Divergensfrie og virvelfrie vektorfelt + strømfunksjoner

GF 4.5–4.6, 6.7

Vi har to typer av vektorfelt med spesielt stor betydning

$$\vec{v} = \nabla\phi \qquad \vec{v} = \nabla\times\vec{\psi}$$

vektorfeltet kan skrives som en gradient av <u>skalarpotensialet</u> ϕ

vektorfeltet kan skrives som virvling av <u>vektorpotensialet</u> $\vec{\psi}$

Hvorfor er disse 2 viktige?

Hvis $\vec{v} = \nabla\phi$, så er $\vec{v}$ <u>virvelfritt</u>.

$$\nabla \times \vec{v} = \nabla \times \nabla \phi = \vec{0}$$

Hvis $\vec{v} = \nabla \times \vec{\Psi}$, så er $\vec{v}$ divergensfritt.

$$\nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot \nabla \times \vec{\Psi} = 0$$

Kan enkelt vise dette i Kartesiske koordinater

$$\nabla \times \nabla \phi = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \mathbb{i}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y}\right)$$

$$+ \mathbb{j}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}\right)$$

$$+ \mathbb{k}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}\right)$$

$= \vec{0}$, siden $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x_j \partial x_i}$

$x_i = (x, y, z)$

$i = 1, 2, 3$

Virvlingen av en gradient er alltid null.

Kan også vise at $\nabla \cdot \nabla \times \vec{\Psi} = 0$

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{\Psi} = \frac{\partial}{\partial x}(\nabla \times \vec{\Psi})_x + \frac{\partial}{\partial y}(\nabla \times \vec{\Psi})_y + \frac{\partial}{\partial z}(\nabla \times \vec{\Psi})_z$$

Har
$$\nabla \times \vec{\Psi} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial \Psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial \Psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_x}{\partial y}\right)$$

og dermed

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{\Psi} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial x}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Psi_y}{\partial x}-\frac{\partial \Psi_x}{\partial y}\right)$$

$$=\underbrace{\frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial y \partial x}}_{0}+\underbrace{\frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial z \partial x}-\frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial x \partial z}}_{0}$$

$$+\underbrace{\frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial y \partial z}-\frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial z \partial y}}_{0}$$

$$=\underline{0}$$

<u>Helmholtz teorem</u> (GF 4.9) sier at et vektorfelt $\vec{v}$ alltid kan skrives som

$$\vec{v}=\nabla\phi+\nabla\times\vec{\Psi}$$

Altså som summen av ett virvelfritt vektorfelt $\nabla\phi$, og ett divergensfritt $\nabla\times\vec{\Psi}$.

Fra dette teoremet følger det at (ved å ta divergensen)

$$\nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot \nabla \phi + \cancel{\nabla \cdot \nabla \times \vec{\psi}}$$

$$\underline{\nabla \cdot \vec{v} = \nabla^2 \phi}$$

og ved å ta virvlingen

$$\nabla \times \vec{v} = \cancel{\nabla \times \nabla \phi} + \nabla \times \nabla \times \vec{\psi}$$

$$\underline{\nabla \times \vec{v} = \nabla \times \nabla \times \vec{\psi}}$$

Dette er to generelle sammenhenger mellom et vektorfelt og feltets skalar og vektorpotensial.

Gitt at $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, og at strømningsfeltet ligger i xy-planet (2D). Hva er skalarpotensialet?

Vi har

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Så ϕ er løsningen til Laplace likningen

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \right)$$

Dette er en partiell differensial-likning, og vi trenger å vite beregningsdomenet og grense-betingelser for å løse den.

En triviell løsning i $\mathbb{R}$ er

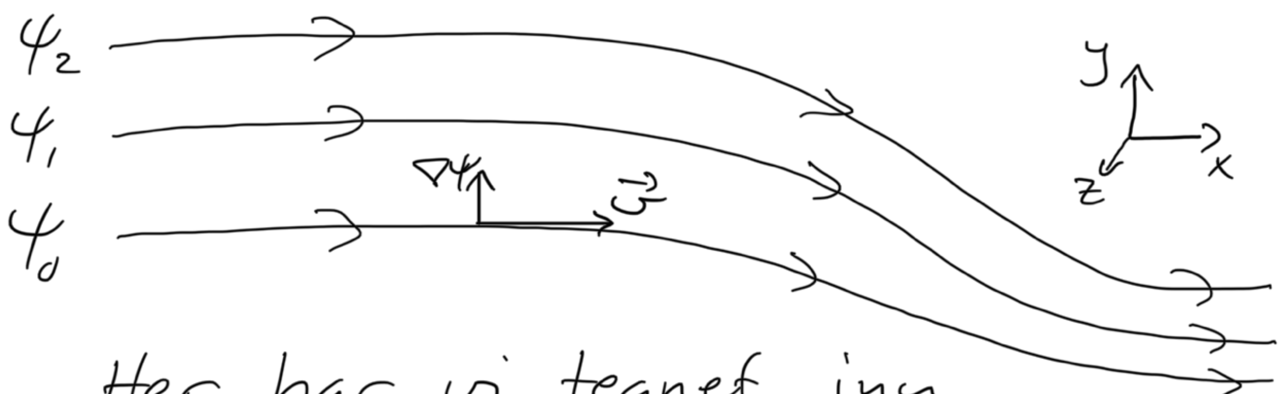
$$\phi = C_0 + C_1 x + C_2 y + C_3 xy$$

der C_i er konstanter.

Å løse Laplace-likningen er en viktig del av de fleste strømnings-simuleringer, og noe vi kommer tilbake til i kap 9 i GF.

Strømfunksjoner

Vi har lært at en strømfunksjon er en funksjon som har strømlinjer som ekviskalarlinjer.



Her har vi tegnet inn 3 strømlinjer, altså konturer av $\psi(x,y)$

Vi husker (forel. 7) at $\quad \nabla\psi \perp \vec{v}$

og at $\quad \nabla\psi \parallel \mathbb{k}\times\vec{v}$

Som ga oss

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\alpha v_y$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \alpha v_x$$

Dette har en sammenheng med

det vi nettopp har lært om Helmholtz teorem.

Strømning av vann, og luft ved lav hastighet, er inkompressibel. Dvs. <u>divergensfritt</u>. Derfor har vi at strømningsfeltet alltid kan skrives som

$$\vec{v} = \nabla \times \vec{\psi} \quad \leftarrow \text{Garantert div. fritt!}$$

$\vec{\psi}$ = vektorpotensial, og strømfunksjonsvektor.

Vi har:

$$\nabla \times \vec{\psi} = \mathbb{i}\left(\frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z}\right) + \mathbb{j}\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x}\right) + \mathbb{k}\left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y}\right)$$

I 2D $^{(xy\text{-plan})}$ har vi $\vec{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$

Dette gir fra $\vec{v} = \nabla \times \vec{\Psi}$ at

$$v_x = \frac{\partial \Psi_z}{\partial y} - \cancel{\frac{\partial \Psi_y}{\partial z}}$$

$$v_y = \cancel{\frac{\partial \Psi_x}{\partial z}} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_x}{\partial y}$$

Husk nå at vi kun har bevegelse i xy-planet $\Rightarrow \frac{\partial(\cdot)}{\partial z} = 0$

Da har vi

$$v_x = \frac{\partial \Psi_z}{\partial y}$$

$$v_y = -\frac{\partial \Psi_z}{\partial x}$$

og vi kan neglisjere Ψ_x, Ψ_y, da de ikke inngår i xy-planet.

Så strømfunksjonen ψ er egentlig z-komponenten til strømfunksjons<u>vektoren</u> $\vec{\psi}$.

$$\underline{\vec{\psi} = \psi_z \mathbf{k}} \qquad (\psi_z = \psi)$$

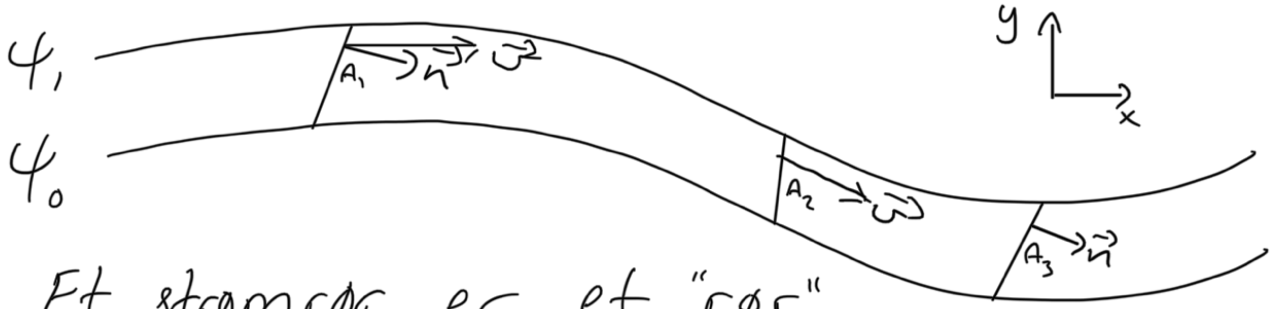
Veldig viktig:

Vi kan finne vektorfeltet $\vec{v}$ fra skalarfeltet ψ!

Dette gjelder bare i 2D og er grunnen til at man stort sett bare bruker strømfunksjoner i 2D.

Strømrør   GF 6.7

Gitt to strømlinjer ψ_0 og ψ_1

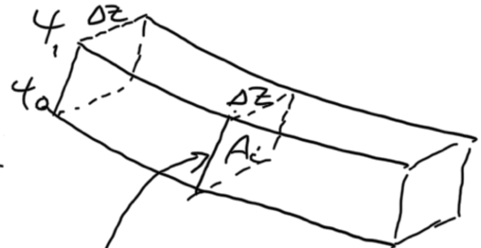


Et strømrør er et "rør" der strømlinjer utgjør veggene.

Hva er fluksen gjennom et vilkårlig tverrsnitt? (A_1, A_2, A_3)

$$\text{Fluks} = Q = \int_{A_i} \vec{v} \cdot \vec{n}\, d\sigma$$

Strømlinjene ligger i xy-planet. Vi tenker oss at strømrøret har tykkelse Δz, og ser på flaten A_i som $A_i = \Delta z \cdot C_i$



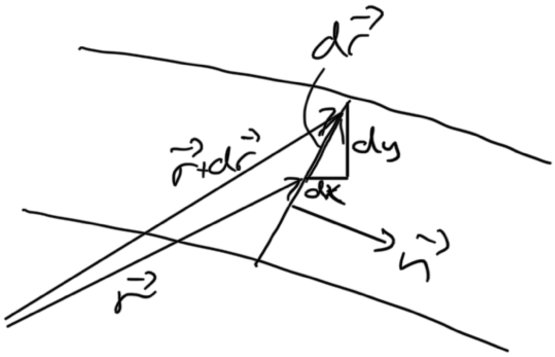
Vi får

$$d\sigma = dz\,ds$$

$$Q = \int_{C_i}\int_0^{\Delta z} \vec{v}\cdot\vec{n}\,dz\,ds$$

$$Q = \Delta z \int_{C_i} \vec{v}\cdot\vec{n}\,ds$$

Hva er $\vec{n}$?



$$d\vec{r}\cdot\vec{n} = 0$$

$$\mathbb{k}\times d\vec{r} \parallel \vec{n}$$

$$|\mathbb{k}\times d\vec{r}| = |d\vec{r}| = ds$$

$$\vec{n} = -\frac{\mathbb{k}\times d\vec{r}}{|\mathbb{k}\times d\vec{r}|}$$

$$\mathbb{k}\times d\vec{r} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ dx & dy & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n} = \frac{1}{ds}\left(-\mathbb{i}\,dy + \mathbb{j}\,dx\right)$$

$$Q = \Delta z \int_{C_i} \vec{v}\cdot\vec{n}\,ds$$

$$= \Delta z \int_{c_i} \left(v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}\right) \cdot \left(-dy\, \mathbf{i} + dx\, \mathbf{j}\right)$$

$$= \Delta z \int_{c_i} \left(-v_x\, dy + v_y\, dx\right)$$

Bruker nå $v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ og $v_z = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$

$$Q = \Delta z \int_{c_i} -\frac{\partial \psi}{\partial y}\, dy - \frac{\partial \psi}{\partial x}\, dx$$

Har at $d\psi = \nabla \psi \cdot d\vec{r}$

$$= \frac{\partial \psi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}\, dy$$

$$Q = -\Delta z \int_{\psi_0}^{\psi_1} d\psi = \underline{-\Delta z \left(\psi_1 - \psi_0\right)}$$

Volumstrømmen per lengdeenhet Δz normalt xy-planet er lik differansen mellom strømfunksjonens verdier på de to strømlinjene ψ_1 og ψ_0. Merk at fortegnet er vilkårlig.

Eksempel

Gitt vektorfeltet

$$\vec{v} = xz\,\mathbf{i} + v_z\,\mathbf{k} \quad , \; v_z(x,z)$$

Finn v_z slik at $\vec{v}$ blir

1) Virvelfritt
2) Divergensfritt
3) Både virvel- og div. fritt

Her har vi 2D strømning, men i xz-planet. Samme teori gjelder som for xy-planet, men med små endringer i detaljer. Strømfunksjonen er nå y-komponenten av

$$\vec{\psi} = \psi_y \, \mathbb{j}$$

1) Må ha $\vec{v} = \nabla \phi$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = xz \Rightarrow \phi = \frac{1}{2}x^2 z + f(z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = v_z \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}x^2 z + f\right) = v_z$$

$$\frac{1}{2}x^2 + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z}}_{= h(z)} = v_z$$

$$\underline{v_z = h(z) + \frac{1}{2}x^2}$$

Test $\nabla \times \vec{v} = \nabla \times \left(xz\,\mathbb{i} + (h(z) + \frac{1}{2}x^2)\,\mathbb{k} \right)$

$$= \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & 0 & h + \frac{1}{2}x^2 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbb{i} \cdot 0 + \mathbb{j}\,(x - x) + \mathbb{k} \cdot 0$$

$$= \underline{\vec{0}} \quad \text{ok}$$

$$\underline{v_z = h(z) + \frac{1}{2}x^2}$$

2) Må ha $\vec{v} = \nabla \times \vec{\psi}$, $\vec{\psi} = \psi_y \mathbf{j}$

$$xz = \cancel{\frac{\partial \psi_z}{\partial y}} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z} = -\frac{\partial \psi_y}{\partial z}$$

$$v_z = \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \cancel{\frac{\partial \psi_x}{\partial y}} = \frac{\partial \psi_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \psi_y}{\partial z} = -xz \Rightarrow \psi_y = -\frac{1}{2}xz^2 + f(x)$$

$$\frac{\partial \psi_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{2}xz^2 + f(x)\right) = v_z$$

$$-\frac{1}{2}z^2 + \frac{\partial f}{\partial x} = v_z$$

$$\underline{v_z = g(x) - \frac{1}{2}z^2}$$

Sjekk om $\nabla \cdot \vec{v} = 0$

$$\nabla \cdot \left(xz\mathbf{i} + \left(g(x) - \frac{1}{2}z^2\right)\mathbf{k}\right)$$

$$= z - z = \underline{0} \qquad \text{ok}$$

3) Kan vi ha $\vec{v}$ slik at både

$\nabla \cdot \vec{v} = 0$ og $\nabla \times \vec{v} = \vec{0}$?

Har funnet 1) $v_z = h(z) + \frac{1}{2}x^2$

2) $v_z = g(x) - \frac{1}{2}z^2$

Hvis $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + C_1$ og $h(z) = -\frac{1}{2}z^2 + C_2$

får vi $v_z = \frac{1}{2}(x^2 - z^2) + C$

Så $\vec{v} = xz\,\mathbf{i} + \left(\frac{1}{2}(x^2 - z^2) + C\right)\mathbf{k}$

er både virvel- og div. fritt.