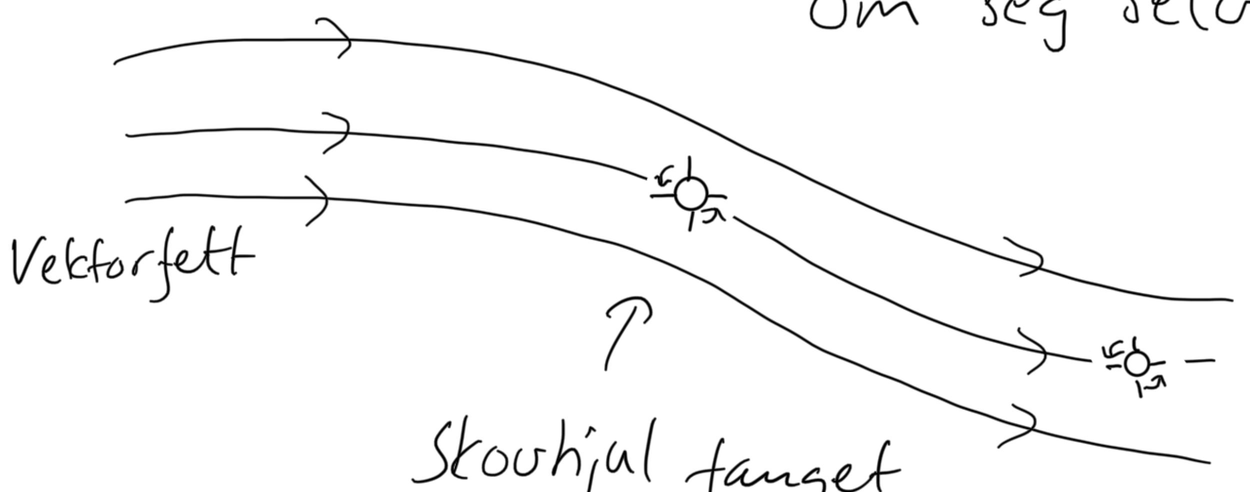
Virvling (curl)

M 3,4

curl $\vec{u}$

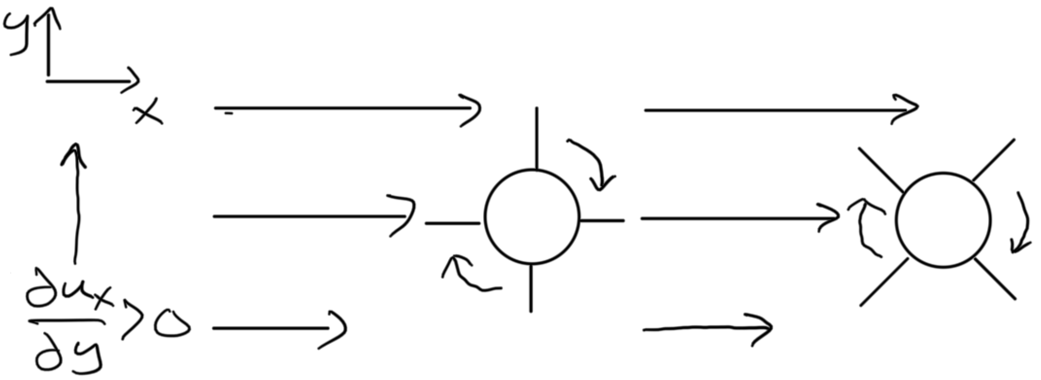
$\nabla \times \vec{u}$

Virvling er et vektorfelts tendens til å rotere en liten partikkel i et gitt punkt om seg selv



Hvis skovlhjulet roterer som følge av strømningen, så er det virvling i vektorfeltet.

La oss zoome inn



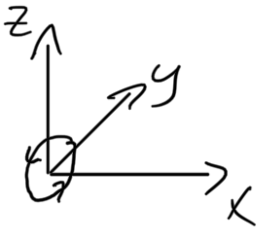
Hvis strømningsfeltet er slik at hastigheten på den ene siden er større enn den andre, så vil skovhjulet starte å rotere om eget sentrum mens det driver med strømmen.
Man har altså virvling der man har hastighetsgradienter.

Definisjon på virvling

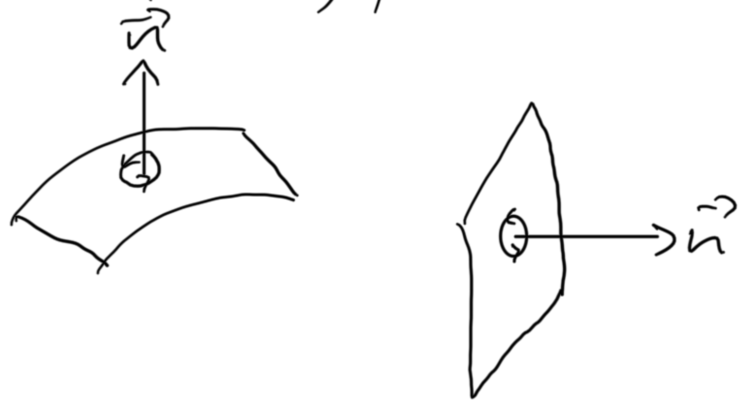
$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$\nabla \times \vec{u}$ er en vektor med tre komponenter.

$\mathbf{i} \cdot \nabla \times \vec{u}$ er virvling rundt x-aksen for et punkt på yz-planet



$\vec{n} \cdot \nabla \times \vec{u}$ er virvling i et plan (flate), der $\vec{n}$ er normalvektor.



Vi definerer virvlingen for en gitt normalvektor $\vec{n}$ som

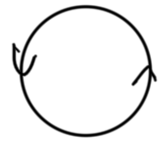
$$\vec{n} \cdot \nabla \times \vec{u} = \lim_{A \to 0} \frac{1}{A} \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{r}$$

der A er et lite flateelement med $\vec{n}$ som normalvektor og C som kurven som lukkes rundt A

$$\oint_C \vec{u}\cdot d\vec{r} = \text{Sirkulasjon}$$

$\Rightarrow$ Virvling i punktet P = <u>Sirkulasjon</u> rundt en flate A, som krymper mot P når $A \to 0$

Vi finner $\vec{n}$ sin retning på flaten med høyrehåndsregel. La 4 fingre peke samme vei som sirkulasjonen, da vil tommelen peke i retning av $\vec{n}$.



$\vec{n}$ peker opp, ut av arket

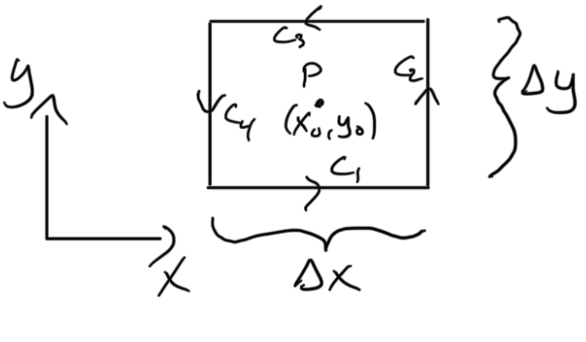
$\vec{n}$ peker ned, inn i arket

Vil nå vise at

$$\vec{n}\cdot\nabla\times\vec{u} = \lim_{A\to 0}\frac{1}{A}\oint_C \vec{u}\cdot d\vec{r}$$

for Kartesiske koordinater.

Velger $\vec{n} = \mathbb{k}$ og tegner et rektangel om punktet $P: (x_0, y_0)$ i xy-planet



Rektangelet er så lite at vi regner $\vec{u}$ som konstant på en gitt side.

Rektangelet har 4 sider, og vi finner sirkulasjonen ved

$$\oint_C \vec{u}\cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^{4} \int_{C_i} \vec{u}\cdot d\vec{r}$$

C_1: $\int_{C_1} \vec{u}\cdot d\vec{r}$, $\vec{r} = \left(\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}\right) + \Delta x \cdot t\right)\mathbf{i} + \left(y_0 - \frac{\Delta y}{2}\right)\mathbf{j}$

$= \int_{t=0}^{1} \vec{u}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\,dt \qquad t\in[0,1] \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \Delta x\,\mathbf{i}$

$= \int_0^1 \vec{u}\cdot\Delta x\,\mathbf{i}\,dt = \int_0^1 u_x\,\Delta x\,dt = u_x\Delta x\int_0^1 dt$

Antar nå at u_x er konstant langs C_1 => Vi bruker midtpunkt-regel for integrasjon

$$\Rightarrow \int_{C_1} \vec{u}\cdot d\vec{r} \approx \underline{u_x\left(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x}$$

C_2:

$\int_{C_2} \vec{u}\cdot d\vec{r}$, $\quad \vec{r} = \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\mathbf{i} + \left(\left(y_0 - \frac{\Delta y}{2}\right) + \Delta y\,t\right)\mathbf{j}$

$= \int_{t=0}^{1} \vec{u}\cdot\Delta y\,\mathbf{j}\,dt \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} = \Delta y\,\mathbf{j}, \quad t\in[0,1]$

$$= \int_{t=0}^{1} u_y \Delta y \, dt \approx \underline{u_y\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0\right) \Delta y}$$

C_3: $\displaystyle\int_{C_3} \vec{u} \cdot d\vec{r}$, $\vec{r} = \left(\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) - \Delta x t\right) \mathbf{i} + \left(y_0 + \frac{\Delta y}{2}\right) \mathbf{j}$

$$= \int_{t=0}^{1} \vec{u} \cdot (-\Delta x \mathbf{i}) \, dt \qquad t \in [0,1]$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -\Delta x \mathbf{i}$$

$$= -\int_{t=0}^{1} u_x \Delta x \, dt \approx \underline{-u_x\left(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}\right) \Delta x}$$

C_4: $\displaystyle\int_{C_4} \vec{u} \cdot d\vec{r}$, $\vec{r} = \left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}\right) \mathbf{i} + \left(\left(y_0 + \frac{\Delta y}{2}\right) - \Delta y t\right) \mathbf{j}$

$$= \int_{t=0}^{1} \vec{u} \cdot (-\Delta y \mathbf{j}) \, dt \qquad t \in [0,1], \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = -\Delta y \mathbf{j}$$

$$= -\int_{t=0}^{1} u_y \Delta y \, dt \approx \underline{-u_y\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0\right) \Delta y}$$

Summerer $C_1 - C_4$

$$\oint_C \vec{u}\cdot d\vec{r} \approx \Big(\overset{C_1}{u_x\left(x_0, y_0 - \tfrac{\Delta y}{2}\right)} \overset{+}{-} \overset{C_3}{u_x\left(x_0, y_0 + \tfrac{\Delta y}{2}\right)}\Big)\Delta x$$

$$+ \Big(\overset{C_2}{u_y\left(x_0 + \tfrac{\Delta x}{2}, y_0\right)} \overset{+}{-} \overset{C_4}{u_y\left(x_0 - \tfrac{\Delta x}{2}, y_0\right)}\Big)\Delta y$$

Deler på areal $A = \Delta x \Delta y$

$$\frac{1}{A}\oint \vec{u}\cdot d\vec{r} \approx \frac{u_x\left(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}\right) - u_x\left(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}\right)}{\Delta y}$$

$$+ \frac{u_y\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0\right) - u_y\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0\right)}{\Delta x}$$

Tar grensen $A \to 0$
og finner

Approksimasjonen blir eksakt i grensen.

$$\lim_{A \to 0} \frac{1}{A}\oint \vec{u}\cdot d\vec{r} = -\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

Stemmer dette med det vi skulle vise?
Må sjekke om $\mathbb{k}\cdot\nabla\times\vec{u}$ er lik høyresiden.

Har

$$\nabla \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{k} \cdot \nabla \times \vec{u} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

Som er samme som

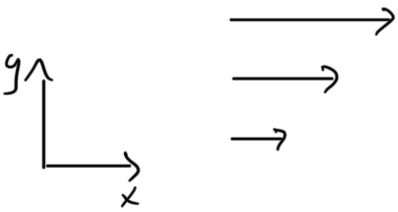
Dermed har vi vist at

$$\mathbf{k} \cdot \nabla \times \vec{u} = \lim_{A \to 0} \frac{1}{A} \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{r}$$

<u>Eksempel</u>

Skjærstrøm

$$\vec{u} = y\mathbf{i}$$



Finn virvlingen i xy-planet

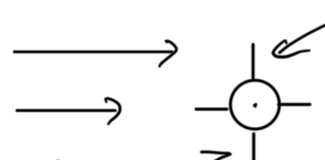
$$\nabla \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i} \cdot 0 + \mathbf{j} \cdot 0 + \mathbf{k}\left(0 - \frac{\partial y}{\partial y}\right)$$

$$\underline{= -\mathbf{k}}$$

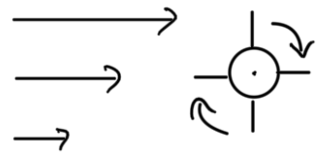
Virvlingen i xy-planet $\underline{\underline{= -1}}$
$(\mathbf{k} \cdot \nabla \times \vec{u})$

Hvorfor har vi virvling når strømningsfeltet er rettlinjet?
Se på et lite skovlhjul plassert midt i strømningsfeltet



Vil skovlhjulet rotere?
Svaret er ja, siden hastighets-vektoren som treffer oppsiden er større enn den som treffer

nedsiden. Skovhjulet vil rotere med klokka

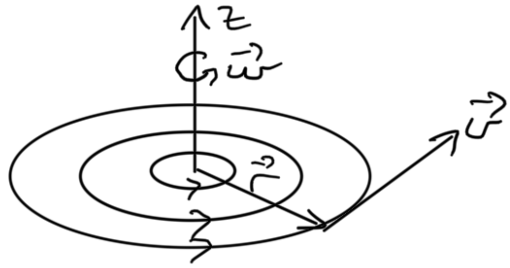


Retningen blir $-\mathbb{k}$, pga høyre-håndsregel. Legg de 4 fingrene som ikke er tomler i retning av rotasjonen. Da peker tommelen inn i arket, i retning $-\mathbb{k}$.

Eksempel

Rotasjon som fast legeme

$$\vec{\omega} = \omega\,\mathbb{k} \quad (\omega = |\vec{\omega}|)$$



Vet at

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Karusell

M: 1.3.1

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \mathbb{i}(-y\omega) + \mathbb{j}\,x\omega$$

$$\vec{v} = \omega(-y\mathbb{i} + x\mathbb{j})$$

Virvlingen i et punkt er

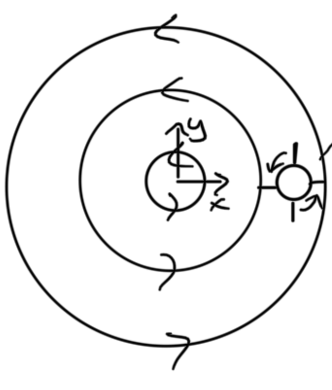
$$\nabla \times \vec{v} = \omega \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbb{k}\left(\frac{\partial x}{\partial x} - \left(\frac{\partial(-y)}{\partial y}\right)\right)\omega$$

$$= \underline{2\omega\mathbb{k}} = \underline{2\vec{\omega}}$$

Virvlingen er 2 ganger rotasjonshastigheten ?

Virvling er ikke samme som rotasjonshastighet. Virvling er rotasjonen rundt seg selv.



Et skovhjul her vil rotere om sitt eget sentrum pga virvling.

Hastigheten som treffer skovhjulet blir større jo lenger man kommer fra midten. Høyrehåndsregel sier oss at virvlingen er i retning k.