}$$

d) • Vis at  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) \cdot \left( (b_1 + c_1) \mathbf{i} + (b_2 + c_2) \mathbf{j} + (b_3 + c_3) \mathbf{k} \right) \\ &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3) \\ &= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2 + a_3 b_3 + a_3 c_3 \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}. \end{aligned}$$

• Vis at  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= \left( (a_1 + b_1) \mathbf{i} + (a_2 + b_2) \mathbf{j} + (a_3 + b_3) \mathbf{k} \right) \cdot (c_1 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j} + c_3 \mathbf{k}) \\ &= (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 + (a_3 + b_3)c_3 \\ &= a_1 c_1 + b_1 c_1 + a_2 c_2 + b_2 c_2 + a_3 c_3 + b_3 c_3 \\ &= a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 + b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}. \end{aligned}$$

e) Vis at  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) \cdot (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ &= b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 \\ &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}. \end{aligned}$$

### Oppgave 3

Gitt en partikkelbane  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$  der  $\mathbf{r}_0 = \{a, b, c\}$  og  $\mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$ .

a) Banen på komponentform:

$$\mathbf{r}(t) = (a + v_x t)\mathbf{i} + (b + v_y t)\mathbf{j} + (c + v_z t)\mathbf{k}.$$

b) Her kan vi sette  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{j} = \{0, 1, 0\}$  og  $\mathbf{v} = v_z \mathbf{k} = \{0, 0, v_z\}$ . Likningen for banen blir da

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t = \mathbf{j} + v_z t \mathbf{k}.$$

c) Vi skriver om  $\mathbf{r}(t)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= (-7t + 3)\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4t\mathbf{k} \\ &= 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + t(-7\mathbf{i} + 4\mathbf{k}) \\ &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t. \end{aligned}$$

Retningen er gitt ved  $\mathbf{v} = -7\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$ .

d) Hvis de to banene skal skjære hverandre må det finnes to tall  $t_1$  og  $t_2$  slik at  $\mathbf{r}_1(t_1) = \mathbf{r}_2(t_2)$ . Dette gir tre komponentlikninger:

$$t_1 = 3t_2 + 1 \tag{1.1}$$

$$-6t_1 + 1 = 2t_2 \tag{1.2}$$

$$2t_1 - 8 = 0 \tag{1.3}$$

$$(1.3) \Rightarrow t_1 = 4$$

$$(1.1) \Rightarrow t_2 = 1$$

$$(1.2) \Rightarrow t_2 = -\frac{23}{2}$$

Her har vi ingen entydig løsning for  $t_1$  og  $t_2$ , altså skjærer banen hverandre ikke.

e) Ved tiden  $t = 0$  går banen igjennom punktet  $P_0 = (3, -1, 5)$  og ved tiden  $t = 1$  går banen gjennom punktet  $P_1 = (-4, 3, 0)$ . Vi vil finne banen uttrykt på formen

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t.$$

Vi kan nå sette inn for  $t = 0$  og  $t = 1$ :

$$\mathbf{r}(t = 0) = \mathbf{r}_0 = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}(t = 1) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

$$\Rightarrow \mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{r}_0$$

$$= -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

$$= -7\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}(t) = (3 - 7t)\mathbf{i} + (-1 + 4t)\mathbf{j} + (5 - 5t)\mathbf{k}.$$

## Oppgave 4

a) Normaliser vektoren  $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{\text{norm}} &= \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}, \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{29} \\ &= \frac{1}{\sqrt{29}}(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}).\end{aligned}$$

b) Tre vektorer med samme lengde som er slik at  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$  utgjør en likesided trekant. For å finne et uttrykk for  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  og  $\mathbf{c}$  må vi plassere vektorene (trekanten) i et koordinatsystem. Dette kan gjøres på mange måter, men det lønner seg å legge en av vektorene langs en av koordinataksene. I figur 1.1 har vi valgt å plassere trekanten slik at  $\mathbf{c} = \mathbf{i}$ . De andre vektorene er da gitt ved

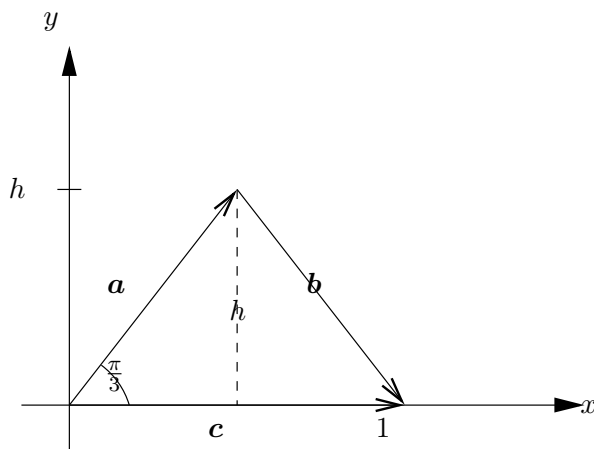
$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{1}{2}\mathbf{i} + h\mathbf{j} \\ \mathbf{b} &= \frac{1}{2}\mathbf{i} - h\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Vi finner  $h$ :

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{h}{|\mathbf{a}|} = \frac{h}{1} = h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

og løsningen er gitt ved

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}, \quad \mathbf{b} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{i}.$$



Figur 1.1: Tre enhetsvektorer plassert slik at  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ .

## Oppgave 5

Skalarproduktet av to vektorer er definert ved

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$$



der  $\theta$  er vinkelen mellom  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$ . Vi løser for  $\cos \theta$ :

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= -3 - 6 - 8 = -17 \\ |\mathbf{a}| &= \sqrt{9 + 4 + 16} = \sqrt{29} \\ |\mathbf{b}| &= \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14} \\ \cos \theta &= -\frac{17}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{14}} = -\frac{17}{\sqrt{406}}.\end{aligned}$$

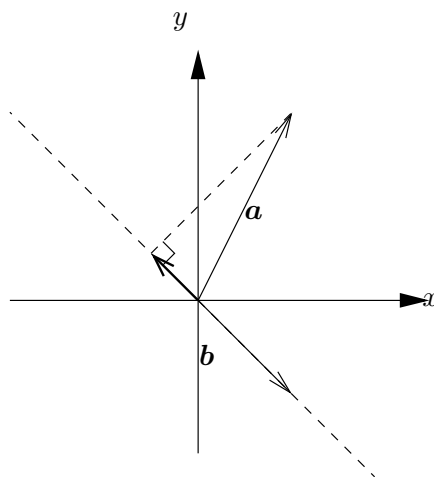
Denne likningen gir to mulig løsninger:  $\theta \approx 147.53^\circ$  og  $\theta \approx 212.47^\circ$ . Siden vinkelen mellom to vektorer ikke kan overstige  $180^\circ$ , blir riktig vinkel her  $\theta \approx 147.53^\circ$ .

## Oppgave 6

Projeksjonen av  $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$  på  $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$  er

$$\frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{b}|^2} \mathbf{b} = \frac{1 - 2}{\sqrt{1+1}^2} \mathbf{b} = -\frac{1}{2} \mathbf{b} = -\frac{1}{2}(\mathbf{i} - \mathbf{j}).$$

Som vi ser av figur 1.2 kan projeksjonen av  $\mathbf{a}$  på  $\mathbf{b}$  tolkes som den delen av vektoren  $\mathbf{a}$  som går i  $\mathbf{b}$ -retning.



Figur 1.2: Projeksjonen av  $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$  på  $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ .

## Oppgave 7

Bruk høyrehåndsregelen eller definisjonen av kryssproduktet.

$\times$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	0	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	0	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	0

## Oppgave 8

Gitt vektorene  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ ,  $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ ,  $\mathbf{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$  og skalaren  $\alpha$ .

a) Vis at  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$  hvis og bare hvis  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$  er parallelle eller hvis  $\mathbf{a} = 0$  eller  $\mathbf{b} = 0$ :

Anta at  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$  er parallelle. Da eksisterer det en  $\alpha$  slik at  $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}$ . Da har vi  $a_1 = \alpha b_1$ ,  $a_2 = \alpha b_2$  og  $a_3 = \alpha b_3$ . Dette gir oss følgende uttrykk:

$$\alpha = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

La oss nå se på  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \mathbf{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \mathbf{k}(a_1b_2 - a_2b_1) = 0. \end{aligned}$$

Dette gir tre likninger:

$$a_2b_3 = a_3b_2 \tag{1.4}$$

$$a_1b_3 = a_3b_1 \tag{1.5}$$

$$a_1b_2 = a_2b_1. \tag{1.6}$$

$$(1.4) \Rightarrow a_2 = \frac{a_3}{b_3}b_2 = \alpha b_2$$

$$(1.5) \Rightarrow a_3 = \frac{a_1}{b_1}b_3 = \alpha b_3$$

$$(1.6) \Rightarrow a_1 = \frac{a_2}{b_2}b_1 = \alpha b_1$$

Altså er  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$  parallelle. Hvis enten  $\mathbf{a} = 0$  eller  $\mathbf{b} = 0$  er det opplagt at  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ .

b) Vis at  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ :

$$\begin{aligned} -\mathbf{b} \times \mathbf{a} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}(-b_2a_3 + b_3a_2) - \mathbf{j}(-b_1a_3 + b_3a_1) + \mathbf{k}(-b_1a_2 + b_2a_1) \\ &= \mathbf{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \mathbf{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \mathbf{k}(a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= \mathbf{a} \times \mathbf{b}. \end{aligned}$$

c) Vis at  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix} \\
 &= \mathbf{i}(a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2)) - \mathbf{j}(a_1(b_3 + c_3) - a_3(b_1 + c_1)) + \\
 &\quad \mathbf{k}(a_1(b_2 + c_2) - a_2(b_1 + c_1)) \\
 &= \mathbf{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \mathbf{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \mathbf{k}(a_1b_2 - a_2b_1) + \\
 &\quad \mathbf{i}(a_2c_3 - a_3c_2) - \mathbf{j}(a_1c_3 - a_3c_1) + \mathbf{k}(a_1c_2 - a_2c_1) \\
 &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}.
 \end{aligned}$$

d) Vis at  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ :

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\
 &= \mathbf{i}((a_2 + b_2)c_3 - (a_3 + b_3)c_2) - \mathbf{j}((a_1 + b_1)c_3 - (a_3 + b_3)c_1) + \\
 &\quad \mathbf{k}((a_1 + b_1)c_2 - (a_2 + b_2)c_1) \\
 &= \mathbf{i}(a_2c_3 - a_3c_2) - \mathbf{j}(a_1c_3 - a_3c_1) + \mathbf{k}(a_1c_2 - a_2c_1) + \\
 &\quad \mathbf{i}(b_2c_3 - b_3c_2) - \mathbf{j}(b_1c_3 - b_3c_1) + \mathbf{k}(b_1c_2 - b_2c_1) \\
 &= \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}.
 \end{aligned}$$

e) Vis at  $(\alpha\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ :

$$\begin{aligned}
 (\alpha\mathbf{a}) \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha a_1 & \alpha a_2 & \alpha a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\
 &= \mathbf{i}(\alpha a_2 b_3 - \alpha a_3 b_2) - \mathbf{j}(\alpha a_1 b_3 - \alpha a_3 b_1) + \mathbf{k}(\alpha a_1 b_2 - \alpha a_2 b_1) \\
 &= \alpha [\mathbf{i}(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \mathbf{j}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \mathbf{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1)] \\
 &= \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).
 \end{aligned}$$

f) Vis at  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$ .

La oss se på den venstre siden først:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\
 &= \mathbf{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \mathbf{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \mathbf{k}(a_1b_2 - a_2b_1) \\
 (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_2b_3 - a_3b_2 & a_3b_1 - a_1b_3 & a_1b_2 - a_2b_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\
 &= \mathbf{i}\left((a_3b_1 - a_1b_3)c_3 - (a_1b_2 - a_2b_1)c_2\right) - \\
 &\quad \mathbf{j}\left((a_2b_3 - a_3b_2)c_3 - (a_1b_2 - a_2b_1)c_1\right) + \\
 &\quad \mathbf{k}\left((a_2b_3 - a_3b_2)c_2 - (a_3b_1 - a_1b_3)c_1\right). \tag{1.7}
 \end{aligned}$$

Den høyre siden ledd for ledd:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} &= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)\mathbf{b} \\
 &= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1\mathbf{i} + \\
 &\quad (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_2\mathbf{j} + \\
 &\quad (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_3\mathbf{k} \\
 (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} &= (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)\mathbf{a} \\
 &= (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)a_1\mathbf{i} + \\
 &\quad (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)a_2\mathbf{j} + \\
 &\quad (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)a_3\mathbf{k}.
 \end{aligned}$$

Vi samler leddene:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} &= \mathbf{i}(a_1c_1b_1 + a_2c_2b_1 + a_3c_3b_1 - b_1c_1a_1 - b_2c_2a_1 - b_3c_3a_1) + \\
 &\quad \mathbf{j}(a_1c_1b_2 + a_2c_2b_2 + a_3c_3b_2 - b_1c_1a_2 - b_2c_2a_2 - b_3c_3a_2) + \\
 &\quad \mathbf{k}(a_1c_1b_3 + a_2c_2b_3 + a_3c_3b_3 - b_1c_1a_3 - b_2c_2a_3 - b_3c_3a_3).
 \end{aligned}$$

En enkel opprydding her gir oss (1.7).

g) Vis at  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  hvis og bare hvis  $(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{b} = 0$ .

$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$  regnet vi ut i deloppgave f (likning 1.7). På tilsvarende måte får vi

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{i}\left(a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3)\right) - \\
 &\quad \mathbf{j}\left(a_1(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_2c_3 - b_3c_2)\right) + \\
 &\quad \mathbf{k}\left(a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2)\right). \tag{1.8}
 \end{aligned}$$

Setter vi likning 1.7 og likning 1.8 lik hverandre får vi følgende

*i*-retning:

$$\begin{aligned} a_3b_1c_3 - a_1b_3c_3 - a_1b_2c_2 + a_2b_1c_2 &= a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3 \\ \Rightarrow -a_1b_3c_3 - a_1b_2c_2 + a_2b_2c_1 + a_3b_3c_1 &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

*j*-retning:

$$\begin{aligned} -a_2b_3c_3 + a_3b_2c_3 + a_1b_2c_1 - a_2b_1c_1 &= -a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 + a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 \\ \Rightarrow -a_2b_3c_3 - a_2b_1c_1 + a_1b_1c_2 + a_3b_3c_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

*k*-retning:

$$\begin{aligned} a_2b_3c_2 - a_3b_2c_2 - a_3b_1c_1 + a_1b_3c_1 &= a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2 \\ \Rightarrow -a_3b_2c_2 - a_3b_1c_1 + a_1b_1c_3 + a_2b_2c_3 &= 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Vi kan nå regne ut  $(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{b}$ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{b} &= \mathbf{i} \left( (-a_1c_3 + a_3c_1)b_3 - (a_1c_2 - a_2c_1)b_2 \right) - \\ &\quad \mathbf{j} \left( (a_2c_3 - a_3c_2)b_3 - (a_1c_2 - a_2c_1)b_1 \right) + \\ &\quad \mathbf{k} \left( (a_2c_3 - a_3c_2)b_2 - (-a_1c_3 + a_3c_1)b_1 \right) \end{aligned}$$

Settes dette uttrykket lik null får vi likningene (1.9) - (1.11).

h) Vis at  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ :

$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$  regnet vi ut i deloppgave f (likning 1.7). De to andre leddene gir

$$\begin{aligned} (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} &= \mathbf{i} \left( (b_3c_1 - b_1c_3)a_3 - (b_1c_2 - b_2c_1)a_2 \right) - \\ &\quad \mathbf{j} \left( (b_2c_3 - b_3c_2)a_3 - (b_1c_2 - b_2c_1)a_1 \right) + \\ &\quad \mathbf{k} \left( (b_2c_3 - b_3c_2)a_2 - (b_3c_1 - b_1c_3)a_1 \right) \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} &= \mathbf{i} \left( (a_1c_3 - a_3c_1)b_3 - (a_2c_1 - a_1c_2)b_2 \right) - \\ &\quad \mathbf{j} \left( (a_3c_2 - a_2c_3)b_3 - (a_2c_1 - a_1c_2)b_1 \right) + \\ &\quad \mathbf{k} \left( (a_3c_2 - a_2c_3)b_2 - (a_1c_3 - a_3c_1)b_1 \right). \end{aligned}$$

Summerer vi opp leddene får vi

*i*-retning:

$$\begin{aligned} &a_3b_1c_3 - a_1b_3c_3 - a_1b_2c_2 + a_2b_1c_2 + \\ &a_3b_3c_1 - a_3b_1c_3 - a_2b_1c_2 + a_2b_2c_1 + \\ &a_1b_3c_3 - a_3b_3c_1 - a_2b_2c_1 + a_1b_2c_2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

$j$ -retning:

$$\begin{aligned} & -a_2b_3c_3 + a_3b_2c_3 + a_1b_2c_1 - a_2b_1c_1 + \\ & -a_3b_2c_3 + a_3b_3c_2 + a_1b_1c_2 - a_1b_2c_1 + \\ & -a_3b_3c_2 + a_2b_3c_3 + a_2b_1c_1 - a_1b_1c_2 \\ & = 0. \end{aligned}$$

$k$ -retning:

$$\begin{aligned} & a_2b_3c_2 - a_3b_2c_2 - a_3b_1c_1 + a_1b_3c_1 + \\ & a_2b_2c_3 - a_2b_3c_2 - a_1b_3c_1 + a_1b_1c_3 + \\ & a_3b_2c_2 - a_2b_2c_3 - a_1b_1c_3 + a_3b_1c_1 \\ & = 0. \end{aligned}$$

## Oppgave 9

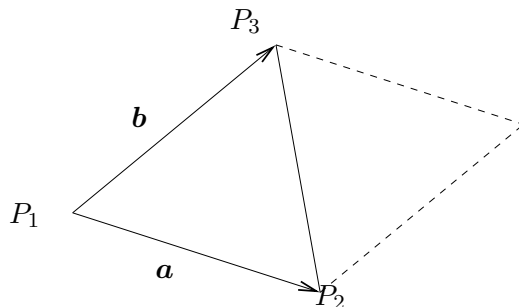
Arealet av parallelogrammet utspent av  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$  er  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}(-3 - 8) - \mathbf{j}(9 + 2) + \mathbf{k}(12 - 1) \\ &= -11\mathbf{i} - 11\mathbf{j} + 11\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\text{Arealet} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{121 + 121 + 121} = 11\sqrt{3}.$$

## Oppgave 10

Gitt tre punkter  $P_1 = (-2, -1, 2)$ ,  $P_2 = (2, 0, 1)$  og  $P_3 = (2, 2, 0)$ . Arealet av trekanten er halvparten av arealet til et parallelogram dannet av vektorene  $\mathbf{a}$  (fra  $P_1$  til  $P_2$ ) og  $\mathbf{b}$  (fra  $P_1$  til  $P_3$ ).



Figur 1.3: En trekant er halvparten av et parallelogram.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= 4\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k} \\ \mathbf{b} &= 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k} \end{aligned}$$

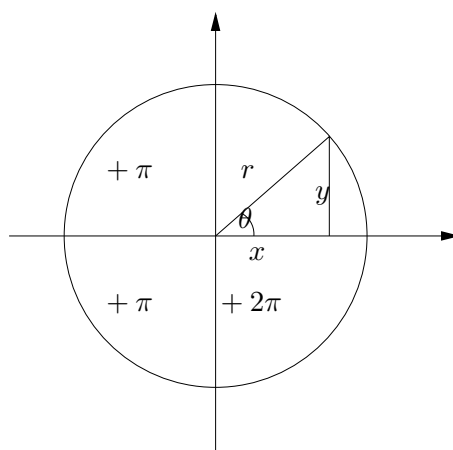
$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} \\
 &= \mathbf{i}(-2 + 3) - \mathbf{j}(-8 + 4) + \mathbf{k}(12 - 4) \\
 &= \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k} \\
 \text{Arealet} &= \frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 16 + 64} = \frac{1}{2}\sqrt{81} = \frac{9}{2}.
 \end{aligned}$$

## Oppgave 11

Generelt har vi:

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \theta \\
 y &= r \sin \theta \\
 r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
 \theta &= \arctan y/x, \quad x > 0, y \geq 0 \\
 & \quad (+ \pi \text{ hvis } x < 0, + 2\pi \text{ hvis } x > 0 \text{ og } y < 0).
 \end{aligned}$$

Alternativt kan man bruke funksjonen  $\text{atan2}(y, x)$  som finnes i diverse programmeringspråk (f.eks. Matlab) og som er lik  $\arctan y/x$  i første og fjerde kvadrant,  $\arctan y/x + \pi$  i andre kvadrant, og  $\arctan y/x - \pi$  i tredje kvadrant.



Figur 1.4: Plane polarkoordinater og enhetssirkelen.

a) Kartesiske koordinater:  $(6, 2\sqrt{3})$ . Polarkoordinater:

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{36 + 4 \cdot 3} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \\
 \theta &= \arctan y/x = \arctan \sqrt{3}/3 = \frac{\pi}{6}.
 \end{aligned}$$

Punktet uttrykt i polarkoordinater er  $(4\sqrt{3}, \pi/6)$ .

b) Polarkoordinater:  $(3, \pi/2)$ . Kartesiske koordinater:

$$x = r \cos \theta = 3 \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$y = r \sin \theta = 3 \sin \frac{\pi}{2} = 3.$$

De kartesiske koordinatene til punktet er  $(0, 3)$ . Posisjonsvektoren uttrykt i kartesiske koordinater er  $3\mathbf{j}$ .

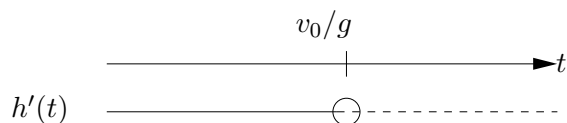
## Oppgave 12

Gitt formelen for høyden ( $h$ ) som funksjon av tiden ( $t$ ) til en rakett som skytes vertikalt oppover i tyngdefeltet:

$$h(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (1.12)$$

a) Den største høyden ( $t_m$ ) finner vi ved å derivere funksjonen og bestemme ekstremalverdiene.

$$h'(t) = v_0 - g t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0}{g}.$$



$t_m = v_0/g$  er et maksimum for  $h(t)$ . La oss sjekke dimensjonen til  $t_m$  for sikkerhetskyld:

$$[t_m] = \frac{[v_0]}{[g]} = \frac{m/s}{m/s^2} = s.$$

Den maksimale høyden er nå lett å regne ut:

$$\begin{aligned} h_m &= h(t_m) = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \\ &= \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}. \end{aligned}$$

Dimensjonen blir

$$[h_m] = \frac{[v_0^2]}{[g]} = \frac{m^2/s^2}{m/s^2} = m.$$

b) Vi innfører to nye dimensjonsløse parametere (variable):

$$h^* = \frac{h}{h_m} \quad \Rightarrow \quad h = h^* h_m$$

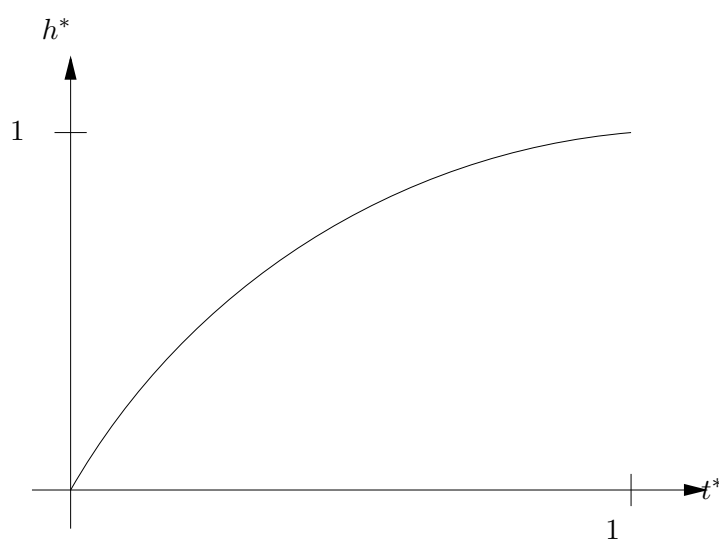
$$t^* = \frac{t}{t_m} \quad \Rightarrow \quad t = t^* t_m.$$



Insatt i likning 1.12 gir dette:

$$\begin{aligned}h^* h_m &= v_0 t^* t_m - \frac{1}{2} g t^{*2} t_m^2 \\h^* &= \frac{v_0 t^* t_m}{h_m} - \frac{1}{2} \frac{g t^{*2} t_m^2}{h_m} \\&= \frac{v_0 t^* \frac{v_0}{g}}{\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}} - \frac{1}{2} g \frac{t^{*2} \frac{v_0^2}{g^2}}{\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}} \\&= 2t^* - t^{*2}.\end{aligned}$$

c)



Figur 1.5: Funksjonen  $h^* = 2t^* - t^{*2}$ .



## Kapittel 2

# Gradientvektoren, vektorfelt, strømlinjer, feltlinjer

### Oppgave 1

Gitt funksjonen  $f(x, y, z) = x^2y + z^2x$ . Vi regner først ut de partielt deriverte med hensyn på  $x$ ,  $y$  og  $z$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + z^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2zx.$$

De dobbeltderiverte blir nå

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 2x, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= 2z \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= 2x, & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} &= 2z. \end{aligned}$$

### Oppgave 2

Taylor-approksimasjonen av første orden til en funksjon  $f = f(x)$  om punktet  $x_0$  er gitt ved

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

For funksjoner av to variable,  $g = g(x, y)$ , om punktet  $(x_0, y_0)$  har vi

$$T_1(x, y) = g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

der  $g_x$  og  $g_y$  betegner de partielt deriverte av  $g$  med hensyn på henholdsvis  $x$  og  $y$ .

a)  $f(x) = \sin x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $f'(x) = \cos x$ .

$$\begin{aligned} T_1(x) &= \sin 0 + \cos 0 \cdot (x - 0) \\ &= 0 + 1 \cdot x \\ &= x. \end{aligned}$$

b)  $f(x) = \cos x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $f'(x) = -\sin x$ .

$$\begin{aligned} T_1(x) &= \cos 0 - \sin 0 \cdot (x - 0) \\ &= 1 - 0 \cdot x \\ &= 1. \end{aligned}$$

c)  $f(x) = e^{x^2}, \quad f'(x) = 2xe^{x^2}.$

$$\begin{aligned} x_0 = 0: \quad T_1(x) &= e^0 + 2 \cdot 0 \cdot e^0(x - 0) \\ &= 1 + 0 \cdot (x - 0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_0 = 1: \quad T_1(x) &= e^1 + 2 \cdot 1 \cdot e^1(x - 1) \\ &= e + 2e(x - 1) \\ &= e(2x - 1). \end{aligned}$$

d)  $f(x) = \sin \sqrt{x}, \quad x_0 = \pi^2, \quad f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cos \sqrt{x}.$

$$\begin{aligned} T_1(x) &= \sin \pi + \frac{1}{2}(\pi^2)^{-\frac{1}{2}} \cos \pi(x - \pi^2) \\ &= 0 + \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} (-1)(x - \pi^2) \\ &= -\frac{1}{2\pi}(x - \pi^2). \end{aligned}$$

e)  $g(x, y) = \sin x \cos y, \quad (x_0, y_0) = (0, 0), \quad g_x = \cos x \cos y, \quad g_y = -\sin x \sin y.$

$$\begin{aligned} T_1(x, y) &= \sin 0 \cos 0 + \cos 0 \cos 0(x - 0) - \sin 0 \sin 0(y - 0) \\ &= 0 + 1 \cdot (x - 0) - 0 \cdot (y - 0) \\ &= x. \end{aligned}$$

f)  $g(x, y) = xy^2 - e^{x+y}, \quad (x_0, y_0) = (1, -1), \quad g_x = y^2 - e^{x+y}, \quad g_y = 2xy - e^{x+y}.$

$$\begin{aligned} T_1(x, y) &= 1 \cdot (-1)^2 - e^{1-1} + ((-1)^2 - e^{1-1})(x - 1) + (2 \cdot 1 \cdot (-1) - e^{1-1})(y + 1) \\ &= 1 - 1 + (1 - 1)(x - 1) + (-2 - 1)(y + 1) \\ &= -3y - 3. \end{aligned}$$

g)  $g(x, y) = \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}, \quad (x_0, y_0) = (-1, 2).$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{y(1 + x^2 + y^2) - xy \cdot 2x}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{y - x^2y + y^3}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x(1 + x^2 + y^2) - xy \cdot 2y}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{x - xy^2 + x^3}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

$$\begin{aligned} T_1(x, y) &= \frac{-2}{1 + 1 + 4} + \frac{2 - 2 + 8}{36}(x + 1) + \frac{-1 + 4 - 1}{36}(y - 2) \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{2}{9}(x + 1) + \frac{1}{18}(y - 2) \\ &= \frac{4x + y - 4}{18}. \end{aligned}$$

### Oppgave 3

Taylor-approximasjonen av andre orden til en funksjon  $f = f(x)$  om punktet  $x_0$  er gitt ved

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2.$$

a)  $f(x) = \sin x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $f'(x) = \cos x$ ,  $f''(x) = -\sin x$ .

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 0 + 1 \cdot (x - 0) + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot (x - 0)^2 \\ &= x. \end{aligned}$$

b)  $f(x) = \cos x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $f'(x) = -\sin x$ ,  $f''(x) = -\cos x$ .

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 1 + 0 \cdot (x - 0) + \frac{1}{2}(-1)(x - 0)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2. \end{aligned}$$

c)  $f(x) = \ln x$ ,  $x_0 = 2$ ,  $f'(x) = \frac{1}{x}$ ,  $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ .

$$T_2(x) = \ln 2 + \frac{1}{2}(x - 2) - \frac{1}{8}(x - 2)^2.$$

d)  $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$ ,  $x_0 = -1$ ,  $f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}$ ,  $f''(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$ .

$$T_2(x) = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e(x + 1) + \frac{1}{4}e(x + 1)^2.$$

### Oppgave 4

Vi følger hintet og rekkeutvikler teller

$$\ln(x + 1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

og nevner

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots$$

Så utfører vi en polynomdivisjon og beholder kun ledd til andre orden

$$\frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}{x - \frac{x^3}{6}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \dots$$

Så kan vi sette inn verdien  $x = 0.01$

$$\frac{\log(1.01)}{\sin(0.01)} \approx 0.99505.$$

Legg merke til at det er nødvendig å rekkeutvikle både teller og nevner til tredje orden for at sluttresultatet skal bli nøyaktig til andre orden, det skyldes at rekkeutviklingene til både teller og nevner starter med ledd av første orden.

## Oppgave 5

Gradienten til et skalarfelt  $\beta$ , også kalt gradientvektoren, er definert ved

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Vi skal i denne oppgaven benytte oss av  $\mathbf{r}$ -vektoren:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad |\mathbf{r}| = r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

a)  $\beta = x^2 + xy + z^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\beta}{\partial x} &= 2x + y \\ \frac{\partial\beta}{\partial y} &= x \\ \frac{\partial\beta}{\partial z} &= 2z \\ \Rightarrow \nabla\beta &= (2x + y)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}. \end{aligned}$$

b)  $\beta = e^{-(xy+z)}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\beta}{\partial x} &= e^{-(xy+z)} \cdot (-y) \\ \frac{\partial\beta}{\partial y} &= e^{-(xy+z)} \cdot (-x) \\ \frac{\partial\beta}{\partial z} &= e^{-(xy+z)} \cdot (-1) \\ \Rightarrow \nabla\beta &= -e^{-(xy+z)}(y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k}). \end{aligned}$$

c)  $\beta = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\beta}{\partial x} &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \frac{\partial\beta}{\partial y} &= \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \frac{\partial\beta}{\partial z} &= \frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \Rightarrow \nabla\beta &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{r}}{r}. \end{aligned}$$

$$d) \beta = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}:$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial z} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2z$$

$$\Rightarrow \nabla \beta = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

$$e) \beta = \beta(r), \quad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}:$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{d\beta}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{d\beta}{dr} \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{d\beta}{dr} \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{d\beta}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{d\beta}{dr} \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y = \frac{d\beta}{dr} \frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{d\beta}{dr} \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{d\beta}{dr} \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2z = \frac{d\beta}{dr} \frac{z}{r}$$

$$\Rightarrow \nabla \beta = \frac{d\beta}{dr} \frac{1}{r}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \frac{d\beta}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Vi kontrollerer ved å sammenlikne resultatene fra deloppgavene c) og d):

$$c) \beta = r \quad \Rightarrow \quad \nabla \beta = 1 \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad \text{Ok!}$$

$$d) \beta = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \nabla \beta = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad \text{Ok!}$$

## Oppgave 6

Gradienten til et skalarfelt  $\beta$  er definert ved

$$\nabla \beta = \frac{\partial \beta}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \beta}{\partial z} \mathbf{k}.$$

$$a) \nabla \beta = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}:$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = yz \quad \Rightarrow \quad \beta(x, y, z) = xyz + f_1(y, z)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} = xz \quad \Rightarrow \quad \beta(x, y, z) = xyz + f_2(x, z)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial z} = xy \quad \Rightarrow \quad \beta(x, y, z) = xyz + f_3(x, y).$$

For å få en entydig  $\beta$  må vi velge  $f_1 = f_2 = f_3 = C$  (= konstant) slik at

$$\beta(x, y, z) = xyz + C.$$

b)  $\nabla\beta = \cos(yz)\mathbf{i} - xz \sin(yz)\mathbf{j} - xy \sin(yz)\mathbf{k}$ :

$$\frac{\partial\beta}{\partial x} = \cos(yz) \Rightarrow \beta(x, y, z) = x \cos(yz) + f_1(y, z)$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial y} = -xz \sin(yz) \Rightarrow \beta(x, y, z) = x \cos(yz) + f_2(x, z)$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial z} = -xy \sin(yz) \Rightarrow \beta(x, y, z) = x \cos(yz) + f_3(x, y).$$

Entydig  $\beta$  krever  $f_1 = f_2 = f_3 = C$ :

$$\beta(x, y, z) = x \cos(yz) + C.$$

c)  $\nabla\beta = -e^{-x}\mathbf{i} - e^{-y}\mathbf{j} - e^{-z}\mathbf{k}$ :

$$\frac{\partial\beta}{\partial x} = -e^{-x} \Rightarrow \beta(x, y, z) = e^{-x} + f_1(y, z)$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial y} = -e^{-y} \Rightarrow \beta(x, y, z) = e^{-y} + f_2(x, z)$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial z} = -e^{-z} \Rightarrow \beta(x, y, z) = e^{-z} + f_3(x, y).$$

Her må vi velge funksjonene  $f_1$ ,  $f_2$  og  $f_3$  slik at

$$f_1(y, z) = e^{-y} + e^{-z} + C$$

$$f_2(x, z) = e^{-x} + e^{-z} + C$$

$$f_3(x, y) = e^{-x} + e^{-y} + C$$

$$\Rightarrow \beta(x, y, z) = e^{-x} + e^{-y} + e^{-z} + C.$$

## Oppgave 7

Definisjonen av gradientvektoren av en skalarfunksjon  $\beta$  er

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\mathbf{k}.$$

a)

$$\begin{aligned} \nabla(\alpha + \beta) &= \frac{\partial}{\partial x}(\alpha + \beta)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha + \beta)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha + \beta)\mathbf{k} \\ &= \frac{\partial\alpha}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\mathbf{k} + \frac{\partial\beta}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\mathbf{k} \\ &= \nabla\alpha + \nabla\beta. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \nabla(c\beta) &= \frac{\partial}{\partial x}(c\beta)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(c\beta)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}(c\beta)\mathbf{k} \\ &= c\frac{\partial\beta}{\partial x}\mathbf{i} + c\frac{\partial\beta}{\partial y}\mathbf{j} + c\frac{\partial\beta}{\partial z}\mathbf{k} \\ &= c\nabla\beta. \end{aligned}$$



c)

$$\begin{aligned}
\nabla(\alpha\beta) &= \frac{\partial}{\partial x}(\alpha\beta)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha\beta)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha\beta)\mathbf{k} \\
&= \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\beta + \alpha\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\beta + \alpha\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\beta + \alpha\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)\mathbf{k} \\
&= \beta\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\mathbf{k}\right) + \alpha\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\mathbf{k}\right) \\
&= \beta\nabla\alpha + \alpha\nabla\beta.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\nabla\left(\frac{1}{\beta}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\beta}\right)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\beta}\right)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\beta}\right)\mathbf{k} \\
&= -\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial\beta}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial\beta}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial\beta}{\partial z}\mathbf{k} \\
&= -\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\mathbf{k}\right) \\
&= -\frac{1}{\beta^2}\nabla\beta.
\end{aligned}$$

## Oppgave 8

Vi har gitt temperaturmodellen

$$T = T_0 \frac{R}{r} \quad (2.1)$$

der  $T_0$  og  $R$  er konstanter og  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ .

a) Vi regner først ut temperaturgradienten i et vilkårlig punkt:

$$\nabla T = \nabla\left(T_0 \frac{R}{r}\right) = T_0 R \nabla\left(\frac{1}{r}\right).$$

Den siste likheten får vi fra oppgave 8b. Fra oppgave 5d får vi følgende resultat:

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

som gir oss temperaturgradienten

$$\nabla T = -\frac{T_0 R}{r^3} \mathbf{r}.$$

Ved jordoverflaten er  $r = R$  og

$$\nabla T = -\frac{T_0}{R^2} \mathbf{r}.$$

Retningen er her  $-\mathbf{r}$ , dvs. fra jordoverflaten og inn mot sentrum av jorden, mens størrelsen blir

$$|\nabla T| = \frac{T_0}{R^2} |\mathbf{r}| = \frac{T_0}{R}.$$

MERK: Oppgaven spør om retning, men ikke om retningsvektor med enhets lengde. Det er derfor valgfritt om vi angir retningen ved en vektor med vilkårlig lengde.

- b) Vi skalerer  $T$  med temperaturkonstanten  $T_0$  og  $r$  med avstandskonstanten  $R$ . Da får vi to nye dimensjonsløse variabler:

$$T^* = \frac{T}{T_0}, \quad r^* = \frac{r}{R}.$$

Vi kan nå sette  $T = T^*T_0$  og  $r = r^*R$  inn i likning 2.1:

$$\begin{aligned} T^*T_0 &= T_0 \frac{R}{r^*R} \\ T^* &= \frac{1}{r^*}. \end{aligned}$$

## Oppgave 9

Et fjellpass er beskrevet ved

$$h(x, y) = h_0 + \frac{a}{R^2}xy \quad (2.2)$$

der  $h_0$ ,  $R$  og  $a$  er konstanter.

- a) Høydekonturene finner vi ved å sette  $h(x, y) = C = \text{konstant}$ :

$$\begin{aligned} C &= h_0 + \frac{a}{R^2}xy \\ xy &= \frac{C - h_0}{a}R^2. \end{aligned}$$

Hvis  $C = h_0$  har vi at  $xy = 0$  som gir  $x = 0$  og  $y = 0$ . Både  $x$ - og  $y$ -aksen er altså høydekonturer. Hvis  $C \neq h_0$  har vi:

$$y = R^2 \frac{C - h_0}{a} \frac{1}{x}.$$

For  $x = R$  og  $y = R$ :

$$R = \frac{C - h_0}{a}R \Rightarrow C = h_0 + a \quad (= 1450\text{m})$$

For  $x = R$  og  $y = -R$ :

$$-R = \frac{C - h_0}{a}R \Rightarrow C = h_0 - a \quad (= 950\text{m})$$

o.s.v.

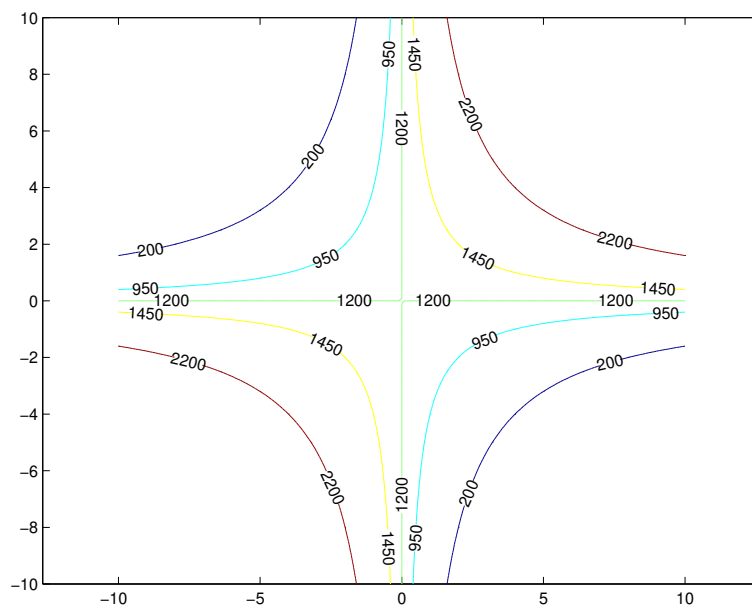
- b) Gradientvektoren peker mot større verdier av skalarfunksjonen:

$$\begin{aligned} \nabla h &= \frac{\partial h}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial h}{\partial y} \mathbf{j} \\ &= \frac{a}{R^2}(y\mathbf{i} + x\mathbf{j}). \end{aligned}$$

Størrelsen til gradientvektoren sier hvor bratt stigningen er:

$$|\nabla h| = \frac{a}{R^2} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Stigningen er altså like bratt på sirkler med sentrum i origo og det blir brattere jo lenger vekk fra origo vi kommer.



Figur 2.1: Konturlinjene til fjellpassmodellen (2.2)

- c) Det er mange måter å løse denne oppgaven. En opplagt måte er å innføre nye dimensjonsløse variabler:

$$h^* = \frac{h}{h_0}, \quad x^* = \frac{x}{R}, \quad y^* = \frac{y}{R}.$$

Vi kan nå sette  $h = h^*h_0$ ,  $x = x^*R$  og  $y = y^*R$  inn i likning 2.2:

$$h^*h_0 = h_0 + \frac{a}{R^2}x^*Ry^*R$$

$$h^* = 1 + \frac{a}{h_0}x^*y^*.$$

Brøken  $a/h_0$  er dimensjonsløs siden både  $a$  og  $h_0$  har dimensjon meter. Vi markerer dette ved å innføre  $a^* = a/h_0$  slik at den dimensjonsløse likningen blir

$$h^* = 1 + a^*x^*y^*.$$

En bedre måte er å innføre

$$h^* = \frac{h}{h_0}, \quad x^* = \frac{x}{R}\sqrt{\frac{a}{h_0}}, \quad y^* = \frac{y}{R}\sqrt{\frac{a}{h_0}}.$$

Da oppnår vi at konstanten  $a$  blir borte slik at den dimensjonsløse likningen blir

$$h^* = 1 + x^*y^*.$$

En enda bedre måte er å innføre

$$h^* = \frac{h - h_0}{a}, \quad x^* = \frac{x}{R}, \quad y^* = \frac{y}{R}.$$

Da oppnår vi at både konstanten  $a$  og konstantleddet blir borte slik at den dimensjonsløse likningen blir

$$h^* = x^*y^*.$$

## Oppgave 10

a)  $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ ,  $u = a$ ,  $v = b$ .

$$\begin{aligned} u \, dy &= v \, dx \\ a \, dy &= b \, dx \\ \int a \, dy &= \int b \, dx \\ ay &= bx + C \\ y &= \frac{b}{a}x + C. \end{aligned}$$

( $C$  er en vilkårlig konstant  $\Rightarrow C/a = C$ .)

b)  $\mathbf{v} = ay\mathbf{i} + bx\mathbf{j}$ ,  $u = ay$ ,  $v = bx$ .

$$\begin{aligned} u \, dy &= v \, dx \\ ay \, dy &= bx \, dx \\ \int ay \, dy &= \int bx \, dx \\ \frac{1}{2}ay^2 &= \frac{1}{2}x^2 + C \\ y^2 &= \frac{b}{a}x^2 + C \\ y &= \pm \sqrt{\frac{b}{a}x^2 + C}. \end{aligned}$$

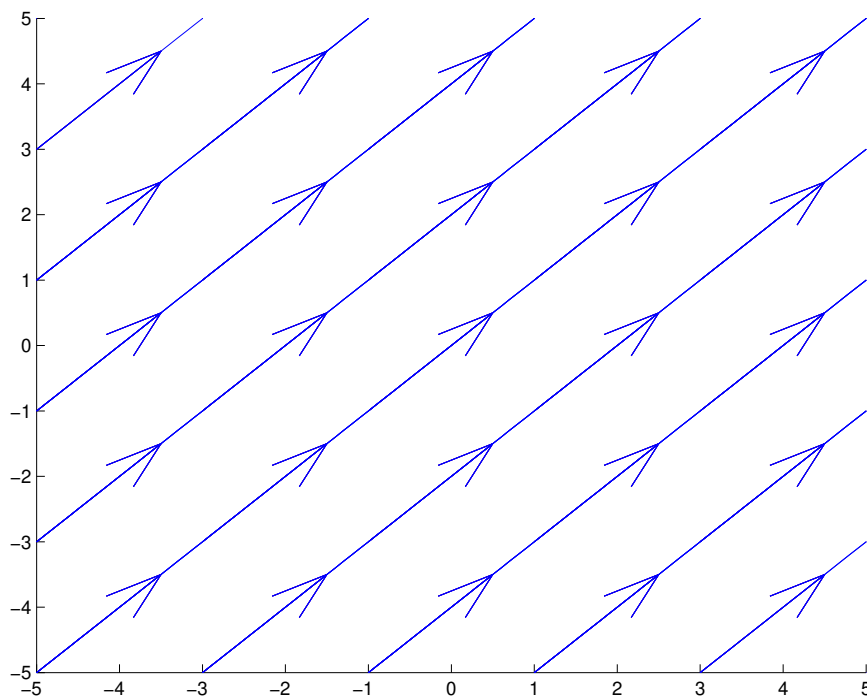
Hvis  $a$  er negativ får vi

$$y^2 + \alpha x^2 = C, \quad \alpha = -\frac{b}{a} > 0$$

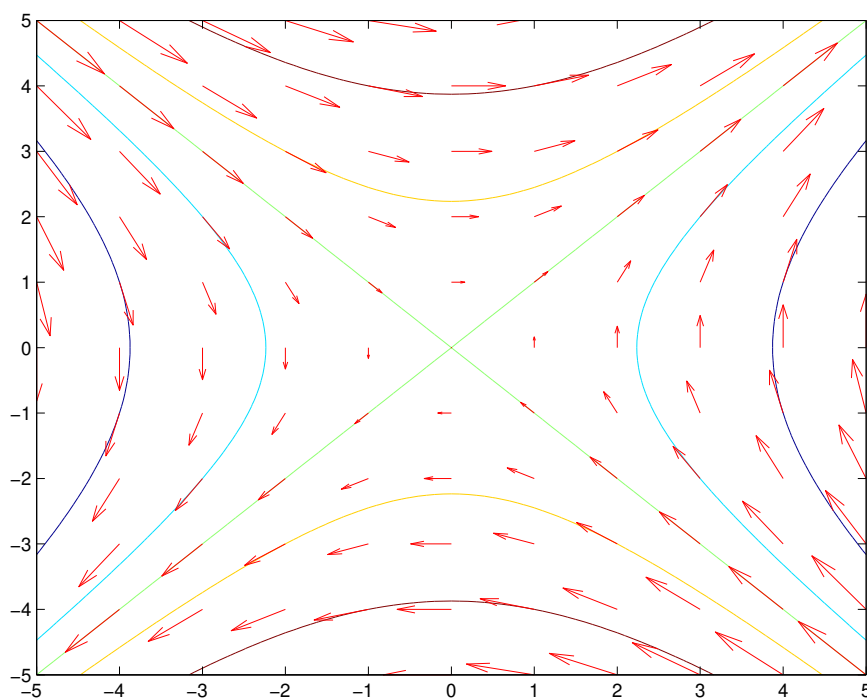
og strømlinjene blir ellipser med sentrum i origo.

c)  $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + bx\mathbf{j}$ ,  $u = a$ ,  $v = bx$ .

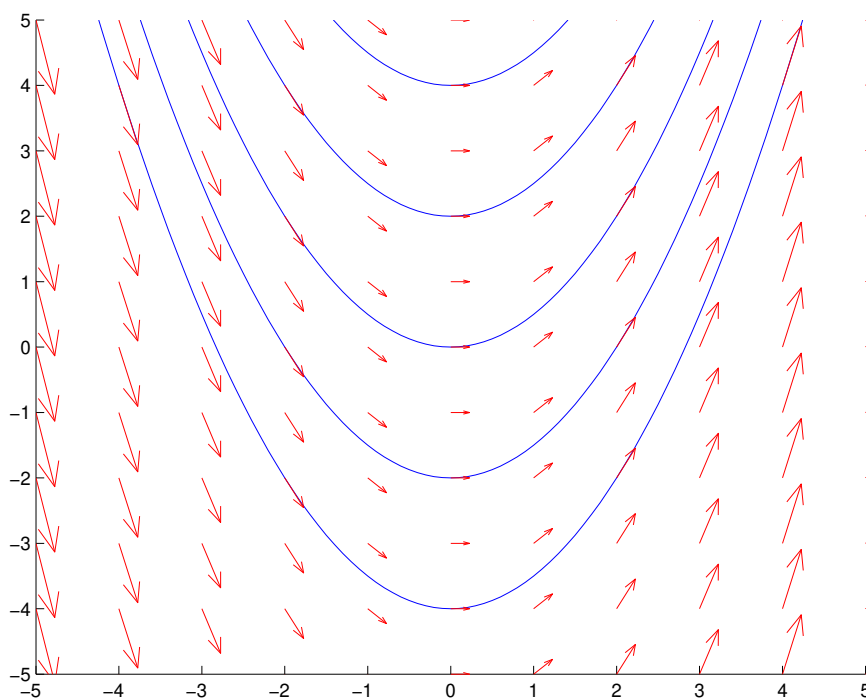
$$\begin{aligned} u \, dy &= v \, dx \\ a \, dy &= bx \, dx \\ \int a \, dy &= \int bx \, dx \\ ay &= \frac{1}{2}bx^2 + C \\ y &= \frac{b}{2a}x^2 + C. \end{aligned}$$



Figur 2.2: Konturlinjene  $C = -8, -6, \dots, 6, 8$  til vektorfeltet  $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$  der  $a = b = 1$ .



Figur 2.3: Konturlinjene  $C = -15, -5, 0, 5, 15$  til vektorfeltet  $\mathbf{v} = ay\mathbf{i} + bx\mathbf{j}$  der  $a = b = 1$ .



Figur 2.4: Konturlinjene  $C = -4, -2, 0, 2, 4$  til vektorfeltet  $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$  der  $a = b = 1$ .

## Oppgave 11

Gitt vektorfeltet

$$\mathbf{v} = -\frac{cy}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{cx}{x^2 + y^2}\mathbf{j}.$$

Vi finner som vanlig strømlinjene ved å sette inn i formelen  $u dy = v dx$ . Før vi integrerer må vi huske på å forkorte så mye som mulig.

$$-\frac{cy}{x^2 + y^2} dy = \frac{cx}{x^2 + y^2} dx$$

$$-y dy = x dx$$

$$-\int y dy = \int x dx$$

$$-\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$x^2 + y^2 = 2C.$$

Strømlinjene blir sirkler med sentrum i origo.

## Oppgave 12

La oss først finne  $\mathbf{v}$  uttrykt ved hjelp av  $\beta$ :

$$\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \nabla\beta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{\partial\beta}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial\beta}{\partial y}\mathbf{i} + \frac{\partial\beta}{\partial x}\mathbf{j}.$$

Strømlinjene er gitt ved likningen

$$\begin{aligned} u \, dy &= v \, dx \\ -\frac{\partial\beta}{\partial y} \, dy &= \frac{\partial\beta}{\partial x} \, dx \\ \frac{\partial\beta}{\partial x} \, dx + \frac{\partial\beta}{\partial y} \, dy &= 0. \end{aligned}$$

Venstresiden over kjenner vi igjen som  $d\beta$ , tilveksten i  $\beta$ . Hvis tilveksten i  $\beta$  er null må  $\beta$  være konstant. Strømlinjene til vektorfunksjonen  $\mathbf{v}$  er altså gitt ved

$$\beta(x, y) = \beta_0 = \text{konstant}.$$

## Oppgave 13

Vi har gitt et hastighetsfelt

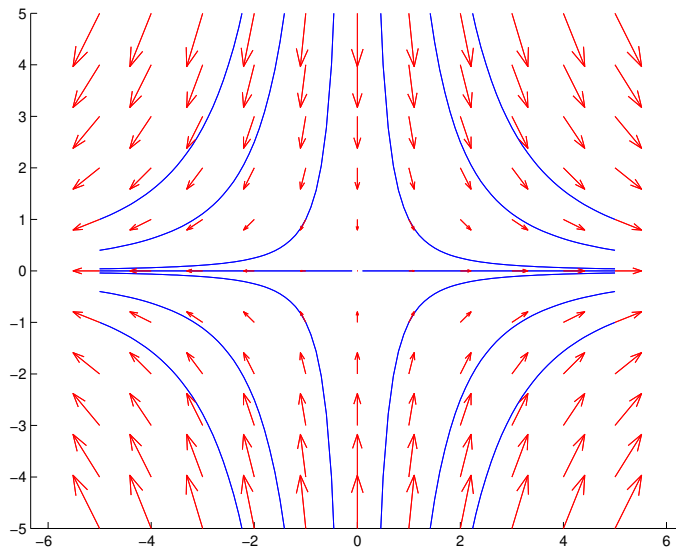
$$\mathbf{v} = 2kx\mathbf{i} + 2ky\mathbf{j} - 4kz\mathbf{k}, \quad k > 0.$$

- a) I  $xz$ -planet har  $\mathbf{v}$  komponentene  $u = 2kx$  og  $w = -4kz$ . Likningen for strømlinjene blir

$$\begin{aligned} u \, dz &= w \, dx \\ 2kx \, dz &= -4kz \, dx. \end{aligned}$$

Før vi går løs på integreringen, må vi forkorte så mye som mulig og sørge for at alle uttrykk med  $x$  er på samme side som  $dx$  og alle uttrykk med  $z$  er på samme side som  $dz$ .

$$\begin{aligned} x \, dz &= -2z \, dx \\ \frac{1}{z} \, dz &= -\frac{2}{x} \, dx \\ \int \frac{1}{z} \, dz &= -2 \int \frac{1}{x} \, dx \\ \ln z &= -2 \ln x + C \\ e^{\ln z} &= e^{-2 \ln x + C} \\ z &= e^{\ln x^{-2}} \cdot e^C \\ z &= Cx^{-2} \\ z &= \frac{C}{x^2}. \end{aligned}$$

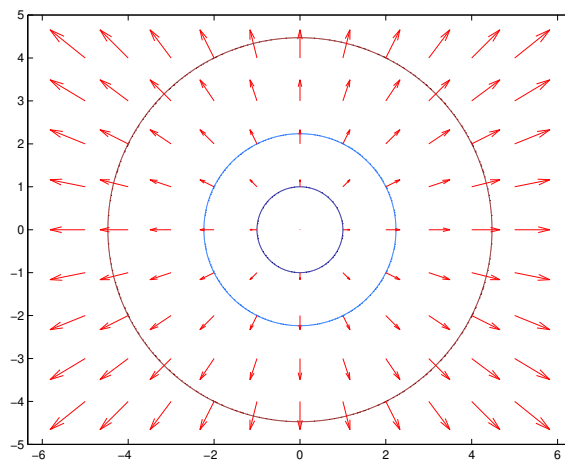


Figur 2.5: Konturlinjene  $C = -25, -10, -1, 0, 1, 10, 25$  til vektorfeltet  $\mathbf{v} = 2kxi - 4kzk$  der  $k = 1$ .

- b) Det er tre måter strømmen kan være aksesymmetrisk på: om  $x$ -aksen, om  $y$ -aksen eller om  $z$ -aksen. Strømstyrken i  $xy$ -planet er gitt ved:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{4k^2x^2 + 4k^2y^2} = 2k\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Vi har samme strømstyrke på sirkler med sentrum i origo. Retningen er gitt ved  $\mathbf{v} = 2k(xi + yj) = 2k\mathbf{r}$ . Vi har altså symmetri om  $z$ -aksen.



Figur 2.6: Vektorfeltet  $\mathbf{v} = 2kxi + 2kyj$  er symmetrisk om  $z$ -aksen.



## Kapittel 3

# Bruk av Matlab

### Oppgave 1

a) `>> sum(diag(A)) + sum(diag(B)) + sum(diag(C))`

eller:

```
>> sum(diag(A) + diag(B) + diag(C))
```

eller:

```
>> sum(diag(A + B + C))
```

b) `>> sum(A(1,:)) + sum(A(2,:))`

eller:

```
>> sum(sum(A(1:2,:)))
```

c) `>> v = linspace(-4*pi,4*pi,17)`

d) `>> D = 3*eye(8) + diag(2*ones(7, 1), -1) + diag(2*ones(7, 1), 1) +  
diag(ones(6, 1), -2) + diag(ones(6, 1), 2)`

### Oppgave 2

```
a) function n=lengde(x, y, z)
    % Returnerer lengden til en vektor
    % med komponenter {x,y,z}

    if nargin < 3
        error('lengde tar 3 innparametre!')
    end

    n = sqrt(x^2 + y^2 + z^2);
end
```

```

b) function n=lengde2(v)
% Returnerer lengden til en vektor v
% med vilkårlig dimensjon

n = sqrt(sum(v.^2));
end

```

### Oppgave 3

```

a) x = linspace(-2*pi,2*pi,401);
y = 4*sin(2*x);
plot(x, y)

b) x = linspace(-10,2,12001);
y = x.^2.*exp(.5*x);
plot(x, y)

c) t = linspace(0,8*pi,401);
x = t.*cos(t);
y = t.*sin(t);
plot(x, y)

d) t = linspace(-pi,pi,63);
[x,y] = meshgrid(t);
z = sin(x).*sin(y);
surf(x, y, z)

e) t = linspace(1,5,401);
[x,y] = meshgrid(t);
z = log(x.*y)./(x.^2 + y.^2);
[C,h] = contour(x, y, z);
clabel(C, h)

f) [x,y] = meshgrid(-5:1:5);
u = x./(x.^2 + y.^2);
v = y./(x.^2 + y.^2);
figure(1)
quiver(x, y, u, v)
figure(2)
quiver(x, y, u, -v)
figure(3)
quiver(x, y, v, u)
figure(4)
quiver(x, y, v, -u)

```

### Oppgave 4

```

a) [x,y] = meshgrid(linspace(0,2,21), linspace(-2,2,41));
h = 1000 + 50*x.^2.*y.^2.*exp(1 - x.^2);
surf(x, y, h, 'FaceColor', [.36 .67 .93])

```

---

```

axis square
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('h')

b) [x,y] = meshgrid(linspace(0,2,21), linspace(-2,2,41));
h = 1000 + 50*x.^2.*y.^2.*exp(1 - x.^2);

% La Matlab velge høydenivåer:
%[C,h] = contour(x, y, h);

% Plot et gitt antall høydenivåer:
%[C,h] = contour(x, y, h, 20);

% Plot bare noen utvalgte høydenivåer:
v = 1001:10:1091;
[C,h] = contour(x, y, h, v);

clabel(C, h)
colorbar
axis square

c) [x,y] = meshgrid(linspace(0,2,21), linspace(-2,2,41));
h = 1000 + 50*x.^2.*y.^2.*exp(1 - x.^2);

v = 1001:10:1091;
contour(x, y, h, v);
colorbar
axis square

[x,y] = meshgrid(linspace(0,2,11), linspace(-2,2,21));
h = 1000 + 50*x.^2.*y.^2.*exp(1 - x.^2);
[dhx,dhy] = gradient(h, 0.2); % avstand mellom gridpunktene er 0.2
hold on
quiver(x, y, dhx, dhy, 0.5)
hold off

```

## Oppgave 5

```

a) function f=fakultet(n)
% f=fakultet(n) returnerer n!

f = prod(1:n);
end

b) function f=funk(x, n)
% f=funk(x, n) returnerer den n'te deriverte til cos(x)

if mod(n, 4) == 0,
    f = cos(x);

```

```

elseif mod(n, 4) == 1,
    f = - sin(x);
elseif mod(n, 4) == 2,
    f = -cos(x);
elseif mod(n, 4) == 3,
    f = sin(x);
end
end

```

eller:

```

function f=funk(x, n)
% f=funk(x, n) returnerer den n'te deriverte til cos(x)

f = cos(x + n*pi/2);
end

```

c) function f=taylor1D(x, x0, n)

```

f = funk(x0, 0);
for i=1:n,
    f = f + (1/fakultet(i))*funk(x0, i)*(x - x0)^i;
end
end

```

d) N = 51;  
x = linspace(-pi/2,3\*pi/2,N);  
y = cos(x);  
plot(x, y, 'r');  
axis equal  
hold on

```

x0 = pi/2;
y1 = []; y2 = []; y3 = []; y4 = [];

```

```

for i=1:N,
    y1(i) = taylor1D(x(i), x0, 1);
    y2(i) = taylor1D(x(i), x0, 3);
    y3(i) = taylor1D(x(i), x0, 5);
    y4(i) = taylor1D(x(i), x0, 7);
end

```

```

plot(x, y1, 'b');
plot(x, y2, 'g');
plot(x, y3, 'c');
plot(x, y4, 'm');
hold off

```

## Kapittel 4

# Vektorfluks og sirkulasjon, divergens, virvling, strømfunksjonen

### Oppgave 1

Gitt et vektorfelt

$$\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}.$$

Divergensen til  $\mathbf{v}$  er definert som

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

og virvlingen er gitt ved determinanten

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}.$$

a)  $\mathbf{v} = xy^2z^3\mathbf{i} + xy^2z^3\mathbf{j} + xy^2z^3\mathbf{k}.$

Divergens:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = y^2z^3 + 2xyz^3 + 3xy^2z^2.$$

Virvling:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z^3 & xy^2z^3 & xy^2z^3 \end{vmatrix} \\ &= (2xyz^3 - 3xy^2z^2)\mathbf{i} - (y^2z^3 - 3xy^2z^2)\mathbf{j} + (y^2z^3 - 2xyz^3)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

b)  $\mathbf{v} = e^{yz}\mathbf{i} + e^{xz}\mathbf{j} + e^{xy}\mathbf{k}.$

Divergens:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Virvling:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{yz} & e^{xz} & e^{xy} \end{vmatrix} \\ &= (xe^{xy} - xe^{xz})\mathbf{i} - (ye^{xy} - ye^{yz})\mathbf{j} + (ze^{xz} - ze^{yz})\mathbf{k}.\end{aligned}$$

c)  $\mathbf{v} = e^{x^2}\mathbf{i} + \sin(xy)\mathbf{j} - \cos(z^2)\mathbf{k}.$

Divergens:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 2xe^{x^2} + x \cos(xy) + 2z \sin(z^2).$$

Virvling:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{x^2} & \sin(xy) & \cos(z^2) \end{vmatrix} \\ &= y \cos(xy)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

d)  $\mathbf{v} = (x + y + z)^2\mathbf{i} + \frac{xy}{z}\mathbf{k}.$

Divergens:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 2(x + y + z) - \frac{xy}{z^2}.$$

Virvling:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x + y + z)^2 & 0 & \frac{xy}{z} \end{vmatrix} \\ &= \frac{x}{z}\mathbf{i} - \left(\frac{y}{z} - 2(x + y + z)\right)\mathbf{j} - 2(x + y + z)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

## Oppgave 2

a)  $\mathbf{v} = u(z)\mathbf{i}, \quad u(z) = \frac{U_0 z^2}{h^2}, \quad 0 \leq z \leq h, \quad U_0 = \text{konstant}, \quad h = \text{konstant}.$

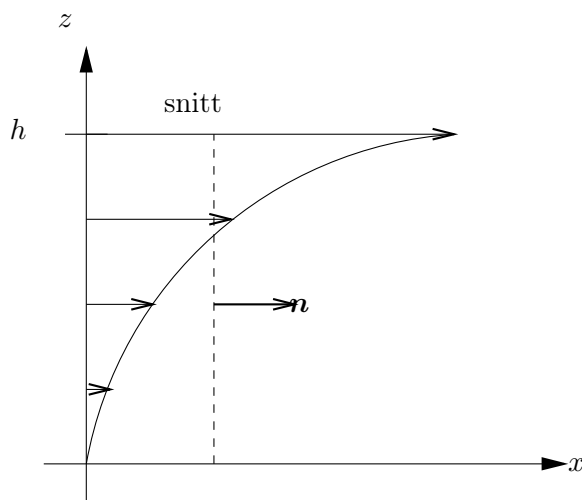
Vi antar at problemet er to-dimensjonalt i  $xz$ -planet.

Divergens:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Virvling:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ u(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{j} = \frac{2U_0 z}{h^2}\mathbf{j}.$$



Figur 4.1: Vindprofil til  $\mathbf{v} = \frac{U_0 z^2}{h^2} \mathbf{i}$ .

Strømfunksjonen  $\psi(x, z)$  finner vi ved å løse likningssystemet

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -u \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = w. \quad (4.2)$$

Fra (4.2) får vi

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \Rightarrow \psi = \psi(z).$$

Vi setter inn for  $u$  i (4.1) og integrerer:

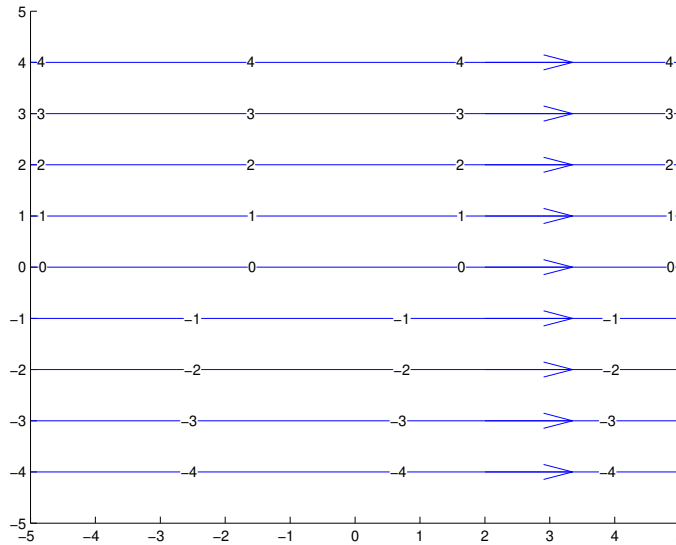
$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial z} &= -\frac{U_0 z^2}{h^2} \\ \Rightarrow \psi(z) &= -\frac{1}{3} \frac{U_0}{h^2} z^3 + C. \end{aligned}$$

Siden  $\psi$  her er en funksjon av bare  $z$  får vi en integrasjonskonstant  $C$  i stedet for en funksjon  $f(x)$ . Strømlinjene finner vi ved å sette  $\psi = \psi_0 = \text{konstant}$ :

$$\begin{aligned} z^3 &= \frac{-3h^2(\psi_0 - C)}{U_0} \\ &= C^3 \quad (\text{Brøken er konstant}) \\ \Rightarrow z &= C. \end{aligned}$$

Dette gir rette horisontale linjer (se figur 4.2). Volumstrømmen er gitt ved

$$Q = \int_{\sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$



Figur 4.2: Strømlinjene til  $\mathbf{v} = u(z)\mathbf{i}$  er rette horisontale linjer.

der  $\mathbf{n} = \mathbf{i}$  er en normalvektor til snittet (se figur 4.1).  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = u(z)$  slik at vi får

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^h u(z) dz \\ &= \frac{U_0}{h^2} \int_0^h z^2 dz \\ &= \frac{1}{3} U_0 h. \end{aligned}$$

Vi skal til slutt vise at volumstrømmen er lik differansen i strømfunksjonens verdi mellom bakken og  $z = h$ :

$$\begin{aligned} Q &= \psi(z=0) - \psi(z=h) \\ &= C + \frac{1}{3} \frac{U_0}{h^2} h^3 - C \\ &= \frac{1}{3} U_0 h. \end{aligned}$$

b)  $\mathbf{v} = u(z)\mathbf{i}$ ,  $u(z) = U_0 \ln\left(\frac{z+h}{h}\right)$ ,  $0 \leq z \leq h$ ,  $U_0 = \text{konstant}$ ,  $h = \text{konstant}$ .

Vi antar at problemet er to-dimensjonalt i  $xz$ -planet.

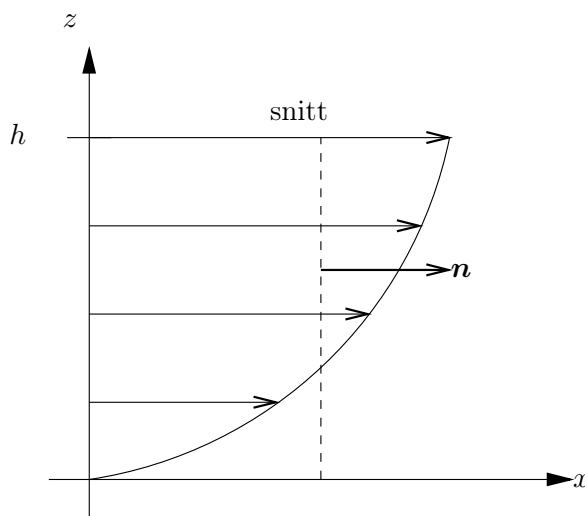
Divergens:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Virvling:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ u(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{j} = \frac{U_0}{z+h} \mathbf{j}.$$





Figur 4.3: Vindprofilen til  $\mathbf{v} = U_0 \ln \left( \frac{z+h}{h} \right) \mathbf{i}$ .

Strømfunksjonen  $\psi(x, z)$  finner vi ved å løse likningssystemet

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -u \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = w. \quad (4.4)$$

Fra (4.4) får vi

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi = \psi(z).$$

Vi setter inn for  $u$  i (4.3) og integrerer:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial z} &= -U_0 \ln \left( \frac{z+h}{h} \right) \\ \Rightarrow \psi(z) &= -U_0 \int \ln u \, dz \end{aligned}$$

der

$$u = \frac{z+h}{h}, \quad \frac{du}{dz} = \frac{1}{h}, \quad dz = h \, du.$$

Videre blir strømfunksjonen

$$\begin{aligned} \psi(z) &= -U_0 h \int \ln u \, du \\ &= -U_0 h \left[ u \ln u - \int \frac{u}{u} \, du \right] + C \\ &= -U_0 h \left[ u (\ln u - 1) \right] + C \\ &= -U_0 (z+h) \left[ \ln \left( \frac{z+h}{h} \right) - 1 \right] + C. \end{aligned}$$

Vi har her brukt substitusjon og delvis integrasjon til å løse integralet. Siden  $\psi$  her er en funksjon av bare  $z$  får vi en integrasjonskonstant  $C$  i stedet for en funksjon  $f(x)$ . Strømlinjene finner vi ved å sette  $\psi = \psi_0 = \text{konstant}$ . Siden  $\psi = \psi_0$  inneholder kun en variabel,  $z$ , og resten konstanter, får vi at  $z = \text{konstant}$  som gir rette horisontale linjer som i oppgave a (se figur 4.2).

Volumstrømmen er gitt ved

$$Q = \int_{\sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

der  $\mathbf{n} = \mathbf{i}$  er en normalvektor til snittet (se figur 4.3).  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = u(z)$  slik at vi får

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^h u(z) dz \\ &= U_0 \int_0^h \ln\left(\frac{z+h}{h}\right) dz \\ &= \left[ U_0(z+h) \left[ \ln\left(\frac{z+h}{h}\right) - 1 \right] \right]_0^h \\ &= 2U_0h(\ln 2 - 1) - U_0h(\ln 1 - 1) \\ &= U_0h(2\ln 2 - 1). \end{aligned}$$

Vi skal til slutt vise at volumstrømmen er lik differansen i strømfunksjonens verdi mellom bakken og  $z = h$ :

$$\begin{aligned} Q &= \psi(z=0) - \psi(z=h) \\ &= -U_0h \left[ \ln\left(\frac{h}{h}\right) - 1 \right] + C + U_02h \left[ \ln\left(\frac{2h}{h}\right) - 1 \right] - C \\ &= U_0h + 2U_0h(\ln 2 - 1) \\ &= U_0h(2\ln 2 - 1). \end{aligned}$$

### Oppgave 3

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= ax^2\mathbf{i} + v(x,y)\mathbf{j} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 2ax + \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

Skal feltet være divergensfritt må

$$\begin{aligned} 2ax + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -2ax. \end{aligned}$$

Vi integrerer med hensyn på  $y$ :

$$v(x,y) = -2axy + f(x).$$

Feltet er nå divergensfritt for et hvert valg av  $f(x)$ . Videre i oppgaven skal vi begrense oss til tilfellet  $v(0,0) = 0$ , da må vi velge  $f(x) = 0$ , slik at

$$\mathbf{v} = ax^2\mathbf{i} - 2axy\mathbf{j}.$$

Strømfunksjonen  $\psi(x, y)$  kan vi finne fra likningene

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = -u \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = v. \quad (4.6)$$

Dette gir

$$(4.5): \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = -ax^2 \Rightarrow \psi(x, y) = -ax^2y + f_1(x)$$

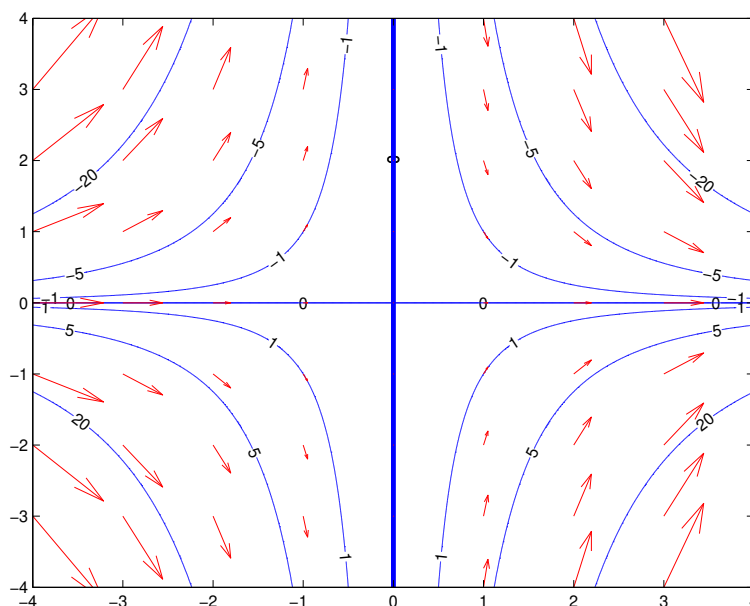
$$(4.6): \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -2axy \Rightarrow \psi(x, y) = -ax^2y + f_2(y).$$

For å få en mulig  $\psi$  må vi velge  $f_1(x) = f_2(y) = C$ , og strømfunksjonen blir

$$\psi(x, y) = -ax^2y + C.$$

Strømlinjene finner vi ved å sette  $\psi = \psi_0$ :

$$y = \frac{C - \psi_0}{ax^2} = \frac{C}{x^2}.$$



Figur 4.4: Vektorfeltet  $\mathbf{v} = ax^2\mathbf{i} - 2axy\mathbf{j}$  med strømlinjer for  $a = 1$ . Strømlijen som går gjennom origo og langs  $y$ -aksen er markert med litt tykkere linje for å understreke at her er hastighetsfeltet lik null  $\mathbf{v}(0, y) = 0$ .

## Oppgave 4

Vi skal finne volumstrømmen til vektorfeltet

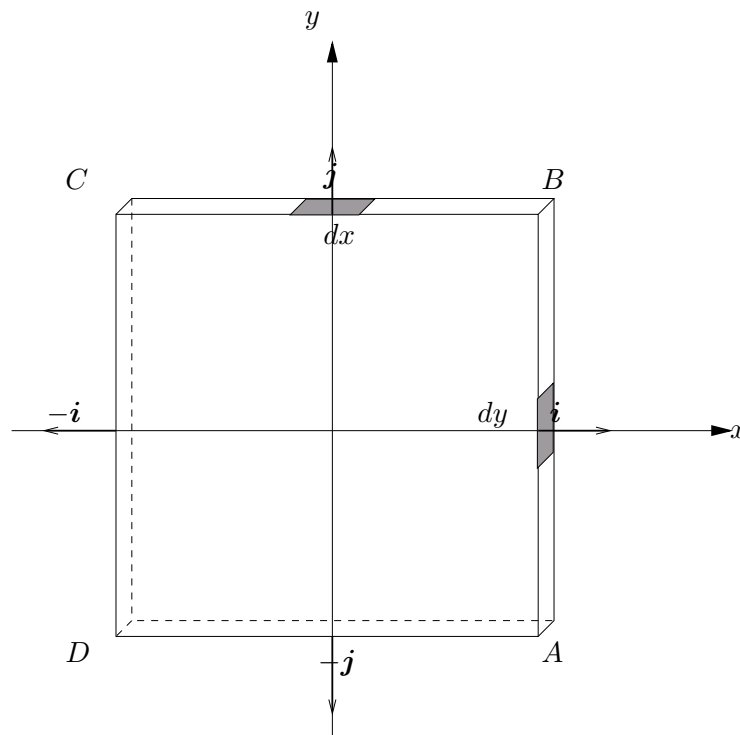
$$\mathbf{v} = 3x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

gjennom et rektangel med sentrum i origo og sidekanter  $\Delta x$  og  $\Delta y$  (se figur 4.5). Volumstrømmen er definert som

$$\Delta Q = \int_{\sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

der  $\sigma$  er den samlede overflaten til sidekantene og  $d\sigma$  er et lite flatelement med normalvektor  $\mathbf{n}$ . Vi deler opp rektangelet i fire deler:

$$\Delta Q = \int_{AB} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{BC} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{CD} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{DA} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$



Figur 4.5: Et rektangel med sidekanter  $\Delta x$  og  $\Delta y$ . Vi antar at tykkelsen er lik en.

AB:  $\mathbf{n} = \mathbf{i}$ ,  $x = \Delta x/2$ ,  $d\sigma = dy \cdot 1$ :

$$\int_{AB} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} 3x dy = \frac{3\Delta x}{2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} dy = \frac{3}{2} \Delta x \Delta y.$$

BC:  $\mathbf{n} = \mathbf{j}$ ,  $y = \Delta y/2$ ,  $d\sigma = dx \cdot 1$ :

$$\int_{BC} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} y dx = \frac{\Delta y}{2} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} dx = \frac{1}{2} \Delta x \Delta y.$$

CD:  $\mathbf{n} = -\mathbf{i}$ ,  $x = -\Delta x/2$ ,  $d\sigma = dy \cdot 1$ :

$$\int_{CD} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} -3x dy = \frac{3\Delta x}{2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} dy = \frac{3}{2} \Delta x \Delta y.$$

DA:  $\mathbf{n} = -\mathbf{j}$ ,  $y = -\Delta y/2$ ,  $d\sigma = dx \cdot 1$ :

$$\int_{DA} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} -y dx = \frac{\Delta y}{2} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} dx = \frac{1}{2} \Delta x \Delta y.$$

Legger vi sammen disse leddene får vi

$$\Delta Q = 4\Delta x \Delta y.$$

Volumstrømmen per arealenhet blir

$$Q = \frac{\Delta Q}{\Delta x \Delta y} = 4.$$

Vi kontrollerer ved å beregne divergensen:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 3 + 1 = 4.$$

For at en strømfunksjon skal kunne eksistere må vi ha et to-dimensjonalt divergensfritt felt. Divergensen er her 4, altså eksisterer det ikke noen strømfunksjon for dette feltet, men vi kan alltid finne strømlinjene ved

$$u dy = v dx$$

$$3x dy = y dx$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{3x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{3x}$$

$$\ln |y| = \frac{1}{3} \ln |x| + A$$

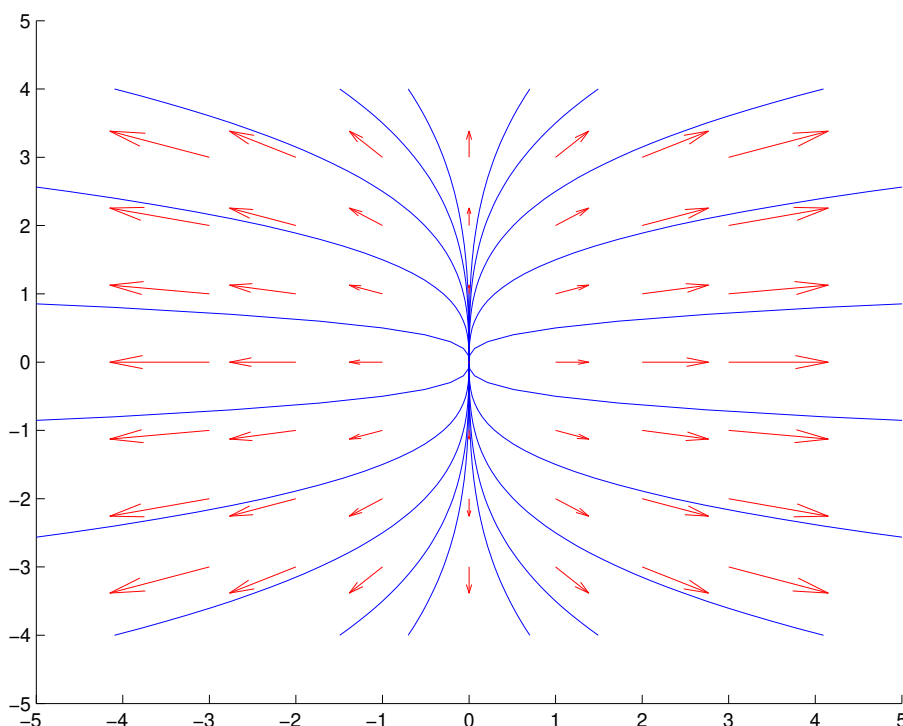
$$e^{\ln |y|} = e^{\frac{1}{3} \ln |x| + A}$$

$$e^{\ln |y|} = e^{\ln |x|^{\frac{1}{3}}} \cdot e^A$$

$$y = Cx^{\frac{1}{3}}.$$

## Oppgave 5

Vi har gitt det to-dimensjonale vektorfeltet  $\mathbf{v} = ax\mathbf{i}$ , der  $a$  er en konstant.

Figur 4.6: Strømlinjene til feltet  $\mathbf{v} = 3x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ .

a) Divergens:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = a.$$

b) Vi skal beregne volumstrømmen,  $\Delta Q = \int_{\sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ , gjennom det samme rektangelet som i oppgave 4 (se figur 4.5). Vi deler også her opp integralet i fire deler:

AB:  $\mathbf{n} = \mathbf{i}$ ,  $x = \Delta x/2$ ,  $d\sigma = dy \cdot 1$ :

$$\int_{AB} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} ax dy = \frac{a\Delta x}{2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} dy = \frac{a}{2} \Delta x \Delta y.$$

BC:  $\mathbf{n} = \mathbf{j}$ ,  $y = \Delta y/2$ ,  $d\sigma = dx \cdot 1$ :

$$\int_{BC} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{j} dx = 0.$$

CD:  $\mathbf{n} = -\mathbf{i}$ ,  $x = -\Delta x/2$ ,  $d\sigma = dy \cdot 1$ :

$$\int_{CD} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} -ax dy = \frac{a\Delta x}{2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} dy = \frac{a}{2} \Delta x \Delta y.$$

DA:  $\mathbf{n} = -\mathbf{j}$ ,  $y = -\Delta y/2$ ,  $d\sigma = dx \cdot 1$ :

$$\int_{DA} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \mathbf{v} \cdot (-\mathbf{j}) dx = 0.$$

Volumstrømmen blir

$$\Delta Q = a\Delta x\Delta y.$$

c) Sammenlikner vi resultatene fra oppgave a og b får vi

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\Delta Q}{\Delta x\Delta y}.$$

Divergensen er altså lik volumstrømmen per arealenhet.

## Oppgave 6

Et to-dimensjonalt strømfelt i  $xy$ -planet er gitt ved  $\mathbf{v} = -ay\mathbf{i} + ax\mathbf{j}$ , der  $a$  er en konstant.

a) Virvlingen:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ -ay & ax & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0 - 0) - \mathbf{j}(0 - 0) + \mathbf{k}(a + a) = 2a\mathbf{k}.$$

b) Sirkulasjonen til  $\mathbf{v}$  langs den lukkede kurven  $\lambda$  er definert ved

$$\Delta C = \oint_{\lambda} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

der  $d\mathbf{r}$  er et lite buelement. Vi deler linjeintegralet inn i fire deler (se figur 4.7):

$$\Delta C = \int_{AB} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \int_{BC} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \int_{CD} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \int_{DA} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$

AB:  $d\mathbf{r} = \mathbf{j} dy$ ,  $x = \Delta x/2$ :

$$\int_{AB} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} (-ay\mathbf{i} + ax\mathbf{j}) \cdot \mathbf{j} dy = \frac{a}{2}\Delta x \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} dy = \frac{a}{2}\Delta x\Delta y.$$

BC:  $d\mathbf{r} = -\mathbf{i} dx$ ,  $y = \Delta y/2$ :

$$\int_{BC} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} (-ay\mathbf{i} + ax\mathbf{j}) \cdot (-\mathbf{i}) dx = \frac{a}{2}\Delta y \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} dx = \frac{a}{2}\Delta x\Delta y.$$

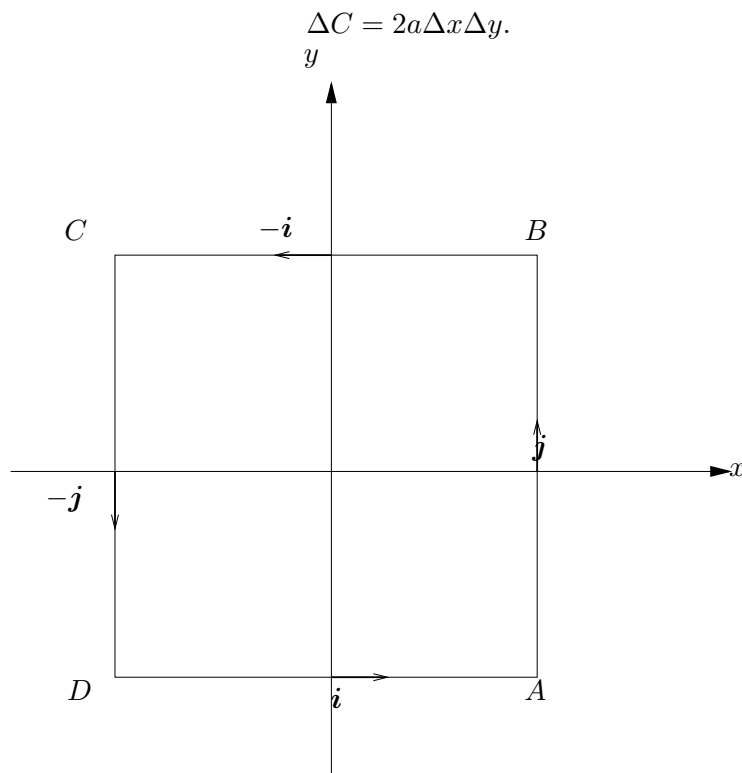
CD:  $d\mathbf{r} = -\mathbf{j} dy$ ,  $x = -\Delta x/2$ :

$$\int_{CD} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} (-ay\mathbf{i} + ax\mathbf{j}) \cdot (-\mathbf{j}) dy = \frac{a}{2}\Delta x \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} dy = \frac{a}{2}\Delta x\Delta y.$$

DA:  $d\mathbf{r} = \mathbf{i} dx$ ,  $y = -\Delta y/2$ :

$$\int_{DA} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} (-ay\mathbf{i} + ax\mathbf{j}) \cdot \mathbf{i} dx = \frac{a}{2}\Delta y \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} dx = \frac{a}{2}\Delta x\Delta y.$$

Sammen gir disse leddene sirkulasjonen:



Figur 4.7: Et rektangel med sidekanter  $\Delta x$  og  $\Delta y$ .

c) Sammenhengen mellom sirkulasjonen og virvlingen:

$$|\nabla \times \mathbf{v}| = \frac{\Delta C}{\Delta x \Delta y}.$$

Virvlingens størrelse er altså lik sirkulasjonen per arealenheter.

## Oppgave 7

Vi har gitt et to-dimensjonalt strømfelt i  $xy$ -planet:  $\mathbf{v} = xy\mathbf{i} + v_y(x, y)\mathbf{j}$ .

a) For at feltet skal være divergensfritt må vi kreve  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = y + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v_y}{\partial y} = -y$$

$$\Rightarrow v_y(x, y) = -\frac{1}{2}y^2 + f_1(x).$$



Hvis feltet skal være virvelfritt må  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ :

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ xy & v_y(x, y) & 0 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - x \right) \mathbf{k} \\ \Rightarrow \frac{\partial v_y}{\partial x} &= x \\ \Rightarrow v_y(x, y) &= \frac{1}{2}x^2 + f_2(y).\end{aligned}$$

For å få en mulig  $v_y(x, y)$  må vi velge  $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$  og  $f_2(y) = -\frac{1}{2}y^2 + C$  hvor  $C$  er en vilkårlig konstant, slik at

$$\begin{aligned}v_y(x, y) &= \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + C \\ \mathbf{v} &= xy\mathbf{i} + \left( \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + C \right) \mathbf{j}.\end{aligned}$$

b) Strømfunksjonen  $\psi(x, y)$  er gitt ved likningene

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial y} &= -xy \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= v_y = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + C.\end{aligned}$$

Integrasjon av likningene med hensyn på henholdsvis  $y$  og  $x$  gir

$$\begin{aligned}\psi(x, y) &= -\frac{1}{2}xy^2 + f_1(x) \\ \psi(x, y) &= \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}xy^2 + Cx + f_2(y).\end{aligned}$$

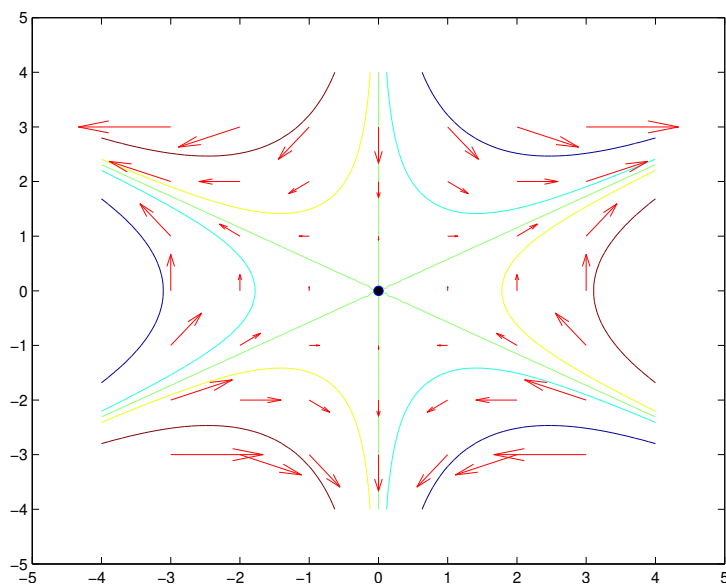
En mulig løsning krever at vi velger  $f_1(x) = \frac{1}{6}x^3 + Cx + D$  og  $f_2(y) = D$  hvor  $D$  er en vilkårlig konstant. Strømfunksjonen blir da

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{6}x^3 + Cx + D.$$

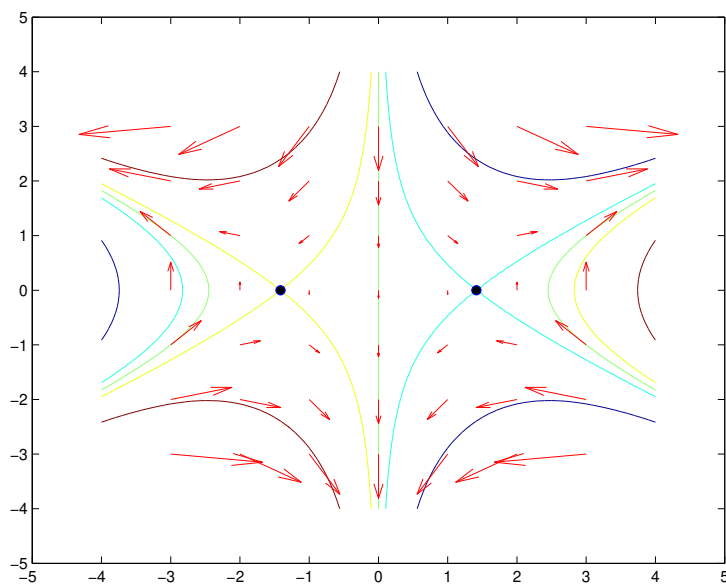
Strømlinjene finner vi ved å sette  $\psi = \psi_0 = \text{konstant}$ . For eksempel, for  $\psi_0 = D$  og  $C = 0$  får vi de tre rette linjene

$$x = 0, \quad y = \pm \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

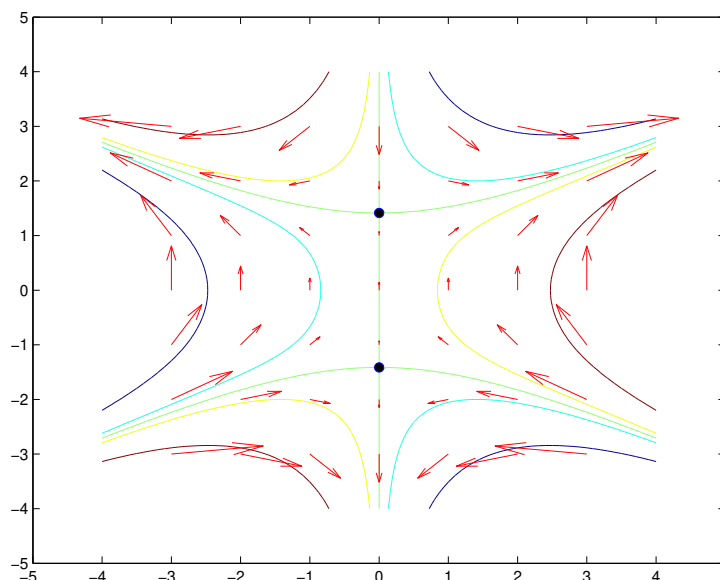
Det er interessant å finne stagnasjonspunktene til vektorfeltet, der hvor  $\mathbf{v} = 0$ . Vi må skille mellom tre kvalitativt forskjellige tilfeller:  $C < 0$  gir to stagnasjonspunkt langs  $x$ -aksen,  $C = 0$  gir ett stagnasjonspunkt i origo, og  $C > 0$  gir to stagnasjonspunkt langs  $y$ -aksen.



Figur 4.8: Strømlinjene til feltet  $\mathbf{v} = xy\mathbf{i} + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\mathbf{j}$ . Stagnasjonspunktet er vist med et kulepunkt.



Figur 4.9: Strømlinjene til feltet  $\mathbf{v} = xy\mathbf{i} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - 1\right)\mathbf{j}$ . Stagnasjonspunktene er vist med to kulepunkt.



Figur 4.10: Strømlinjene til feltet  $\mathbf{v} = xy\mathbf{i} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + 1\right)\mathbf{j}$ . Stagnasjonspunktene er vist med to kulepunkt.

## Oppgave 8

For et vilkårlig skalarfelt  $\beta = \beta(x, y, z)$  har vi

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\mathbf{k}$$

og

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla\beta &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{\partial\beta}{\partial y} & \frac{\partial\beta}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\beta}{\partial y}\right) - \mathbf{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\beta}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial x}\right) \\ &= \mathbf{i}\left(\frac{\partial^2\beta}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2\beta}{\partial y\partial z}\right) - \mathbf{j}\left(\frac{\partial^2\beta}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\beta}{\partial x\partial z}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial^2\beta}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2\beta}{\partial x\partial y}\right). \end{aligned}$$

For partielt deriverte gjelder det generelt at

$$\frac{\partial^2\beta}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\beta}{\partial y\partial x}, \quad \frac{\partial^2\beta}{\partial x\partial z} = \frac{\partial^2\beta}{\partial z\partial x}, \quad \frac{\partial^2\beta}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2\beta}{\partial z\partial y}$$

slik at

$$\nabla \times \nabla\beta = 0.$$

## Oppgave 9

a) Stagnasjonsstrøm:

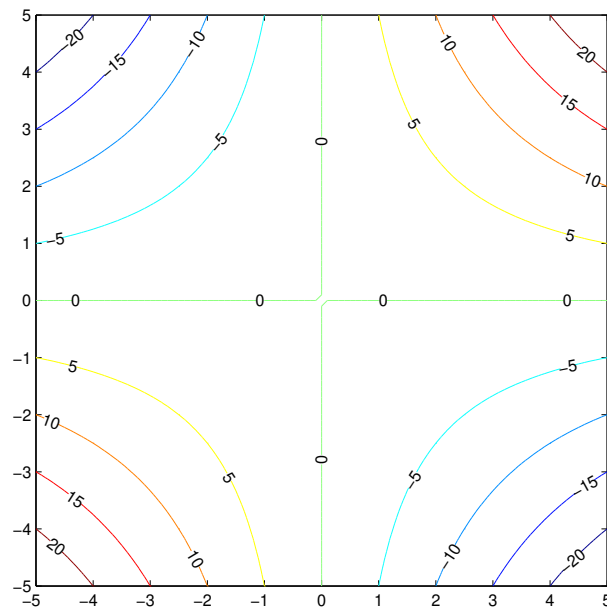
```
[x,y] = meshgrid(-5:.1:5);
psi = x.*y;
[C,h] = contour(x, y, psi);
clabel(C, h)
axis square
```

b) Punktvirvelfelt:

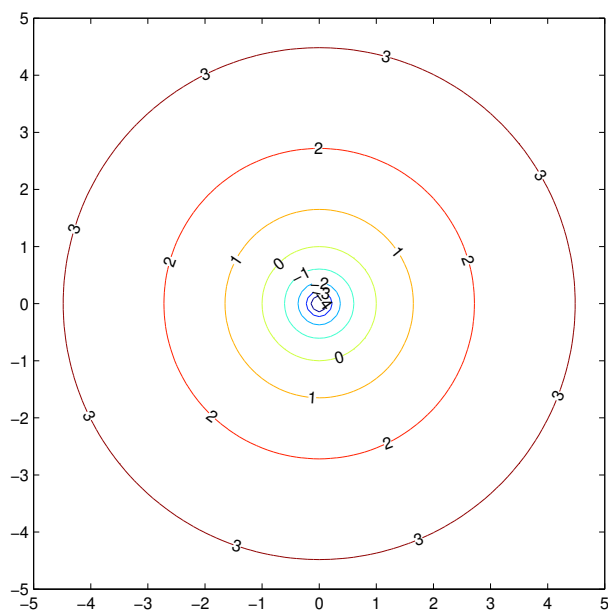
```
[x,y] = meshgrid(-5:.1:5);
psi = 2*log(sqrt(x.^2 + y.^2));
[C,h] = contour(x, y, psi);
clabel(C, h)
axis square
```

c) Dipolfelt:

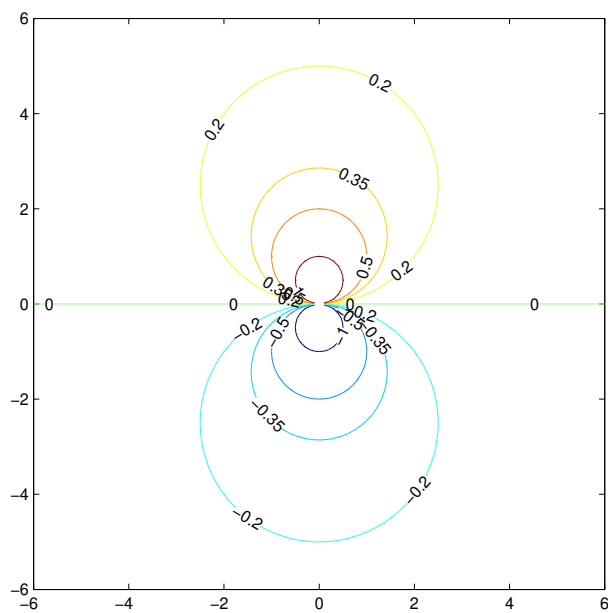
```
[x,y] = meshgrid(-6:.1:6);
psi = y./(x.^2 + y.^2);
[C,h] = contour(x, y, psi, [-1 -.5 -.35 -.2 0 .2 .35 .5 1]);
clabel(C, h)
axis square
```



Figur 4.11: Stagnasjonsstrøm  $\psi(x, y) = xy$ .



Figur 4.12: Punktvirvelfeltet  $\psi(x, y) = 2 \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ .



Figur 4.13: Dipolfeltet  $\psi(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$ .



## Kapittel 6

# Kurve-, flate- og volumintegraler, beregning av arbeid og trykkraft

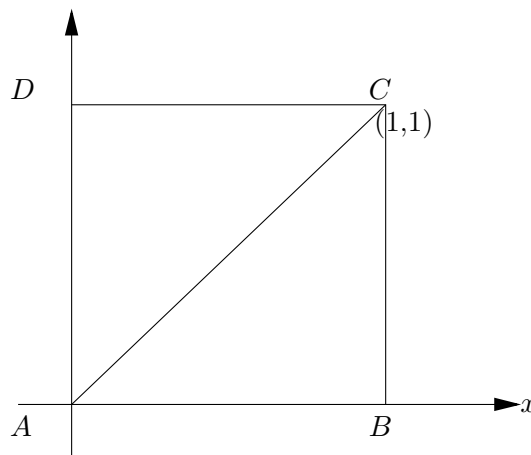
### Oppgave 1

Vi skal regne ut kurveintegralet  $\int_{\lambda} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$  langs kurven  $\lambda: y = x^3$  når  $-1 \leq x \leq 2$  og  $\mathbf{v} = xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ . Vi kan parametrisere med  $x$  som parameter,  $\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = x\mathbf{i} + x^3\mathbf{j}$ , hvor  $-1 \leq x \leq 2$ . Da får vi  $d\mathbf{r} = (\mathbf{i} + 3x^2\mathbf{j}) dx$ . Når parametriseringen settes inn i uttrykket for  $\mathbf{v}$  får vi  $\mathbf{v} = x^4\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ . Vi setter dette inn i integralet:

$$\int_{\lambda} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-1}^2 (x^4 + 3x^4) dx = \frac{132}{5}.$$

### Oppgave 2

Et kraftfelt er gitt ved  $\mathbf{F} = (y^2 + 5)\mathbf{i} + (2xy - 8)\mathbf{j}$ .



Figur 6.1: Et kvadrat  $ABCD$  i  $xy$ -planet.

$ABC$ :

$$W = \int_{ABC} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{BC} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

AB: Parametrisering  $\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i}$  for  $0 \leq x \leq 1$ , da er  $d\mathbf{r} = \mathbf{i}dx$  og  $y = 0$ :

$$\int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 5 dx = 5.$$

BC: Parametrisering  $\mathbf{r}(y) = \mathbf{i} + y\mathbf{j}$  for  $0 \leq y \leq 1$ , da er  $d\mathbf{r} = \mathbf{j}dy$  og  $x = 1$ :

$$\int_{BC} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (2y - 8) dy = -7.$$

Arbeidet blir  $W = 5 - 7 = -2$ .

ADC:

$$W = \int_{ADC} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{AD} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{DC} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

AD: Parametrisering  $\mathbf{r}(y) = y\mathbf{j}$  for  $0 \leq y \leq 1$ , da er  $d\mathbf{r} = \mathbf{j}dy$  og  $x = 0$ :

$$\int_{AD} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_0^1 8 dy = -8.$$

DC: Parametrisering  $\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + \mathbf{j}$  for  $0 \leq x \leq 1$ , da er  $d\mathbf{r} = \mathbf{i}dx$  og  $y = 1$ :

$$\int_{DC} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 6 dx = 6.$$

Arbeidet blir  $W = -8 + 6 = -2$ .

AC: Parametrisering  $\mathbf{r}(s) = s(\mathbf{i} + \mathbf{j})$  for  $0 \leq s \leq 1$ , da er  $d\mathbf{r} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})ds$ :

$$W = \int_{AC} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (s^2 + 5) + (2s^2 - 8) ds = \int_0^1 3s^2 - 3 ds = -2.$$

Skal kraften kunne skrives som gradienten til et potensial  $V = V(x, y)$  må vi ha  $\mathbf{F} = -\nabla V$  som gir vektorlikningen

$$(y^2 + 5)\mathbf{i} + (2xy - 8)\mathbf{j} = -\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -y^2 - 5 \quad \Rightarrow \quad V(x, y) = -xy^2 - 5x + f_1(y)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -2xy + 8 \quad \Rightarrow \quad V(x, y) = -xy^2 + 8y + f_2(x).$$

For å få en entydig løsning må vi velge  $f_1(y) = 8y + C$  og  $f_2(x) = -5x + C$ . slik at

$$V(x, y) = -xy^2 - 5x + 8y + C.$$

Vi kan nå regne ut arbeidet ved hjelp av potensialet:

$$W = - \int_{AC} \nabla V \cdot d\mathbf{r} = - \int_{AC} dV = V(0, 0) - V(1, 1).$$



- Punktet  $C$ :  $V(1, 1) = -1 - 5 + 8 + C = 2 + C$ .
- Punktet  $A$ :  $V(0, 0) = C$ .

$$W = V(0, 0) - V(1, 1) = C - 2 - C = -2.$$

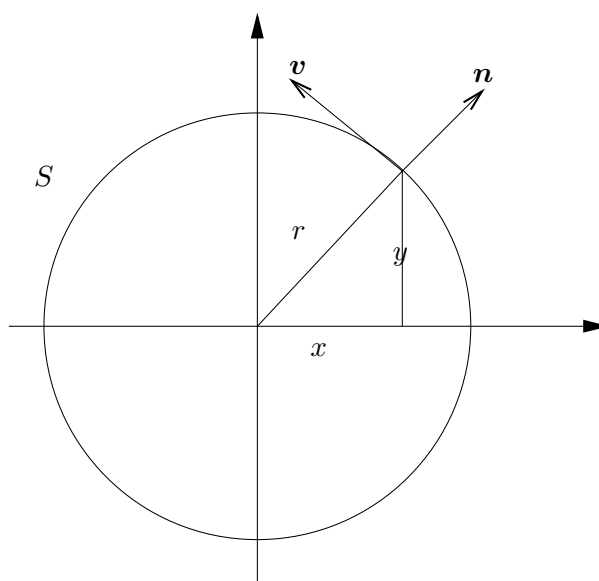
### Oppgave 3

En sirkel  $S$  i  $xy$ -planet er gitt ved  $x^2 + y^2 = r^2$ . Sirkelen kan betraktes som en ekviskalarkurve til funksjonen  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , en normalvektor til kurven kan skrives som  $\nabla f(x, y) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$  (se figur 6.2). For at normalvektoren skal få lengde lik én må vi normalisere:

$$\mathbf{n} = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = \frac{x}{r}\mathbf{i} + \frac{y}{r}\mathbf{j}.$$

Vi har nå gitt vektorfeltet

$$\mathbf{v} = -\frac{Ay}{r^2}\mathbf{i} + \frac{Ax}{r^2}\mathbf{j}, \quad A > 0.$$



Figur 6.2: En sirkel  $S$  i  $xy$ -planet.

- a) Strømhastigheten er tangensial til sirkelen hvis  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -\frac{Ay}{r^2} \frac{x}{r} + \frac{Ax}{r^2} \frac{y}{r} = -\frac{Axy}{r^3} + \frac{Axy}{r^3} = 0.$$

Strømhastighetens størrelse:

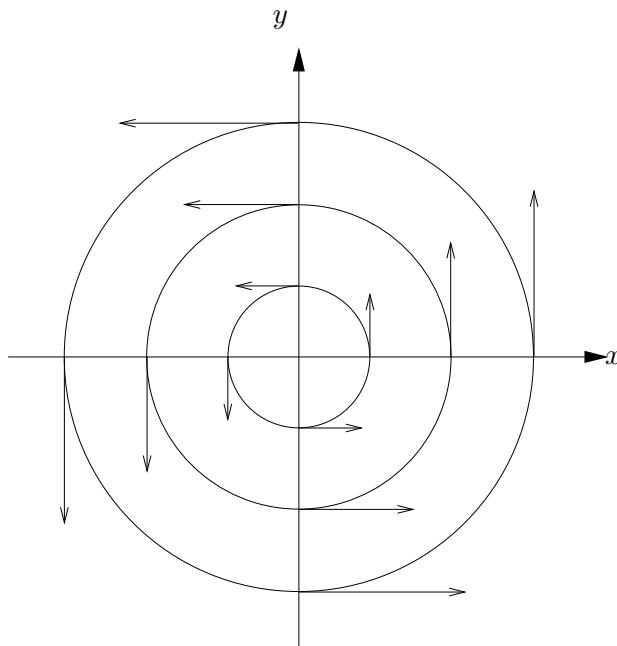
$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\frac{A^2 y^2}{r^4} + \frac{A^2 x^2}{r^4}} = \sqrt{\frac{A^2 (x^2 + y^2)}{r^4}} = \frac{A}{r}.$$

(Langs sirkelen er  $r$  konstant.)

- b) For å vise at strømfunksjonen eksisterer kan vi enten regne den ut, eller vi kan sjekke at  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ . Vis at den er divergensfri!

Siden  $\mathbf{v}$  er divergensfri og er todimensjonal i  $xy$ -planet så vet vi at det eksisterer en strømfunksjon  $\psi(x, y)$  som oppfyller likningene  $v_x = -\frac{\partial\psi}{\partial y}$  og  $v_y = \frac{\partial\psi}{\partial x}$ . Vi løser disse og finner  $\psi(x, y) = A \ln \sqrt{x^2 + y^2} + \alpha$  hvor  $\alpha$  er en vilkårlig konstant.

Strømlinjene framkommer som ekviskalarcurver for strømfunksjonen,  $\psi(x, y) = \text{konstant}$ . Disse kan skrives som  $x^2 + y^2 = \text{konstant}$ , og vi ser at de er sirkler med sentrum i origo.



Figur 6.3: Strømlinjene til  $\mathbf{v} = -\frac{Ay}{r^2}\mathbf{i} + \frac{Ax}{r^2}\mathbf{j}$  er sirkler med sentrum i origo

- c) Langs sirkelen  $S$  er  $\mathbf{v}$  og  $d\mathbf{r}$  parallelle. Vinkelen mellom  $\mathbf{v}$  og  $d\mathbf{r}$  er 0, og vi husker at  $\cos 0 = 1$ . Da blir skalarproduktet  $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = |\mathbf{v}| |d\mathbf{r}|$  der  $|\mathbf{v}| = A/r$  og  $|d\mathbf{r}| = ds$ . Linjeintegralet blir nå

$$C = \oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \frac{A}{r} \oint_S ds = \frac{A}{r} 2\pi r = 2\pi A.$$

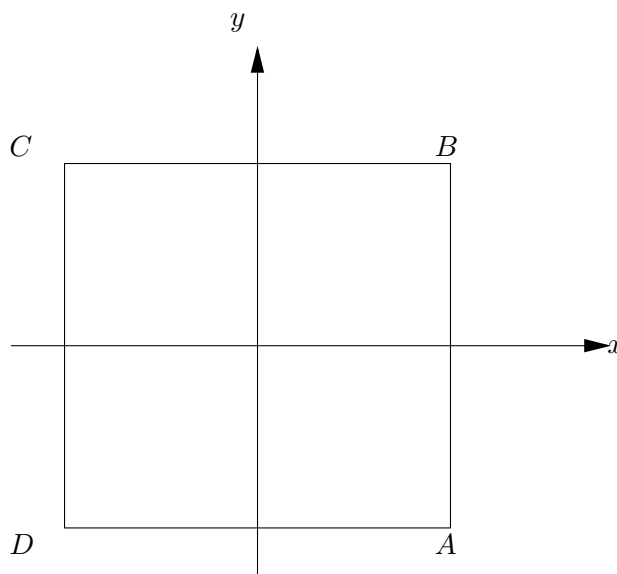
$C$  kalles for sirkulasjonen.

- d) Linjeintegralet rundt et kvadrat  $ABCD$  (se figur 6.4) kan deles opp i fire deler:

$$C = \oint_{ABCD} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{AB} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \int_{BC} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \int_{CD} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \int_{DA} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$

Langs linjestykket fra  $A$  til  $B$  kan vi velge parametriseringen  $\mathbf{r}(y) = \mathbf{i} + y\mathbf{j}$  for  $-1 \leq y \leq 1$ , og vi har at  $d\mathbf{r} = \mathbf{j} dy$  og  $x = 1$ :

$$\int_{AB} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-1}^1 \frac{A}{1+y^2} dy = \left[ A \arctan y \right]_{-1}^1 = \frac{A\pi}{4} + \frac{A\pi}{4} = \frac{A\pi}{2}.$$



Figur 6.4: Et kvadrat med sentrum i origo og sidekanter lik 2.

Tilsvarende utregning langs de andre sidekantene gir

$$\int_{AB} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{BC} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{CD} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{DA} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$

Sirkulasjonen blir altså

$$C = 4 \frac{A\pi}{2} = 2\pi A.$$

## Oppgave 4

- a) Den hydrostatiske trykkformelen er gitt ved  $p = p_0 + \rho g z$ . Trykkraften kan skrives som

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= - \int_{\sigma} p \mathbf{n} d\sigma \\ &= - \int_{\sigma_{\text{topp}}} p \mathbf{n} d\sigma - \int_{\sigma_{\text{bunn}}} p \mathbf{n} d\sigma - \int_{\sigma_{\text{side}}} p \mathbf{n} d\sigma. \end{aligned}$$

På toppflaten er  $z = d$  og  $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$ :

$$- \int_{\sigma_{\text{topp}}} p \mathbf{n} d\sigma = (p_0 + \rho g d) \mathbf{k} \int_{\sigma_{\text{topp}}} d\sigma = (p_0 + \rho g d) \pi a^2 \mathbf{k}.$$

På bunnflaten er  $z = d + l$  og  $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ :

$$- \int_{\sigma_{\text{bunn}}} p \mathbf{n} d\sigma = -(p_0 + \rho g(d + l)) \mathbf{k} \int_{\sigma_{\text{bunn}}} d\sigma = -(p_0 + \rho g(d + l)) \pi a^2 \mathbf{k}.$$

På grunn av symmetri blir  $\int_{\sigma_{\text{side}}} p \mathbf{n} d\sigma = 0$ , dette kan for øvrig regnes ut direkte ved å parametrisere sideflaten:

$$\mathbf{r}(\theta, z) = a \cos \theta \mathbf{i} + a \sin \theta \mathbf{j} + z \mathbf{k} \quad \text{for } 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \text{og } d \leq z \leq d+l$$

Da får vi

$$\mathbf{n} d\sigma = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} d\theta dz = (a \cos \theta \mathbf{i} + a \sin \theta \mathbf{j}) d\theta dz$$

Kraften på siden blir da

$$-\int_{\sigma_{\text{side}}} p \mathbf{n} d\sigma = -\int_d^{d+l} \int_0^{2\pi} (p_0 + \rho g z)(a \cos \theta \mathbf{i} + a \sin \theta \mathbf{j}) d\theta dz = 0$$

Den total trykkraften blir nå

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \left[ (p_0 + \rho g d)\pi a^2 - (p_0 + \rho g(d+l))\pi a^2 \right] \mathbf{k} \\ &= -\rho g l \pi a^2 \mathbf{k} \\ &= -M g \mathbf{k} \end{aligned}$$

der  $M = \rho l \pi a^2$  er massen til væsken fortrenget av sylindren.

- b) Oppgaveteksten ber oss om å gjette, da kan vi nøye oss med å bruke Arkimedes prinsipp som sier at trykkraften (oppdriften) er lik vekten av den fortrengete væsken:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -M g \mathbf{k}, \quad M = \rho \frac{4}{3} \pi a^3 \\ &= -\frac{4}{3} \rho g \pi a^3 \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Svaret kunne også ha blitt regnet ut direkte som et flateintegral ved å anvende kulekoordinater, eller det kan enda lettere regnes ut indirekte ved å anvende Gauss sats (da er det tilstrekkelig å huske formelen for volumet av ei kule). For å regne det ut direkte som et flateintegral kan vi parametrisere

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = a \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + a \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + (a \cos \theta + d) \mathbf{k} \quad \text{for } 0 \leq \theta \leq \pi \quad \text{og } 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

hvor vi har antatt at sentrum i kula ligger posisjon  $z = d$ . Vi får da

$$\mathbf{n} d\sigma = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} d\theta d\varphi = a^2 \sin \theta (\sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}) d\theta d\varphi$$

Trykkraften er

$$\begin{aligned} -\int_{\sigma} p \mathbf{n} d\sigma &= -\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (p_0 + \rho g(d + a \cos \theta)) a^2 \sin \theta (\sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}) d\theta d\varphi \\ &= -\frac{4}{3} \rho g \pi a^3 \mathbf{k} \end{aligned}$$

## Oppgave 5

a)

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\tau} 3xye^z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{\frac{1}{2}} 3xye^z \, dx \, dy \, dz \\
 &= \int_0^1 \int_0^2 \left[ \frac{3}{2}x^2ye^z \right]_0^{\frac{1}{2}} dy \, dz \\
 &= \int_0^1 \int_0^2 \frac{3}{8}ye^z \, dy \, dz \\
 &= \int_0^1 \left[ \frac{3}{16}y^2e^z \right]_0^2 dz \\
 &= \int_0^1 \frac{3}{4}e^z \, dz = \frac{3}{4}(e-1).
 \end{aligned}$$

b)

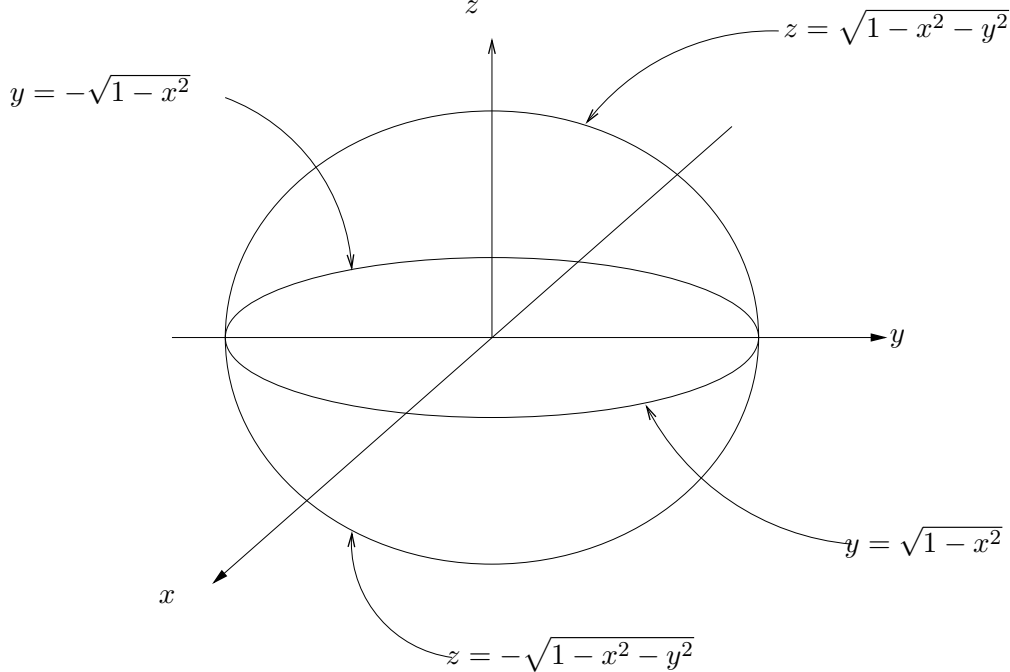
$$\begin{aligned}
 \iiint_{\tau} 3xye^z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^2 \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^1 3xye^z \, dz \, dx \, dy \\
 &= \int_0^2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left[ 3xye^z \right]_0^1 dx \, dy \\
 &= \int_0^2 \int_0^{\frac{1}{2}} 3xy(e-1) \, dx \, dy \\
 &= \int_0^2 \left[ \frac{3}{2}x^2y(e-1) \right]_0^{\frac{1}{2}} dy \\
 &= \int_0^2 \frac{3}{8}y(e-1) \, dy \\
 &= \left[ \frac{3}{16}y^2(e-1) \right]_0^2 = \frac{3}{4}(e-1).
 \end{aligned}$$

## Oppgave 6

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_0^x \int_0^y (x^2 + 3xy - z^2) dz dy dx &= \int_0^1 \int_0^x \left[ x^2 z + 3xyz - \frac{1}{3} z^3 \right]_0^y dy dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^x \left( x^2 y + 3xy^2 - \frac{1}{3} y^3 \right) dy dx \\
 &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} x^2 y^2 + xy^3 - \frac{1}{12} y^4 \right]_0^x dx \\
 &= \int_0^1 \left( \frac{1}{2} x^4 + x^4 - \frac{1}{12} x^4 \right) dx \\
 &= \frac{17}{12} \int_0^1 x^4 dx \\
 &= \frac{17}{60}.
 \end{aligned}$$

## Oppgave 7

En kule med radius lik én kan skrives som  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ .



Figur 6.5: En kule med radius lik en.

a)

$$\begin{aligned} -1 &\leq x \leq 1 \\ -\sqrt{1-x^2} &\leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ -\sqrt{1-x^2-y^2} &\leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}. \end{aligned}$$

b) Vi har gitt volumet  $\tau$ :  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ .

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\tau} dx dy dz \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz dy dx \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left[ z \right]_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy dx. \end{aligned}$$

Det innerste integralet kan vi uttrykke som

$$\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} dy, \quad a = \sqrt{1-x^2}.$$

Dette integralet kan vi finne løsningen til i en integraltabell:

$$\begin{aligned} &= \left[ \frac{y}{a} \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{y}{a} \right]_{-a}^a \\ &= 0 + \frac{a^2}{2} \arcsin 1 - 0 - \frac{a^2}{2} \arcsin(-1) \\ &= \frac{a^2\pi}{4} + \frac{a^2\pi}{4} = \frac{a^2\pi}{2}. \end{aligned}$$

Vi setter dette resultatet tilbake i volumintegralet:

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_{-1}^1 \frac{\pi}{2} a^2 dx \\ &= \pi \int_{-1}^1 (1-x^2) dx \\ &= \pi \left[ x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^1 \\ &= \pi \left[ 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right] = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$





## Kapittel 7

# Integralsatser: Green, Stokes og Gauss

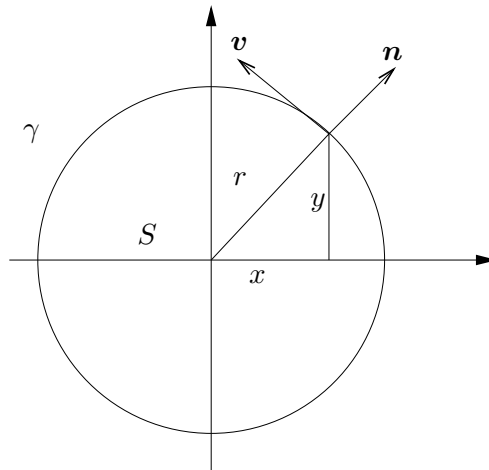
### Oppgave 1

Vi har gitt strømfeltet  $\mathbf{v} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}$  der  $\omega$  er en konstant.

a) Strømfarten:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\omega^2 y^2 + \omega^2 x^2} = \omega r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Langs sirkelen  $r^2 = x^2 + y^2$  er  $r$  konstant og dermed også  $|\mathbf{v}|$  konstant.



Figur 7.1: En sirkel  $\gamma$  som omslutter en sirkelskive  $S$  i  $xy$ -planet.

Sirkulasjonen er gitt ved likningen

$$C = \oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$

Fra oppgave 3, kapittel 6, har vi enhetsnormalen til en sirkel

$$\mathbf{n} = \frac{x}{r}\mathbf{i} + \frac{y}{r}\mathbf{j}$$

og følgelig

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -\frac{\omega y x}{r} + \frac{\omega x y}{r} = 0.$$

Strømfeltet  $\mathbf{v}$  er altså tangensialt til sirkelen  $\gamma$ . Denne opplysningen kan vi bruke ved beregning av sirkulasjonen:

$$\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \omega r ds$$

der  $ds$  er et lite element av sirkelen  $\gamma$ . Sirkulasjonen blir

$$C = \oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi r} \omega r ds = \omega r \int_0^{2\pi r} ds = \omega r 2\pi r = 2\pi\omega r^2.$$

Alternativt kan vi parametrisere sirkelen  $\mathbf{r}(\theta) = i r \cos \theta + j r \sin \theta$  for  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Vi får da  $d\mathbf{r} = r(-i \sin \theta + j \cos \theta)d\theta$  og  $\mathbf{v} = \omega r(-i \sin \theta + j \cos \theta)$ , og følgelig

$$C = \oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \omega r^2 \int_0^{2\pi} d\theta = \omega r^2 2\pi.$$

b) Vi regner først ut virvlingen:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega \mathbf{k}.$$

Integralet av virvlingen over sirkelflaten:

$$\int_S \nabla \times \mathbf{v} d\sigma = \int_S 2\omega \mathbf{k} d\sigma = 2\omega \mathbf{k} \int_S d\sigma = 2\omega \pi r^2 \mathbf{k}.$$

Greens sats:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

der  $\mathbf{n}$  er normalvektoren til sirkelflaten  $S$  (ikke sirkelbuen  $\gamma$ ). For sirkelflaten  $S$  har vi  $\mathbf{n} = \mathbf{k}$  som er en konstant vektor som eventuelt kan tas utenfor integralet.

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{k} d\sigma = 2\pi\omega r^2.$$

c) Siden  $|\mathbf{v}|$  er konstant for en gitt  $r$ , og  $\mathbf{v}$  er tangent til sirkler med radius  $r$ , har vi ved symmetri

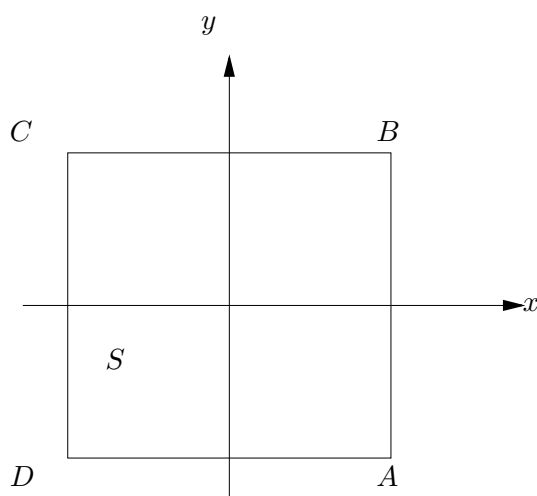
$$\int_{AB} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{BC} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{CD} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{DA} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$

Sirkulasjonen er derfor gitt ved

$$C = \oint_{ABCD} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 4 \int_{AB} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$

Langs linjestykket  $AB$  er  $x = \Delta x/2$ ,  $d\mathbf{r} = dy\mathbf{j}$  og  $-\Delta y/2 \leq y \leq \Delta y/2$ :

$$C = 4 \int_{AB} \omega x dy = 4\omega \frac{\Delta x}{2} \int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} dy = 2\omega \Delta x \Delta y.$$



Figur 7.2: Et kvadrat med sentrum i origo og sidekanter  $\Delta x = \Delta y$ .

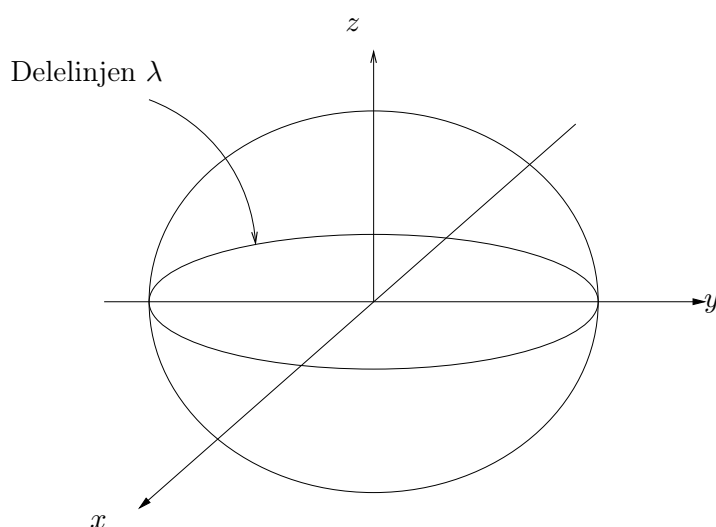
Greens sats:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \oint_{ABCD} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

hvor  $S$  nå betegner firkantskiven avgrenset av  $ABCD$ . Den venstre siden over kan nå regnes ut

$$= \int_S 2\omega \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \, d\sigma = 2\omega \int_S d\sigma = 2\omega \Delta x \Delta y.$$

## Oppgave 2



a) Stokes' sats:

$$\int_{\sigma} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \oint_{\lambda} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$

Stokes' sats sier at summen av virvlingsvektoren for hver halvkule er lik sirkulasjonen rundt  $\lambda$ . Siden halvkulene har samme form og volum er lengden av sirkulasjonen lik, men fortegnet ulikt. For hver  $\mathbf{n}_1$  på den øvre halvkulen har vi en  $\mathbf{n}_2$  på den nedre halvkulen slik at  $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ . Summen av sirkulasjonen av de to halvkulene blir derfor lik null.

- b) Radius av jordkloden: 6370 km, atmosfæretrykkelsen: 10 km. For en kule med radius 1 meter har vi en atmosfærestørrelse på  $\frac{10}{6370}$  meter  $\approx 1$  mm. Vi har en tilnærmet to-dimensjonal situasjon og det vil derfor være rimelig å bruke modellen fra oppgave a).

### Oppgave 3

Vi har gitt et tre-dimensjonalt strømfelt  $\mathbf{v} = \alpha(xi + yj + zk)$  der  $\alpha$  er en konstant.

- a) Enhets normalvektor er  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$  hvor  $\mathbf{r} = xi + yj + zk$  og  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Vi ser at  $\mathbf{v} = \alpha r \mathbf{n}$ . Da får vi

$$Q = \int_{\sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \alpha r \int_{\sigma} d\sigma = (\alpha r)(4\pi r^2) = 4\alpha\pi r^3.$$

Alternativt bruker vi Gauss' sats:

$$Q = \int_{\sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{v} d\tau = \int_{\tau} 3\alpha d\tau = 3\alpha \int_{\tau} d\tau$$

der  $\tau$  er volumet innenfor kuleflaten.

$$Q = 3\alpha \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\alpha\pi r^3.$$

- b) Vi antar nå at  $\sigma$  er en vilkårlig flate. Volumstrømmen blir

$$Q = \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{v} d\tau = 3\alpha\tau$$

der  $\tau$  er volumet  $\sigma$  omslutter.

### Oppgave 4

En vektor med konstant lengde og retning kan skrives som

$$\mathbf{A} = ai + bj + ck$$

der  $a$ ,  $b$  og  $c$  er konstanter. Flateintegralet av normalkomponenten av  $\mathbf{A}$  over en lukket, sammenhengende flate  $\sigma$  kan vi beregne ved å bruke Gauss' sats:

$$\int_{\sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau.$$

Divergensen til  $\mathbf{A}$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0$$

og flateintegralet blir følgelig

$$\int_{\sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0.$$

## Oppgave 5

Flateintegralet av en skalar  $\beta$  ganger enhetsnormalvektor til en lukket, sammenhengende flate  $\sigma$  kan vi beregne ved å bruke Gauss' sats:

$$\int_{\sigma} \beta \mathbf{n} d\sigma = \int_{\tau} \nabla \beta d\tau.$$

Gradientvektoren  $\nabla\beta$ :

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\mathbf{k} = 0$$

og flateintegralet blir derfor

$$\int_{\sigma} \beta \mathbf{n} d\sigma = 0.$$

## Oppgave 6

- a) Vi tenker oss at vi deler opp volumet  $\tau$  i små delvolumer  $\tau_i$  med overflate  $\sigma_i$ . Trykket på et slikt volum er  $-p\mathbf{n}_i$ , der  $\mathbf{n}_i$  er flatenormalen til  $\sigma_i$  og minustegnet angir at trykket er rettet inn mot flaten. Trykkraften blir nå  $-p\mathbf{n}_i d\sigma_i$  og hvis vi summerer opp for alle delvolumene og lar  $i \rightarrow \infty$  (og  $d\sigma_i \rightarrow 0$ ) blir den totale trykkraften:

$$\mathbf{F} = - \int_{\sigma} p \mathbf{n} d\sigma.$$

- b) Vi bruker Gauss' sats på trykkraften:

$$\mathbf{F} = - \int_{\sigma} p \mathbf{n} d\sigma = - \int_{\tau} \nabla p d\tau.$$

Trykket er gitt ved den hydrostatiske trykkformelen  $p = p_0 + \rho g z$  og gradientvektoren til  $p$  blir  $\nabla p = \mathbf{k} \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g \mathbf{k}$ . Vi setter dette inn i uttrykket for trykkraften:

$$\mathbf{F} = \rho g \mathbf{k} \int_{\tau} d\tau = \rho g \tau \mathbf{k} = m g \mathbf{k}$$

der  $m = \rho \tau$  er massen av den merkede væsken.

- c) Oppdriftskraften (trykkraften  $\mathbf{F}$ ) avhenger kun av tettheten til væsken ( $\rho$ ) og volumet av den fortrenge væsken ( $\tau$ ), ikke av egenskapene til objektet som fortrenger væsken. Trykkraften blir altså uforandret.

## Oppgave 7

Et kraftfelt er gitt ved

$$\mathbf{F} = (y^2 + 5)\mathbf{i} + (2xy - 8)\mathbf{j}.$$

- a) Kraften må være irrotasjonell:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + 5 & 2xy - 8 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Kraftpotensialet,  $V$ , kan vi finne fra  $\mathbf{F} = -\nabla V$ :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -(y^2 + 5) \quad \Rightarrow \quad V(x, y) = -xy^2 - 5x + f_1(y)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -(2xy - 8) \quad \Rightarrow \quad V(x, y) = -xy^2 + 8y + f_2(x).$$

For å få en entydig  $V(x, y)$  må vi velge  $f_1(y) = 8y + C$  og  $f_2(x) = -5x + C$  slik at

$$V(x, y) = -xy^2 - 5x + 8y.$$

b) Arbeidet er gitt ved

$$W = \int_{\lambda} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\lambda} (y^2 + 5) dx + \int_{\lambda} (2xy - 8) dy.$$

$\lambda = OAB$ :

$$W = \int_{OAB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{OA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Langs linjen  $OA$  er  $y = 0$  og  $dy = 0$  og langs linjen  $AB$  er  $x = 1$  og  $dx = 0$ . Dette gir

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 5 dx + \int_0^1 (2y - 8) dy \\ &= 5 + (1 - 8) \\ &= -2. \end{aligned}$$

$\lambda = OB$ : Langs linjen fra origo til  $B$  er  $x = y$  og  $dx = dy$  og arbeidet blir

$$\begin{aligned} W &= \int_{OB} (x^2 + 5 + 2x^2 - 8) dx \\ &= \int_0^1 (3x^2 - 3) dx \\ &= 1 - 3 \\ &= -2. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} W &= \int_{OB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{OB} \nabla V \cdot d\mathbf{r} = - \int_{OB} dV \\ &= -V(1, 1) + V(0, 0) = 1 + 5 - 8 - C + C = -2. \end{aligned}$$

Arbeidet for en kraft som kan avledes av et kraftpotensiale er uavhengig av veien og kun avhengig av verdien til potensialet i endepunktene.

d) Vektorfluksen til  $\mathbf{F}$  kan skrives som

$$Q = \int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{OA} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{AB} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{BC} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{CO} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

$$\begin{aligned}\int_{OA} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= \int_0^1 8 \, dx = 8 \\ \int_{AB} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= \int_0^1 (y^2 + 5) \, dy = \frac{16}{3} \\ \int_{BC} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= \int_0^1 (2x - 8) \, dx = -7 \\ \int_{CO} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= -\int_0^1 (y^2 + 5) \, dy = -\frac{16}{3}.\end{aligned}$$

Vektorfluksen blir derfor

$$Q = 8 + \frac{16}{3} - 7 - \frac{16}{3} = 1.$$

La oss bruke Gauss' sats på vektorfluksen:

$$\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{F} \, d\tau.$$

Divergensen til  $\mathbf{F}$  er  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 + 2x$  og vektorfluksen blir

$$Q = \int_{\tau} 2x \, d\tau.$$

$\tau$  er nå en kube med sidekanter lik 1:

$$\begin{aligned}Q &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 2x \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left[ x^2 \right]_0^1 \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 dy \, dz \\ &= \int_0^1 dz \\ &= 1.\end{aligned}$$

e) Sirkulasjonen rundt kurven  $\lambda$  kan skrives som

$$\begin{aligned}C &= \int_{\lambda} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{OA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{BC} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{CO} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \\ \int_{OA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 5 \, dx = 5 \\ \int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 (2y - 8) \, dy = -7 \\ \int_{BC} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= -\int_0^1 6 \, dx = -6 \\ \int_{CO} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 8 \, dy = 8.\end{aligned}$$

Sirkulasjonene blir derfor

$$C = 5 - 7 - 6 + 8 = 0.$$

Vi skal nå beregne sirkulasjon ved hjelp av Stokes' sats:

$$\int_{\lambda} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

La oss regne ut virvlingen:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ y^2 + 5 & 2xy - 8 & 0 \end{vmatrix} = (2y - 2y)\mathbf{k} = 0.$$

Siden virvlingen er null blir også sirkulasjonen lik null.



## Kapittel 8

# Polarkoordinater

### Oppgave 1

Vi har gitt skalarfeltet  $\beta(x, y) = xy$  i kartesiske koordinater.

- a) For polarkoordinater  $(r, \theta)$  og kartesiske koordinater  $(x, y)$  har vi sammenhengen  $x = r \cos \theta$  og  $y = r \sin \theta$ . Innsatt i  $\beta = xy$ :

$$\beta = r^2 \cos \theta \sin \theta.$$

- b) Gradientvektoren i kartesiske koordinater:

$$\nabla \beta = \frac{\partial \beta}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \mathbf{j} = y \mathbf{i} + x \mathbf{j}. \quad (8.1)$$

Gradientvektoren i polare koordinater:

$$\begin{aligned} \nabla \beta &= \frac{\partial \beta}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta \\ &= 2r \cos \theta \sin \theta \mathbf{i}_r + r(-\sin \theta \sin \theta + \cos \theta \cos \theta) \mathbf{i}_\theta \\ &= 2r \cos \theta \sin \theta \mathbf{i}_r + r(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \mathbf{i}_\theta. \end{aligned} \quad (8.2)$$

For å vise at (8.1) og (8.2) er samme vektor kan vi gjøre om (8.1) til polare koordinater. Vi trenger da sammenhengen mellom enhetsvektorene i kartesiske og polare koordinater:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \cos \theta \mathbf{i}_r - \sin \theta \mathbf{i}_\theta \\ \mathbf{j} &= \sin \theta \mathbf{i}_r + \cos \theta \mathbf{i}_\theta. \end{aligned}$$

Vi setter dette inn i likning 8.1:

$$\begin{aligned} \nabla \beta &= y \mathbf{i} + x \mathbf{j} \\ &= r \sin \theta (\cos \theta \mathbf{i}_r - \sin \theta \mathbf{i}_\theta) + r \cos \theta (\sin \theta \mathbf{i}_r + \cos \theta \mathbf{i}_\theta) \\ &= 2r \cos \theta \sin \theta \mathbf{i}_r + r(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \mathbf{i}_\theta. \end{aligned}$$

- c) Divergensen til  $\nabla \beta$  i kartesiske koordinater:

$$\nabla \cdot \nabla \beta = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} = 0.$$

Divergensen til  $\nabla\beta$  i polare koordinater:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \nabla\beta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r(2r \cos \theta \sin \theta) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \cos^2 \theta - r \sin^2 \theta) \\ &= \frac{1}{r} 4r \cos \theta \sin \theta + \frac{1}{r} (2r \cos \theta (-\sin \theta) - 2r \sin \theta \cos \theta) \\ &= 4 \cos \theta \sin \theta - 2 \sin \theta \cos \theta - 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 0.\end{aligned}$$

d) Virvlingen til  $\nabla\beta$  i kartesiske koordinater:

$$\nabla \times \nabla\beta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ y & x & 0 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} \right) \mathbf{k} = 0.$$

Virvlingen til  $\nabla\beta$  i polare koordinater:

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla\beta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r(r \cos^2 \theta - r \sin^2 \theta) \right] \mathbf{k} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (2r \cos \theta \sin \theta) \mathbf{k} \\ &= \frac{1}{r} (2r \cos^2 \theta - 2r \sin^2 \theta) \mathbf{k} - \frac{1}{r} 2r (-\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \mathbf{k} \\ &= (2 \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta + 2 \sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta) \mathbf{k} \\ &= 0.\end{aligned}$$

## Oppgave 2

Vi har gitt skalarfeltet  $\beta(r) = \frac{A}{r}$  der  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$  og  $A$  er en konstant.

a) Gradientvektoren  $\nabla\beta$  i kartesiske koordinater:

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z} \mathbf{k}.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\beta}{\partial x} &= \frac{\partial\beta}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \\ &= -\frac{A}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \\ &= -\frac{A}{r^2} \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \\ &= -Ax(x^2 + y^2 + z^2)^{-1} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= -Ax(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

Uttrykkene for  $\frac{\partial\beta}{\partial y}$  og  $\frac{\partial\beta}{\partial z}$  kan regnes ut på tilsvarende måte slik at

$$\begin{aligned}\nabla\beta &= -A(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}). \\ \left( \right. &= -Ar^{-3} \mathbf{r} = -\frac{A}{r^3} r \mathbf{i}_r = -\frac{A}{r^2} \mathbf{i}_r \end{aligned}$$

Gradientvektoren  $\nabla\beta$  i sfæriske polarkoordinater:

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial r}\mathbf{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\beta}{\partial\theta}\mathbf{i}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\beta}{\partial\varphi}\mathbf{i}_\varphi = -\frac{A}{r^2}\mathbf{i}_r.$$

b) Divergensen til  $\nabla\beta$  i kartesiske koordinater:

$$\nabla \cdot \nabla\beta = \frac{\partial^2\beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\beta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\beta}{\partial z^2}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\beta}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ -Ax(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right] \\ &= -A \left[ (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + x \left( -\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x \right] \\ &= A(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \left[ 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-1} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Tilsvarende utregning kan gjøres for  $\frac{\partial^2\beta}{\partial y^2}$  og  $\frac{\partial^2\beta}{\partial z^2}$  slik at

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla\beta &= A(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \left[ 3(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{-1} - 3 \right] \\ &= A(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} [3 - 3] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Divergensen til  $\nabla\beta$  i sfæriske polarkoordinater:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla\beta &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \left( -\frac{A}{r^2} \right) \right] + 0 + 0 \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (-A) \\ &= 0. \end{aligned}$$

### Oppgave 3

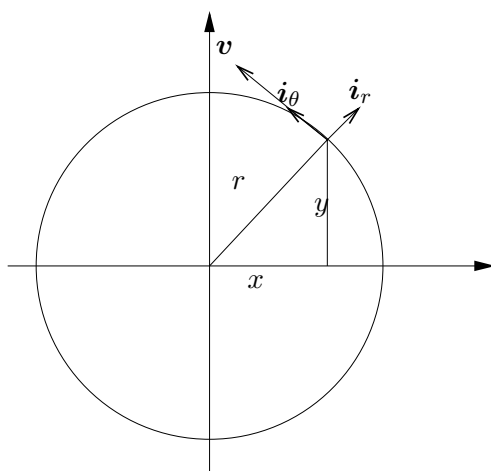
Vi har gitt et hastighetsfelt i kartesiske koordinater:

$$\mathbf{v} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}.$$

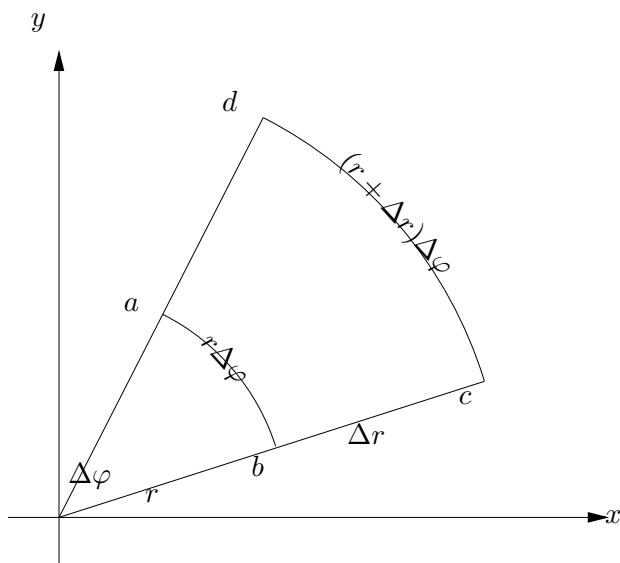
a) For å finne uttrykket for  $\mathbf{v}$  i polarkoordinater må vi bruke likningene:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ \mathbf{i} &= \cos \theta \mathbf{i}_r - \sin \theta \mathbf{i}_\theta \\ \mathbf{j} &= \sin \theta \mathbf{i}_r + \cos \theta \mathbf{i}_\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} &= \omega r \sin \theta (\cos \theta \mathbf{i}_r - \sin \theta \mathbf{i}_\theta) + \omega r \cos \theta (\sin \theta \mathbf{i}_r + \cos \theta \mathbf{i}_\theta) \\
 &= \omega r (-\sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta) \mathbf{i}_r + \omega r (\sin \theta \sin \theta + \cos \theta \cos \theta) \mathbf{i}_\theta \\
 &= \omega r \mathbf{i}_\theta.
 \end{aligned}$$



$$\mathbf{v} = \omega \mathbf{k} \times \mathbf{r} = \omega \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j}.$$



b) Sirkulasjonen kan deles opp i fire deler:

$$C = \oint_{abcd} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{ab} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \int_{bc} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \int_{cd} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \int_{da} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$

- *ab*:  $d\mathbf{r}$  er her et lite buelement på sirkelen med radius  $r$  og har retning  $-\mathbf{i}_\theta$ . Langs *ab* er  $\mathbf{v}$  konstant lik  $\omega r$  i  $\mathbf{i}_\theta$ -retning.  $d\mathbf{r}$  og  $\mathbf{v}$  er altså parallelle.

$$\int_{ab} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = -\omega r \cdot r \Delta\varphi \quad (\text{lengden av } \mathbf{v} \cdot \text{lengden av } ab).$$

- *bc*:  $d\mathbf{r}$  peker nå i retning  $\mathbf{i}_r$  og  $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \omega r \mathbf{i}_\theta \cdot d\mathbf{r} \mathbf{i}_r = 0$ .
- *cd*: Her kan vi benytte oss av et tilsvarende argument som for linjestykket *ab*, men nå er  $d\mathbf{r}$  et buelement på en sirkel med radius  $r + \Delta r$  og peker i positiv  $\mathbf{i}_\theta$ -retning:

$$\int_{cd} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \omega(r + \Delta r) \cdot (r + \Delta r) \Delta\varphi \quad (\text{lengden av } \mathbf{v} \cdot \text{lengden av } cd).$$

- *da*:  $d\mathbf{r}$  peker nå i retning  $-\mathbf{i}_r$  og  $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \omega r \mathbf{i}_\theta \cdot (-d\mathbf{r} \mathbf{i}_r) = 0$ .

Vi legger sammen leddene og får

$$\begin{aligned} C &= -\omega r^2 \Delta\varphi + \omega(r^2 + 2r\Delta r + (\Delta r)^2) \Delta\varphi \\ &= \omega \Delta r \Delta\varphi (2r + \Delta r). \end{aligned}$$

c) Stokes' sats:

$$\int_{\sigma} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \oint_{\lambda} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = C.$$

Vi regnet ut  $C$  for et flatelement *abcd* i oppgave b). Hvis vi nå lar  $r = 0$  og  $\Delta\varphi = 2\pi$  får vi sirkulasjonen  $C$  for en sirkelflate med radius  $\Delta r$ :

$$C = \omega \Delta r \Delta\varphi (2r + \Delta r) = 2\pi\omega(\Delta r)^2.$$

Dette er virvlingen for hele sirkelflaten. Deler vi  $C$  på arealet får vi virvlingen i et vilkårlig punkt i feltet:

$$C = \frac{2\pi\omega(\Delta r)^2}{\pi(\Delta r)^2} = 2\omega$$

med retning normalt sirkelflaten. For å regne ut virvlingen direkte bruker vi polar-koordinatformen:

$$\mathbf{v} = \omega r \mathbf{i}_\theta, \quad \nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{k}.$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\omega r) \mathbf{k} \\ &= \frac{\omega}{r} 2r \mathbf{k} \\ &= 2\omega \mathbf{k}. \end{aligned}$$

## Oppgave 4

Et hastighetsfelt er gitt ved

$$\mathbf{v} = \frac{C}{2\pi} \left( -\frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j} \right)$$

der  $C$  er en konstant.

a) For å finne uttrykket for  $\mathbf{v}$  i polarkoordinater må vi bruke likningene:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ \mathbf{i} &= \cos \theta \mathbf{i}_r - \sin \theta \mathbf{i}_\theta \\ \mathbf{j} &= \sin \theta \mathbf{i}_r + \cos \theta \mathbf{i}_\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{C}{2\pi} \left( -\frac{r \sin \theta}{r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} (\cos \theta \mathbf{i}_r - \sin \theta \mathbf{i}_\theta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{r \cos \theta}{r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} (\sin \theta \mathbf{i}_r + \cos \theta \mathbf{i}_\theta) \right) \\ &= \frac{C}{2\pi r} \left( -\sin \theta \cos \theta \mathbf{i}_r + \sin^2 \theta \mathbf{i}_\theta + \cos \theta \sin \theta \mathbf{i}_r + \cos^2 \theta \mathbf{i}_\theta \right) \\ &= \frac{C}{2\pi r} \mathbf{i}_\theta. \end{aligned}$$

b) Som i tilfellet i oppgave 3b) har vi også denne gangen at

$$\int_{bc} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{da} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

siden  $\mathbf{v}$  står normalt på  $\mathbf{i}_r$  ( $\mathbf{v}$  er tangent til sirkler med sentrum i origo). Sirkulasjonen, her kalt  $S$ , er derfor gitt ved

$$S = \oint_{abcd} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{ab} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \int_{cd} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$

Fra oppgave a) kan vi slutte at  $\mathbf{v}$  er konstant langs sirkler med sentrum i origo og de to kurveintegralene kan regnes ut (som i oppgave 3b) ved å gange lengden av vektoren  $\mathbf{v}$  med lengden av kurven:

$$\begin{aligned} S &= -\frac{C}{2\pi r} \cdot r \Delta\varphi + \frac{C}{2\pi(r + \Delta r)} \cdot (r + \Delta r) \Delta\varphi \\ &= -\frac{C \Delta\varphi}{2\pi} + \frac{C \Delta\varphi}{2\pi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

c) Virvlingen i polarkoordinater:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{v} &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{k} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{C}{2\pi r} \right) \mathbf{k} \\ &= 0.\end{aligned}$$

d) Sirkulasjonen av  $\mathbf{v}$  langs en sirkellinje  $\lambda$ :

$$S = \oint_{\lambda} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

der  $d\mathbf{r}$  kan uttrykkes som  $d\mathbf{r} = ds\mathbf{i}_\theta$  med  $ds$  som en liten buelengde.

$$\begin{aligned}S &= \oint_{\lambda} \frac{C}{2\pi r} \mathbf{i}_\theta \cdot ds\mathbf{i}_\theta \\ &= \frac{C}{2\pi r} \oint_{\lambda} ds \\ &= \frac{C}{2\pi r} \cdot 2\pi r \\ &= C.\end{aligned}$$

Vi har et singulært punkt i origo der  $|\mathbf{v}| \rightarrow \infty$ .

## Oppgave 5

Et strømfelt i jordatmosfæren er gitt ved  $\mathbf{v} = f(\theta)\mathbf{i}_\varphi$ .

a) Divergensen til  $\mathbf{v}$  (i sfæriske polarkoordinater):

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 + 0 + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f(\theta)}{\partial \varphi} = 0.$$

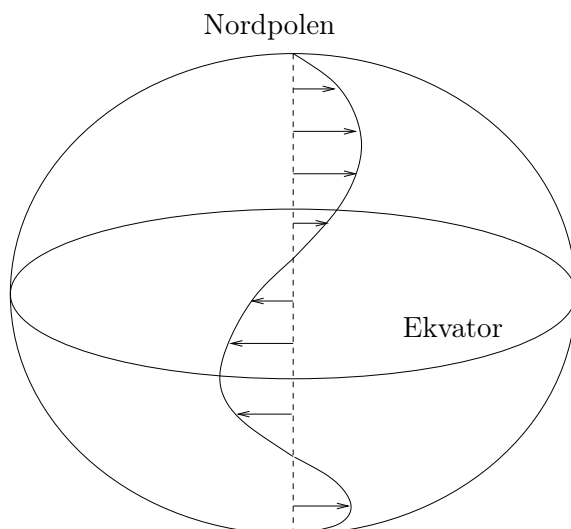
b) Vi setter nå  $f(\theta) = C \sin 3\theta$  der  $C$  er en positiv konstant.  $\theta$  tilsvarer breddegradene der  $\theta = 0^\circ$  er nordpolen,  $\theta = 90^\circ$  er ekvator og  $\theta = 180^\circ$  er sydpolen. Hvis vi tegner  $\mathbf{v}$  inn på en kule får vi vindfeltet i figur 8.1.

c) Sirkulasjonen kan deles opp i fire deler:

$$S = \oint_{\lambda} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{ab} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \int_{bc} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \int_{cd} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \int_{da} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$

hvor vinkelkoordinatene for punkt  $a$  er  $(\theta_0, \varphi_0)$ , for punkt  $b$  er  $(\theta_0 + \Delta\theta, \varphi_0)$ , for punkt  $c$  er  $(\theta_0 + \Delta\theta, \varphi_0 + \Delta\varphi)$ , og for punkt  $d$  er  $(\theta_0, \varphi_0 + \Delta\varphi)$ .

De fire delintegralene blir som følger:



Figur 8.1: Passat- og vestenvindsfeltet.

- $ab$ :  $d\mathbf{r}$  er et lite bueelement på en sirkel med radius  $r$  og har retning  $\mathbf{i}_\theta$ , følgelig er  $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = f(\theta)\mathbf{i}_\varphi \cdot \mathbf{i}_\theta r d\theta = 0$ .
- $bc$ :  $d\mathbf{r}$  er et lite bueelement på en sirkel med radius  $r \sin(\theta_0 + \Delta\theta)$  og har retning  $\mathbf{i}_\varphi$ . Langs  $bc$  er  $\mathbf{v}$  konstant lik  $f(\theta_0 + \Delta\theta)\mathbf{i}_\varphi$ . Da er  $d\mathbf{r}$  og  $\mathbf{v}$  parallelle.

$$\int_{bc} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = f(\theta_0 + \Delta\theta)r \sin(\theta_0 + \Delta\theta)\Delta\varphi$$

- $cd$ :  $d\mathbf{r}$  er et lite bueelement på en sirkel med radius  $r$  og har retning  $-\mathbf{i}_\theta$ , følgelig er  $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = -f(\theta)\mathbf{i}_\varphi \cdot \mathbf{i}_\theta r d\theta = 0$ .
- $da$ :  $d\mathbf{r}$  er et lite bueelement på en sirkel med radius  $r \sin \theta_0$  og har retning  $-\mathbf{i}_\varphi$ . Langs  $da$  er  $\mathbf{v}$  konstant lik  $f(\theta_0)\mathbf{i}_\varphi$ . Da er  $d\mathbf{r}$  og  $\mathbf{v}$  parallelle.

$$\int_{da} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = -f(\theta_0)r \sin \theta_0 \Delta\varphi$$

Vi legger sammen leddene og får

$$\begin{aligned} S &= r \{ \sin(\theta_0 + \Delta\theta)f(\theta_0 + \Delta\theta) - \sin \theta_0 f(\theta_0) \} \Delta\varphi \\ &\approx r \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \{ \sin \theta f(\theta) \} \right|_{\theta=\theta_0} \Delta\theta \Delta\varphi. \end{aligned}$$

Stokes sats:

$$\int_{\sigma} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \oint_{\lambda} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = S.$$

Sirkelflaten har areal  $r^2 \sin \theta_0 \Delta\theta \Delta\varphi$  og har normalvektor  $\mathbf{n} = \mathbf{i}_r$ . Innsatt i Stokes sats

$$(\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{i}_r r^2 \sin \theta_0 \Delta\theta \Delta\varphi = r \frac{\partial}{\partial \theta} \{ \sin \theta f(\theta) \} \Delta\theta \Delta\varphi$$

Vertikalkomponenten av virvlingen blir

$$(\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{i}_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \{ \sin \theta f(\theta) \} = \frac{C}{r} \left[ 3 \cos 3\theta + \sin 3\theta \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right]$$



## Oppgave 6

Newtons gravitasjonslov er gitt ved

$$\mathbf{F} = -\frac{GmM\mathbf{r}}{r^3}$$

der  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  og  $r = |\mathbf{r}|$ .

a) Fra likning 4.20 på side 67 i kompendiet finner vi:

$$\nabla \times \mathbf{F} = -\frac{GmM}{r^3} \nabla \times \mathbf{r} + \nabla \left( -\frac{GmM}{r^3} \right) \times \mathbf{r}.$$

Vi ser på høyresiden ledd for ledd:

$$-\frac{GmM}{r^3} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\frac{GmM}{r^3} (0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) = 0.$$

For å regne ut det andre leddet bruker vi først resultatet fra oppgave 8b i kapittel 2 for å regne ut gradientvektoren:

$$\begin{aligned} \nabla \left( -\frac{GmM}{r^3} \right) &= -GmM \nabla \left( \frac{1}{r^3} \right) \\ &= -GmM \left[ \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \mathbf{j} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \mathbf{k} \right] \\ &= -GmM \left[ -\frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}) \right] \end{aligned}$$

Vi krysser nå gradientvektoren med  $\mathbf{r}$ :

$$\begin{aligned} \nabla \left( -\frac{GmM}{r^3} \right) \times \mathbf{r} &= 3GmM (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix} \\ &= 3GmM (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \left[ (yz - zy)\mathbf{i} - (xz - zx)\mathbf{j} + (xy - yx)\mathbf{k} \right] \\ &= 0 \\ \Rightarrow \nabla \times \mathbf{F} &= 0. \end{aligned}$$

b) Gravitasjonspotensialet  $V$  er definert ved  $\mathbf{F} = -\nabla V$ . I sfæriske koordinater kan vi skrive

$$\mathbf{F} = -\frac{GmM}{r^3} r\mathbf{i}_r = -\frac{GmM}{r^2} \mathbf{i}_r.$$

Gradientvektoren i sfæriske koordinater er gitt i kapittel 8 som

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{i}_r + \text{ledd i } \mathbf{i}_\varphi \text{ og } \mathbf{i}_\theta\text{-retning} \\ \Rightarrow -\frac{\partial V}{\partial r} &= -\frac{GmM}{r^2} \\ V &= -\frac{GmM}{r} + V_0. \end{aligned}$$

c)  $V(r = R) = 0 \Rightarrow V_0 = \frac{GmM}{R}$  og gravitasjonspotensialet kan skrives som

$$V = -GmM \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) = -GmM \frac{R - r}{Rr}.$$

Arbeidet er definert som kraft ganger vei:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\lambda} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= - \int_R^{R+h} \nabla V \cdot d\mathbf{r} \\ &= - \int_R^{R+h} dV \\ &= V(R) - V(R+h) \\ &= 0 + GmM \frac{R - R - h}{R(R+h)} \\ &= - \frac{mgRh}{R+h}. \end{aligned}$$

## Kapittel 9

# Divergens- og virvelfrie felter. Potensialstrøm

### Oppgave 1

Det eksisterer et hastighetspotensiale  $\phi$  hvis feltet er virvelfritt. For et to-dimensjonalt felt  $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$  er virvlingen gitt ved

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Uttrykket for  $\phi$  kan finnes fra likningen  $\mathbf{v} = \nabla \phi$ . Hvis det også skal eksistere en strømfunksjon  $\psi$  må feltet være divergensfritt ( $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ).

a)  $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ :

- $\nabla \times \mathbf{v} = \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = 0 \Rightarrow \phi$  eksisterer.
- $\nabla \cdot \mathbf{v} = 1 + 1 = 2 \Rightarrow$  ingen  $\psi$ .

Hastighetpotensialet kan nå finnes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} = v_x = x &\Rightarrow \phi(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + f_1(y) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = v_y = y &\Rightarrow \phi(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + f_2(x). \end{aligned}$$

Vi ønsker en entydig  $\phi$  slik at vi må velge

$$f_1(y) = \frac{1}{2}y^2 + C \quad \text{og} \quad f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Potensialet blir derfor

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C.$$

b)  $\mathbf{v} = x^2y\mathbf{i} - xy^2\mathbf{j}$ :

- $\nabla \times \mathbf{v} = (-y^2 - x^2)\mathbf{k} \Rightarrow$  ingen  $\phi$ .
- $\nabla \cdot \mathbf{v} = 2xy - 2xy = 0 \Rightarrow \psi$  eksisterer.

Vi løser to likninger for å finne strømfunksjonen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial x} = v_y = -xy^2 &\Rightarrow \psi(x, y) = -\frac{1}{2}x^2y^2 + f_1(y) \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} = -v_x = -x^2y &\Rightarrow \psi(x, y) = -\frac{1}{2}x^2y^2 + f_2(x).\end{aligned}$$

For å få en entydig løsning må vi velge  $f_1(y) = f_2(x) = C$  slik at strømfunksjonen blir

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{2}x^2y^2 + C.$$

c)  $\mathbf{v} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$ :

- $\nabla \times \mathbf{v} = (2y - 2y)\mathbf{k} = 0 \Rightarrow \phi$  eksisterer.
- $\nabla \cdot \mathbf{v} = 2x + 2x = 4x \Rightarrow$  ingen  $\psi$ .

Vi finner uttrykket for  $\phi$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x} = v_x = x^2 + y^2 &\Rightarrow \phi(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + y^2x + f_1(y) \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = v_y = 2xy &\Rightarrow \phi(x, y) = xy^2 + f_2(x).\end{aligned}$$

For å få en entydig  $\phi$  må vi velge

$$f_1(y) = C \quad \text{og} \quad f_2(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$$

slik at

$$\phi(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 + C.$$

## Oppgave 2

a)  $\phi = xy$ . Vi finner først vektorfeltet,  $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$ , til hastighetspotensialet:

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{\partial\phi}{\partial x} = y, & v_y &= \frac{\partial\phi}{\partial y} = x \\ \Rightarrow \mathbf{v} &= y\mathbf{i} + x\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Er vektorfeltet divergensfritt?

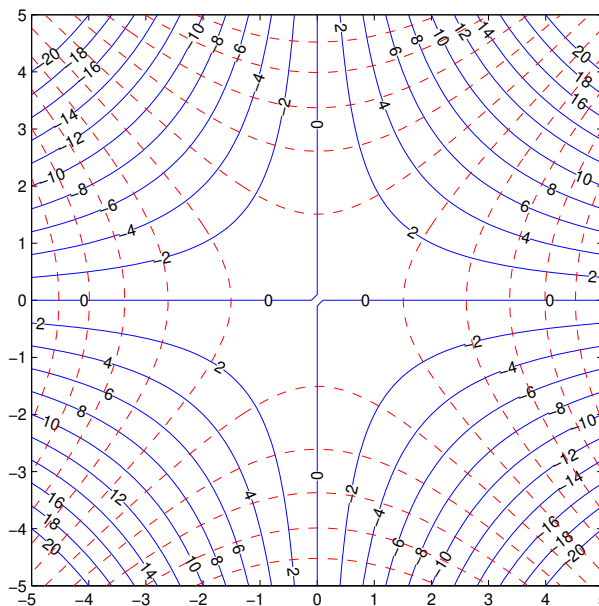
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Vi kan nå innføre strømfunksjonen  $\psi$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial x} = v_y = x &\Rightarrow \psi(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + f_1(y) \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} = -v_x = -y &\Rightarrow \psi(x, y) = -\frac{1}{2}y^2 + f_2(x).\end{aligned}$$

Vi velger  $f_1$  og  $f_2$  slik at

$$f_1(y) = -\frac{1}{2}y^2 + C, \quad f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$$



Figur 9.1: Ekviskalarlinjer for hastighetspotensialet (blå, heltrukken linje) og strømlinjene (rød, stiplet linje).

og strømfunksjonen blir

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + C.$$

b)  $\phi = xy^2 - x^2y$ . Vektorfeltet  $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$  til hastighetspotensialet blir:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial\phi}{\partial x} = y^2 - 2xy, & v_y &= \frac{\partial\phi}{\partial y} = 2xy - x^2 \\ \Rightarrow \mathbf{v} &= (y^2 - 2xy)\mathbf{i} + (2xy - x^2)\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Er vektorfeltet divergensfritt?

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = -2y + 2x.$$

$\phi$  er ikke et hastighetspotensiale for en divergensfri strøm. Det eksisterer ingen strømfunksjon.

Strømlinjene kan nå finnes ved å løse differensiallikningen  $\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = 0$ . Denne differensiallikningen er imidlertid vanskelig å løse.

c)  $\phi = x^2 - y^2$ . Vi finner først vektorfeltet,  $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$  til hastighetspotensialet:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial\phi}{\partial x} = 2x, & v_y &= \frac{\partial\phi}{\partial y} = -2y \\ \Rightarrow \mathbf{v} &= 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Er vektorfeltet divergensfritt?

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 2 - 2 = 0.$$

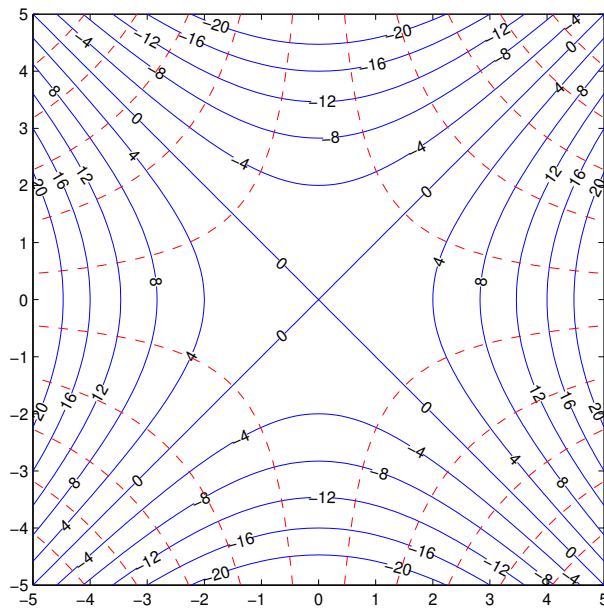
Vi kan nå finne strømfunksjonen  $\psi$ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = v_y = -2y \quad \Rightarrow \quad \psi(x, y) = -2xy + f_1(y)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -v_x = -2x \quad \Rightarrow \quad \psi(x, y) = -2xy + f_2(x).$$

Vi må sette  $f_1 = f_2 = C$  og strømfunksjonen blir

$$\psi(x, y) = -2xy + C.$$



Figur 9.2: Ekviskalarlinjer for hastighetspotensialet (blå, heltrukken linje) og strømlinjene (rød, stiplet linje).

### Oppgave 3

a) Strømlinjene finnes ved å sette strømfunksjonen lik konstant ( $\psi = \psi_0$ ):

$$\psi_0(x^2 + y^2) = Ay$$

$$x^2 + y^2 - \frac{Ay}{\psi_0} = 0.$$

Vi ønsker å få leddet  $y^2 - \frac{Ay}{\psi_0}$  over på formen  $(y - c)^2$ , der  $c$  er en konstant.

$$y^2 - \frac{Ay}{\psi_0} = \left(y - \frac{A}{2\psi_0}\right)^2 - \left(\frac{A}{2\psi_0}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{A}{2\psi_0}\right)^2 = \left(\frac{A}{2\psi_0}\right)^2.$$

- b) En kilde/sluk plassert i origo har potensial  $\phi = C \ln r$  der  $C$  er styrken til kilden/sluket og fortegnet bestemmer om det er en kilde eller et sluk. I kartesiske koordinater har vi

$$\phi = C \ln (x^2 + y^2)^{1/2}.$$

For et sluk i punktet  $(a, 0)$  med styrke  $A/2a$  blir potensialet

$$\phi_1 = -\frac{A}{2a} \ln [(x-a)^2 + y^2]^{1/2}$$

og potensialet til en kilde i  $(-a, 0)$  med samme styrke blir

$$\phi_2 = \frac{A}{2a} \ln [(x+a)^2 + y^2]^{1/2}.$$

Dipolfeltet fåes ved å addere feltene over:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{A}{2a} \ln [(x-a)^2 + y^2]^{1/2} + \frac{A}{2a} \ln [(x+a)^2 + y^2]^{1/2}.$$

- c) Regel:  $\ln x^a = a \ln x$ :

$$\phi = -\frac{A}{4a} \ln [(x-a)^2 + y^2] + \frac{A}{4a} \ln [(x+a)^2 + y^2].$$

Regel:  $\ln x - \ln y = \ln \frac{x}{y}$ :

$$\phi = \frac{A}{4a} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}$$

- d)

$$\begin{aligned} \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} &= \frac{x^2 + 2ax + a^2 + y^2}{x^2 - 2ax + a^2 + y^2} \\ &= \frac{x^2 + y^2 + 2ax + a^2}{x^2 + y^2 - 2ax + a^2} \\ &= \frac{1 + \frac{2ax}{x^2+y^2} + \frac{a^2}{x^2+y^2}}{1 - \frac{2ax}{x^2+y^2} + \frac{a^2}{x^2+y^2}}. \end{aligned}$$

Siden  $x^2 + y^2 \gg a^2$  kan vi gjøre tilnærmingen  $\frac{a^2}{x^2 + y^2} \approx 0$  og brøken blir

$$\approx \frac{1 + \frac{2ax}{x^2+y^2}}{1 - \frac{2ax}{x^2+y^2}} = \frac{1 + \frac{1}{2}\epsilon}{1 - \frac{1}{2}\epsilon}.$$

- e) Vi innfører funksjonen

$$f(\epsilon) = \frac{1 + \frac{1}{2}\epsilon}{1 - \frac{1}{2}\epsilon}$$

og lager en rekkeutvikling til første orden av  $f$  om punktet  $\epsilon_0$ :

$$\begin{aligned} T_f^1 &= f(\epsilon_0) + f'(\epsilon_0)(\epsilon - \epsilon_0) \\ f'(\epsilon) &= \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}\epsilon) + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}\epsilon)}{(1 - \frac{1}{2}\epsilon)^2} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}\epsilon)^2} \\ \Rightarrow T_f^1 &= \frac{1 + \frac{1}{2}\epsilon_0}{1 - \frac{1}{2}\epsilon_0} + \frac{\epsilon - \epsilon_0}{(1 - \frac{1}{2}\epsilon_0)^2}. \end{aligned}$$

Siden  $\epsilon$  er en liten størrelse:

$$\epsilon = \frac{4ax}{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \gg a^2$$

så vil  $T_f^1$  være en god tilnærming til  $f(\epsilon)$  i omegn av  $\epsilon = 0$ . Vi velger derfor  $\epsilon_0 = 0$ . Dette gir  $T_f^1 = 1 + \epsilon$  og

$$\frac{1 + \frac{1}{2}\epsilon}{1 - \frac{1}{2}\epsilon} \approx 1 + \epsilon.$$

f) Vi innfører funksjonen  $f(\epsilon) = \ln(1 + \epsilon)$ . Taylorutviklingen til første orden av  $f$  om punktet  $\epsilon_0$  blir

$$\begin{aligned} T_f^1 &= f(\epsilon_0) + f'(\epsilon_0)(\epsilon - \epsilon_0) \\ &= \ln(1 + \epsilon_0) + \frac{\epsilon - \epsilon_0}{1 + \epsilon_0}. \end{aligned}$$

Vi velger  $\epsilon_0 = 0$  med samme begrunnelse som i oppgave e) og får  $T_f^1 = \epsilon$  som gir

$$\ln(1 + \epsilon) \approx \epsilon.$$

Vi kan nå finne det ønskede uttrykket for hastighetspotensialet:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{A}{4a} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \\ \text{oppg.d)} &= \frac{A}{4a} \ln \frac{1 + \frac{1}{2}\epsilon}{1 - \frac{1}{2}\epsilon} \\ \text{oppg.e)} &= \frac{A}{4a} \ln(1 + \epsilon) \\ \text{oppg.f)} &= \frac{A}{4a} \epsilon \\ &= \frac{Ax}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

## Oppgave 4

Vi har gitt to potensialfelt  $\psi_1 = Uy$  (translasjonsfelt/rettlinjet strøm) og  $\psi_2 = -A\theta$  (kilde). For at vi skal kunne superponere feltene må både  $\psi_1$  og  $\psi_2$  være beskrevet i samme koordinatsystem. Vi skriver  $\psi_1$  i polarkoordinater:  $\psi_1 = Ur \sin \theta$ . Det sammensatte feltet kan skrives som

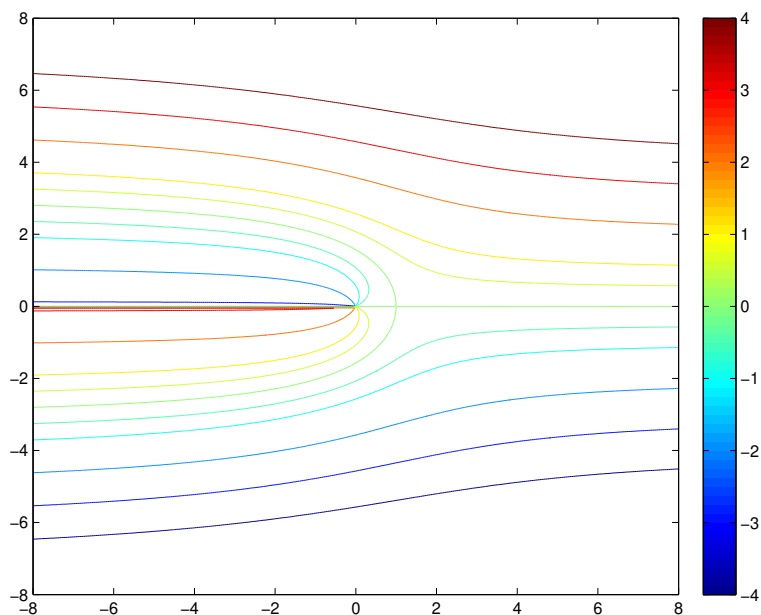
$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = Ur \sin \theta - A\theta.$$

Strømlinjene finnes ved å sette strømfunksjonen konstant ( $\psi_0$ ):

$$\begin{aligned} \psi_0 &= Ur \sin \theta - A\theta \\ \Rightarrow r &= \frac{\psi_0}{U \sin \theta} + \frac{A\theta}{U \sin \theta}. \end{aligned}$$

Se figur 9.3: Legg spesielt merke til at det er et stagnasjonspunkt like til høyre for origo, og at en strømlinje som går igjennom stagnasjonspunktet krummer seg som en "skål" mot venstre.





Figur 9.3: Strømlinjene  $\psi_0 = -4, -3, -2, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 2, 3, 4$ . Konstantene er satt til å være  $U = A = 1$ .

## Oppgave 5

En kilde i origo er gitt i polarkoordinater som

$$\phi = A \ln r$$

$$\psi = -A\theta.$$

Fra  $x = r \cos \theta$  og  $y = r \sin \theta$  får vi

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \text{atan2}(y, x),$$

se kommentar på side 94 for en beskrivelse av funksjonen  $\text{atan2}$ .

Dette gir hastighetspotensialet og strømfunksjonen i kartesiske koordinater:

$$\phi = A \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\psi = -A \text{atan2}(y, x).$$

Strømvektoren  $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$  kan finnes fra likningene

$$(1) \quad v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3)$$

$$(2) \quad v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (4).$$

Her er det valgfritt om vi bruker (1) eller (2), og (3) eller (4). (1) gir

$$\begin{aligned}
 v_x &= -\frac{\partial\psi}{\partial y} \\
 &= \frac{A}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} \\
 &= \frac{A}{x + \frac{y^2x}{x^2}} \\
 &= \frac{Ax}{x^2 + y^2} \\
 &= \frac{Ax}{r^2}.
 \end{aligned}$$

(3) gir

$$\begin{aligned}
 v_y &= \frac{\partial\psi}{\partial x} \\
 &= -\frac{A}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \\
 &= \frac{Ay}{x^2 + y^2} \\
 &= \frac{Ay}{r^2}.
 \end{aligned}$$

## Oppgave 6

Fra oppgave 5 har vi  $\phi$  og  $\psi$  for en kilde med styrke  $A$  i origo i kartesiske koordinater. For å finne uttrykket for en kilde utenfor origo trenger vi bare å justere koordinatene.

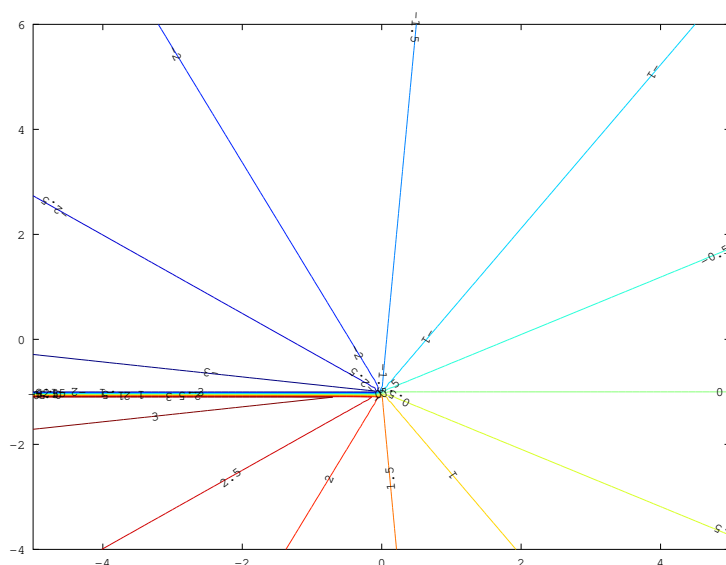
- En kilde i punktet  $(0, a)$ :

$$\begin{aligned}
 \phi &= A \ln(x^2 + (y - a)^2)^{1/2} \\
 \psi &= -A \operatorname{atan2}(y - a, x).
 \end{aligned}$$

- En kilde i punktet  $(0, -a)$ :

$$\begin{aligned}
 \phi &= A \ln(x^2 + (y + a)^2)^{1/2} \\
 \psi &= -A \operatorname{atan2}(y + a, x).
 \end{aligned}$$

Se figur 9.4, og legg spesielt merke til at det er problematisk å tegne konturplott for  $\psi$  med Matlab sin `contour`-funksjon fordi `atan2`-funksjonen har et diskontinuerlig hopp mellom  $-\pi$  og  $\pi$  rett til venstre for det singulære punktet. Se kommentar på side 94 for en beskrivelse av funksjonen `atan2`.



Figur 9.4: Strømlinjene til kilden i punktet  $(0, -a)$  med  $A = a = 1$ .

## Oppgave 7

En punktvirvel i origo er i polarkoordinater gitt ved

$$\phi = A\theta$$

$$\psi = A \ln r.$$

For å skrive  $\phi$  og  $\psi$  i kartesiske koordinater kan vi bruke likningene

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \text{atan2}(y, x),$$

se kommentar på side 94 for en beskrivelse av funksjonen  $\text{atan2}$ .

Hastighetspotensialet og strømfunksjonen blir dermed

$$\phi = A \text{atan2}(y, x)$$

$$\psi = A \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Komponentene til strømvektoren kan vi finne på samme måte som i oppgave 5:

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{Ay}{r^2}$$

$$v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{Ax}{r^2}.$$

## Oppgave 8

Vi har gitt strømfunksjonen til to potensialfelt:

$$\psi_1 = -Uy, \quad \psi_2 = \frac{Ay}{x^2 + y^2}.$$

Det superponerte feltet har strømfunksjon

$$\psi = -Uy + \frac{Ay}{x^2 + y^2}.$$

a) Vi innfører polarkoordinater ved  $x = r \cos \theta$  og  $y = r \sin \theta$ :

$$\begin{aligned}\psi &= -Ur \sin \theta + \frac{a^2 U r \sin \theta}{r^2} \\ &= -U \left[ 1 - \frac{a^2}{r^2} \right] r \sin \theta.\end{aligned}$$

b) Strømkomponentene kan finnes fra likningene

$$\begin{aligned}v_r &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ v_r &= -\frac{1}{r} (-U) \left[ 1 - \frac{a^2}{r^2} \right] r \cos \theta \\ &= U \left[ 1 - \frac{a^2}{r^2} \right] \cos \theta \\ v_\theta &= -U \sin \theta - \frac{U a^2}{r^2} \sin \theta \\ &= -U \left[ 1 + \frac{a^2}{r^2} \right] \sin \theta.\end{aligned}$$

På sirkellinjen  $r = a$  blir strømkomponentene  $v_r(r=a) = 0$  og  $v_\theta(r=a) = -2U \sin \theta$ .

## Oppgave 9

Den elektriske feltstyrken utenfor en elektrisk ladet partikkel er gitt ved

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{r^2} \mathbf{i}_r.$$

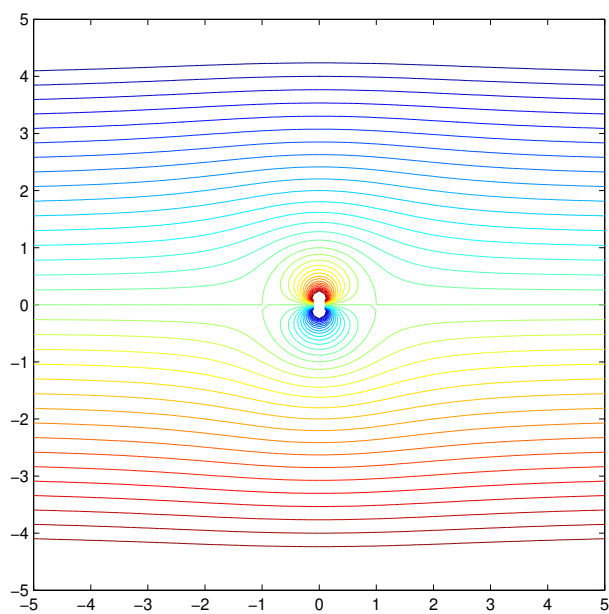
Potensialet,  $V$ , er gitt ved  $\mathbf{E} = -\nabla V$ . I denne oppgaven må vi bruke kulekoordinater, og vi har at

$$\begin{aligned}\nabla V &= \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \mathbf{i}_\varphi \\ \frac{Q}{r^2} &= -\frac{\partial V}{\partial r} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{Q}{r} + f_1(\theta, \varphi) \\ 0 &= -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \quad \Rightarrow \quad V = f_2(r, \varphi) \\ 0 &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \quad \Rightarrow \quad V = f_3(r, \theta)\end{aligned}$$

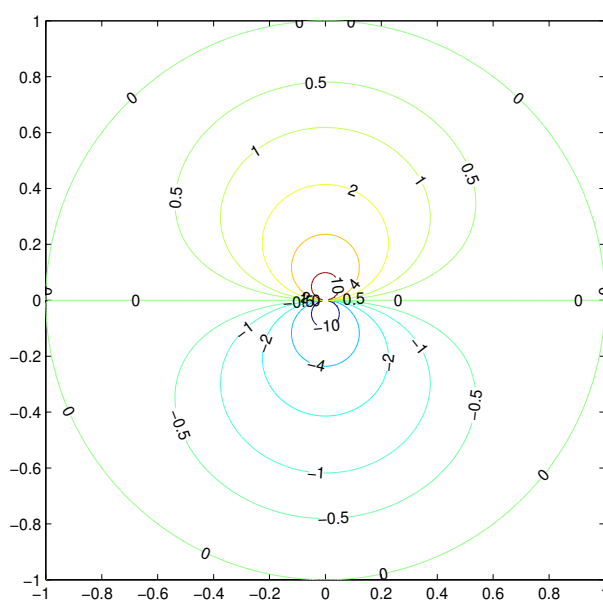
Potensialet blir derfor

$$V = V(r) = \frac{Q}{r} + C$$

hvor  $C$  er en vilkårlig konstant.



Figur 9.5: Strøm rundt en sylinder ( $r > a$ )



Figur 9.6: Feltet for  $r < a$  blir et dipolfelt.

**Kommentar om funksjonen  $\text{atan2}(y, x)$** 

Et punkt i  $xy$ -planet har posisjonsvektor  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ . Vinkelen mellom posisjonsvektor og positiv  $x$ -akse er gitt ved  $\text{atan2}(y, x)$ . Dersom punktet ligger i første eller fjerde kvadrant har vi  $\text{atan2}(y, x) = \arctan(y/x)$ . Dersom punktet ligger i andre kvadrant har vi  $\text{atan2}(y, x) = \arctan(y/x) + \pi$ . Dersom punktet ligger i tredje kvadrant har vi  $\text{atan2}(y, x) = \arctan(y/x) - \pi$ .

## Kapittel 10

# Feltlikninger for fluider

### Oppgave 1

Gitt et to-dimensjonalt strømfelt

$$\mathbf{v} = -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j}.$$

a) Den konvekktive akselerasjonen for et to-dimensjonalt felt er gitt ved

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \\ &= -\omega y \omega \mathbf{j} + \omega x (-\omega \mathbf{i}) \\ &= -\omega^2 (x \mathbf{i} + y \mathbf{j}). \end{aligned}$$

b) Bevegelseslikninga (Euler-likninga):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}.$$

Feltet er uavhengig av tiden og trykkraften er den eneste kraften som virker slik at  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$  og  $\mathbf{g} = 0$ . Bevegelseslikninga forenkler seg til

$$-\omega^2 (x \mathbf{i} + y \mathbf{j}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

og trykkgradienten blir

$$\nabla p = \rho \omega^2 (x \mathbf{i} + y \mathbf{j}).$$

Trykket finner vi ved å skrive ut trykkgradientens komponenter

$$\frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} = \rho \omega^2 (x \mathbf{i} + y \mathbf{j}).$$

Dette er ei vektorlikning med to likninger for å bestemme  $p$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} = \rho \omega^2 x &\Rightarrow p(x, y) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 x^2 + f_1(y) \\ \frac{\partial p}{\partial y} = \rho \omega^2 y &\Rightarrow p(x, y) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 y^2 + f_2(x). \end{aligned}$$

For å få en entydig  $p$  må vi velge

$$f_1(y) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 y^2 + C, \quad f_2(x) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 x^2 + C$$

slik at det generelle uttrykket for trykket blir

$$p(x, y) = \frac{1}{2}\rho\omega^2(x^2 + y^2) + C.$$

Trykket i origo skal være lik  $p_0$ :  $p(0, 0) = C = p_0$  slik at

$$p(x, y) = \frac{1}{2}\rho\omega^2(x^2 + y^2) + p_0.$$

## Oppgave 2

Prisen per kilo for et parti laks er gitt ved formelen

$$P = 40 + 5 \cdot 10^{-2}x - 10t.$$

a) Endringen i verdien per tid av laksen er gitt ved den partikkelderiverte til  $P$ :

$$\frac{DP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla P.$$

Hastighetsfeltet kan skrives som  $\mathbf{v} = 600\mathbf{i}$  der  $\mathbf{i}$  er en enhetsvektor i retning sørover fra Trondheim. Vi får da

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= -10 \\ \mathbf{v} \cdot \nabla P &= 600 \frac{\partial P}{\partial x} = 600 \cdot 5 \cdot 10^{-2} = 30 \end{aligned}$$

og endringen i prisen per døgn per kilo blir

$$\frac{DP}{dt} = -10 + 30 = 20.$$

b) Prisendringen på grunn av alder er gitt ved den lokaldrivererte av  $P$  med hensyn på tid:  $\frac{\partial P}{\partial t} = -10$ . Prisendringen på grunn av forskjell i markedspris er gitt ved den konvektivt deriverte:  $\mathbf{v} \cdot \nabla P = 30$ .

c) For at laksen ikke skal avta i verdi må  $\frac{DP}{dt} \geq 0$ , dvs.

$$\mathbf{v} \cdot \nabla P \geq -\frac{\partial P}{\partial t} = 10.$$

La  $v_x$  være (gjennomsnittshastigheten til traileren. Vektorfeltet kan da skrives som  $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i}$  og

$$\begin{aligned} v_x \cdot 5 \cdot 10^{-2} &\geq 10 \\ v_x &\geq 10 \cdot 5^{-1} \cdot 10^2 \\ v_x &\geq 200. \end{aligned}$$

Traileren må altså kjøre i minst 200 km per døgn for at verdien av laksen ikke skal avta.



### Oppgave 3

Et punktvirvelfelt er gitt ved

$$v_x = -\frac{Ay}{r^2}, \quad v_y = \frac{Ax}{r^2}, \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

a) Den konvekktive akselerasjonen er gitt ved

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \\ &= v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \\ &= -\frac{Ay}{r^2} \left[ \frac{Ay \cdot 2x}{r^4} \mathbf{i} + \frac{A(x^2 + y^2) - Ax \cdot 2x}{r^4} \mathbf{j} \right] \\ &\quad + \frac{Ax}{r^2} \left[ \frac{-A(x^2 + y^2) + Ay \cdot 2y}{r^4} \mathbf{i} - \frac{Ax \cdot 2y}{r^4} \mathbf{j} \right] \\ &= -\frac{A^2}{r^3} \left[ \frac{2xy^2 + x^3 - xy^2}{r^3} \mathbf{i} + \frac{y^3 - yx^2 + 2x^2y}{r^3} \mathbf{j} \right] \\ &= -\frac{A^2}{r^3} \left[ \frac{x(x^2 + y^2)}{r^3} \mathbf{i} + \frac{y(x^2 + y^2)}{r^3} \mathbf{j} \right] \\ &= -\frac{A^2}{r^3} \left[ \frac{x}{r} \mathbf{i} + \frac{y}{r} \mathbf{j} \right] \\ &= -\frac{A^2}{r^3} \frac{\mathbf{r}}{r}. \end{aligned}$$

b) Sentripetalakselerasjonen må ha retning normalt på en sirkelbue inn mot origo. Retningen til  $\mathbf{a}$  er  $-\mathbf{r}$  som peker inn mot origo.

c) Trykkgradienten kan finnes fra Euler-likninga:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}.$$

Feltet er stasjonært (uavhengig av tiden) og det er ingen ytre krefter som virker inn. Euler-likninga forenkler seg da til

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p \\ -\frac{A^2}{r^3} \frac{\mathbf{r}}{r} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p \\ \nabla p &= \rho \frac{A^2}{r^3} \frac{\mathbf{r}}{r}. \end{aligned}$$

Vektoren  $\mathbf{r}$  kan vi uttrykke i polakoordinater som  $\mathbf{r} = r\mathbf{i}_r$ . Gradientvektoren i polarkoordinater er

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta.$$

Vi får følgende likninger for løsning av  $p$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial r} &= \rho \frac{A^2}{r^3} &\Rightarrow & p(r, \theta) = \rho A^2 \left( -\frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \right) + f(\theta) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} &= 0 &\Rightarrow & p = p(r) \quad \Rightarrow \quad f(\theta) = C.\end{aligned}$$

Med betingelsen om at trykket uendelig langt fra origo er  $p_0$  får vi  $p(r \rightarrow \infty) = p_0 \Rightarrow C = p_0$  og trykket blir

$$p(r) = p_0 - \frac{\rho A^2}{2r^2}.$$

## Oppgave 4

Gitt hastighetsfeltet

$$\mathbf{v} = \frac{x}{1+t} \mathbf{i} + \frac{2y}{1+t} \mathbf{j} - \frac{3z}{1+t} \mathbf{k}. \quad (10.1)$$

Den lokale akselerasjonen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\frac{x}{(1+t)^2} \mathbf{i} - \frac{2y}{(1+t)^2} \mathbf{j} + \frac{3z}{(1+t)^2} \mathbf{k} \\ &= -\frac{1}{(1+t)^2} [x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 3z\mathbf{k}].\end{aligned}$$

Den konvektive akselerasjonen:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \\ &= \frac{x}{1+t} \frac{\mathbf{i}}{1+t} + \frac{2y}{1+t} \frac{2\mathbf{j}}{1+t} - \frac{3z}{1+t} \left( -\frac{3\mathbf{k}}{1+t} \right) \\ &= \frac{1}{(1+t)^2} [x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + 9z\mathbf{k}].\end{aligned}$$

## Oppgave 5

Gitt et hastighetsfelt:

$$\mathbf{v} = ax\mathbf{i} + 2ay\mathbf{j} - 3az\mathbf{k}, \quad a > 0.$$

a) Strømmen til en inkompressibel væske må være divergensfri:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = a + 2a - 3a = 0.$$

b) Feltet er stasjonært slik at akselerasjonen er gitt ved den konvektive akselerasjonen.

Det nye feltet er identisk med feltet i likning 10.1 hvis vi setter  $a = \frac{1}{1+t}$ . Vi har da regnet ut den konvektive akselerasjonen før:

$$\mathbf{a} = a^2 [x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + 9a\mathbf{k}].$$

c) Euler-likninga for et stasjonært felt som ikke er påvirket av ytre krefter:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p \\ \nabla p &= -\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \\ &= -\rho a^2 [x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + 9a\mathbf{k}]. \end{aligned}$$

Størrelsen til trykkgradienten:

$$|\nabla p| = \rho a^2 \sqrt{x^2 + 16y^2 + 81z^2}.$$

Retningen:

$$-[x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + 9z\mathbf{k}].$$

## Oppgave 6

Vi har gitt et to-dimensjonalt hastighetsfelt

$$\mathbf{v} = \frac{Q}{r^2} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$$

der  $Q$  er en konstant.

a) Vi har en strøm for en inkompressibel væske dersom divergensen er null:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= Q \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) + Q \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \\ &= Q \frac{x^2 + y^2 - 2x \cdot x}{(x^2 + y^2)^2} + Q \frac{x^2 + y^2 - 2y \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= Q \frac{x^2 + y^2 - 2x^2 + x^2 + y^2 - 2y^2}{r^4} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Strømlinjene finner vi fra likninga  $\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = 0$ , som blir  $v_x dy = v_y dx$ :

$$\frac{Q}{r^2} x dy = \frac{Q}{r^2} y dx.$$

Denne differensiallikninga er separabel, før vi integrerer forkorter vi så mye som mulig og sørger for at alle  $x$ 'ene er på samme side som  $dx$  og alle  $y$ 'ene er på samme side som  $dy$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} dy &= \frac{1}{x} dx \\ \ln |y| &= \ln |x| + C \\ |y| &= e^{\ln |x| + C} \\ &= e^C e^{\ln |x|} \\ y &= Ax \end{aligned}$$

Strømlinjene er altså rette linjer som går gjennom origo. Retningen avhenger av fortegnet til konstanten  $Q$ .

b) Massestrømmen er gitt ved integralet

$$M = \int_{\sigma} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

der  $\mathbf{n}$  er normalvektoren til flaten  $\sigma$ . På en sylinderflate er  $\mathbf{n} = \mathbf{i}_r$ . La oss uttrykke vektorfeltet i polarkoordinater:

$$\mathbf{v} = \frac{Q}{r^2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = \frac{Q}{r^2}r\mathbf{i}_r = \frac{Q}{r}\mathbf{i}_r.$$

Massestrømmen blir dermed

$$\begin{aligned} M &= \int_{\sigma} \rho \frac{Q}{r} \mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}_r d\sigma \\ &= \rho \frac{Q}{r} \int_{\sigma} d\sigma \\ &= \rho \frac{Q}{r} \cdot A \end{aligned}$$

der  $A$  er arealet til sylinderflaten:  $A = 2\pi r h$  ( $h$  er høyden til sylindren).

$$\begin{aligned} M &= \rho \frac{Q}{r} 2\pi r h \\ &= 2\pi \rho Q h. \end{aligned}$$

c) Akselerasjonen for en væskepartikkel i feltet er gitt ved den konvekktive akselerasjonen siden feltet er stasjonært.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \\ &= \frac{Q}{r^2} x \left[ \frac{Q(x^2 + y^2) - Qx \cdot 2x}{r^4} \mathbf{i} + \frac{-Qy \cdot 2x}{r^4} \mathbf{j} \right] \\ &\quad + \frac{Q}{r^2} y \left[ \frac{-Qx \cdot 2y}{r^4} \mathbf{i} + \frac{Q(x^2 + y^2) - Qy \cdot 2y}{r^4} \mathbf{j} \right] \\ &= \frac{Q^2}{r^4} \left[ \frac{x(x^2 + y^2 - 2x^2 - 2y^2)}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{y(x^2 + y^2 - 2y^2 - 2x^2)}{x^2 + y^2} \mathbf{j} \right] \\ &= \frac{Q}{r^4} \left[ -x \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \mathbf{i} - y \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \mathbf{j} \right] \\ &= -\frac{Q^2}{r^4} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}). \end{aligned}$$

## Oppgave 7

## Oppgave 8

For en inkompressibel væske i en stasjonær strøm har vi

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0.$$

Massestrømmen i  $A$ :

$$\begin{aligned} M_A &= \int_{\sigma} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = U \\ &= \rho U \int_{\sigma} d\sigma \\ &= \rho U A. \end{aligned}$$

Massestrømmen i  $a$ :

$$M_a = \int_{\sigma} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \rho U_a a$$

der  $U_a$  er strømhastigheten i  $a$  som vi ønsker å finne. Siden vi har en inkompressibel væske må det strømme like mye gjennom  $A$  som  $a$ :

$$\begin{aligned} M_A &= M_a \\ \rho U A &= \rho U_a a \\ \Rightarrow U_a &= \frac{U A}{a}. \end{aligned}$$

Vi ønsker nå å finne trykket i  $a$ . Hvis vi følger en strømlinje fra  $A$  til  $a$  vil  $\mathcal{H}$  fra Bernoullis likning være konstant og vi får

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2} U^2 + gz &= \frac{p_a}{\rho} + \frac{1}{2} \left( \frac{U A}{a} \right)^2 + gz \\ p_a &= p_0 + \frac{1}{2} \rho U^2 - \frac{1}{2} \rho U^2 \frac{A^2}{a^2} \\ &= p_0 + \frac{1}{2} \rho U^2 \left[ 1 - \frac{A^2}{a^2} \right]. \end{aligned}$$

## Oppgave 9

a) Massestrømmen i  $a$ :

$$\int_{\sigma} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \rho U \int_{\sigma} d\sigma = \rho U a.$$

Massestrømmen i  $b$  (et av rørene):

$$\int_{\sigma} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \rho U_b \int_{\sigma} d\sigma = \rho U_b b.$$

Vi har en inkompressibel væske så massestrømmen må være konstant:

$$\begin{aligned} \rho U a &= \rho U_b b \\ U_b &= \frac{U a}{2b} \end{aligned}$$

b) Vi følger en strømlinje fra  $a$  til  $b$  (et av rørene):

$$\begin{aligned}\frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}U^2 + gz &= \frac{p_b}{\rho} + \frac{1}{2}\left(\frac{Ua}{2b}\right)^2 + gz \\ p_b &= p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 - \frac{1}{2}\rho \frac{U^2 a^2}{4b^2} \\ &= p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 \left[1 - \frac{a^2}{4b^2}\right].\end{aligned}$$

## Oppgave 10

Fra oppgave 9.8 har vi strømkomponentene til en strøm omkring en sylinder i polarkoordinater

$$\begin{aligned}v_r &= U \left[1 - \frac{a^2}{r^2}\right] \cos \theta \\ v_\theta &= -U \left[1 + \frac{a^2}{r^2}\right] \sin \theta\end{aligned}$$

der  $\mathbf{v} = v_r \mathbf{i}_r + v_\theta \mathbf{i}_\theta$  og  $a$  er radius til sylindere. La oss kalle et punkt på sylinderflaten for  $A$  og et punkt langt oppstrøms fra sylindere for  $B$ . Følger vi en strømlinje fra  $A$  til  $B$  vil  $\mathcal{H}$  fra Bernoullis likning være konstant og vi får

$$\frac{p_A}{\rho} + \frac{1}{2}\mathbf{v}_A^2 + gz = \frac{p_B}{\rho} + \frac{1}{2}\mathbf{v}_B^2 + gz. \quad (10.2)$$

I punktet  $A$ :

$$\begin{aligned}v_r(r=a) &= 0 \\ v_\theta(r=a) &= -2U \sin \theta.\end{aligned}$$

I punktet  $B$ :

$$\begin{aligned}r \gg a &\Rightarrow v_r = U \cos \theta, \quad v_\theta = -U \sin \theta \\ \theta = 0 &\Rightarrow v_r = U, \quad v_\theta = 0\end{aligned}$$

$$p_B = p_0$$

Innsatt i likning 10.2 gir dette

$$\begin{aligned}\frac{p_A}{\rho} + \frac{1}{2}(-2U \sin \theta)^2 &= \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}U^2 \\ p_A &= p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 - 2\rho U^2 \sin^2 \theta \\ &= p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 \left[1 - 4 \sin^2 \theta\right].\end{aligned}$$

## Kapittel 11

# Varmetransport i fluider og faste stoffer

### Oppgave 1

Denne oppgaven hører egentlig hjemme i kapittel 10. Ved en feiltakelse har den endt opp her i kapittel 11.

- a) Hvis vi bruker Bernoullis likning på en strømlinje fra overflaten av vannet ( $O$ ) til tappestedet ( $P$ ) får vi:

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}v_0^2 = \frac{p_P}{\rho} + \frac{1}{2}v_P^2 - gh$$

der vi har lagt nullpunktet for høyden langs vannets overflate. Vi antar nå at trykket ved  $P$  er tilnærmet lik lufttrykket ved vannets overflate ( $p_0$ ) og at strømhastigheten ved overflaten ( $v_0$ ) er mye mindre enn strømhastigheten i røret ( $v_P$ ) slik at  $v_0 \ll v_P \Rightarrow v_0 \approx 0$ . Bernoullis likning forenkler seg dermed til

$$0 = \frac{1}{2}v_P^2 - gh$$

$$v_P = \sqrt{2gh}.$$

- b) Vi følger nå en strømlinje gjennom røret fra det høyeste punktet ( $A$ ) til tappestedet ( $P$ ).  $\mathcal{H}$  er konstant og vi får

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2 - g(h - H) = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}v_P^2 - gh.$$

Siden massestrømmen er konstant må  $v_A = v_P$  (vann er inkompressibelt og tverrsnittet i røret antas konstant) og likninga over forenkler seg til

$$p_A = p_0 - \rho gh + \rho g(h - H)$$

$$= p_0 - \rho gH.$$

- c) Vi har at lufttrykket er gitt som  $p_0 = 1.01325 \cdot 10^5 \text{Pa}$ . Vi ønsker at trykket i  $A$  ( $p_A$ ) ikke skal bli lavere enn vannets damptrykk på  $2.335 \cdot 10^3 \text{Pa}$ . Vi må altså løse ulikheten

$$p_A \geq 2.335 \cdot 10^3 \text{Pa:}$$

$$\Rightarrow p_0 - \rho g H \geq 2.335 \cdot 10^3 \text{Pa}$$

$$H \leq \frac{1}{\rho g} (p_0 - 2.335 \cdot 10^3 \text{Pa})$$

$$H \leq \frac{1}{\rho g} (1.01325 \cdot 10^5 \text{Pa} - 2.335 \cdot 10^3 \text{Pa})$$

$$H \leq 9.899 \cdot 10^4 \text{Pa} \frac{1}{\rho g}.$$

**Oppgave 2**

**Oppgave 3**

**Oppgave 4**

**Oppgave 5**