Indeks notasjon

M kap 4

Fun fact - Indeks notasjon i dagens form ble oppfunnet av <u>Einstein</u>, da han var lei av å skrive lange likninger!

Kalles også Einstein notasjon, eller Einstein's summasjonskonven-sjon.

Med indeksnotasjon skriver vi vektorer på komponentform.

Vi har vektoren $\vec{u}$, ($\underline{u}$, $\mathbf{u}$, $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$)

$$\vec{u} = \sum_{i=1,2,3} u_i \mathbf{i}_i$$

der

$$\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}, \quad \mathbf{i}_2 = \mathbf{j}, \quad \mathbf{i}_3 = \mathbf{k} \quad (e_1, e_2, e_3)$$

u_i, $i \in (1,2,3)$, er komponentene til vektoren $\vec{u}$.

Vi har

$$u_i = \mathbf{i}_i \cdot \vec{u}$$

siden

$$\mathbf{i}_i \cdot \sum_{j=1,2,3} u_j \mathbf{i}_j = \sum_{j=1,2,3} u_j \, \mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j$$

$$= u_i$$

siden

$$\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j \\ 0 & \text{for } i \neq j \end{cases}$$

δ_{ij} kalles Kronecker delta

Vi kommer nå til det geniale med indeksnotasjon ...

Vi har altså

$$\vec{u} = \sum_{i=1,2,3} u_i \hat{u}_i$$

Med indeksnotasjon kan vi skrive

$$\vec{u} = u_i \hat{u}_i$$

<u>uten</u> summasjonstegnet.
Einstein's summasjonskonvensjon sier at man skal <u>summere</u> over <u>repeterte</u> indekser. Så

$$u_i \hat{u}_i = u_1 \hat{u}_1 + u_2 \hat{u}_2 + u_3 \hat{u}_3$$

siden vi har indeksen i to ganger.
Dvs, indeks i er repetert.

Ta nå prikkproduktet mellom to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Med vanlig basisvektor notasjon har vi

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_{i=1,2,3} a_i u_i \cdot \sum_{j=1,2,3} b_j u_j$$

$$= \sum_{i=1,2,3}\sum_{j=1,2,3} a_i b_j \underbrace{u_i \cdot u_j}_{\delta_{ij}}$$

$$= \sum_{i=1,2,3} a_i b_i$$

Med indeksnotasjon har vi derfor

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_i u_i \cdot b_j u_j$$

$$= a_i b_j \delta_{ij} \quad \Leftarrow \text{summasjon på } i \text{ og } j.$$

$$= a_i b_i$$

Med indeksnotasjon så er det også gitt at basisvektorene er de Kartesiske, u_i, så disse skrives nesten aldri ut. Vi har ganske enkelt

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_i b_i$$

Og man ser på vektorene komponentvis, så vi ser som regel

$$a_i \ , \ b_i$$

og nesten aldri

$$a_i \mathbf{i}_i \ , \ b_i \mathbf{i}_i$$

Hvis vi trenger vektoren, så er det jo enklest å skrive

$$\vec{a} \qquad \vec{b} \qquad !$$

Kronecker delta δ_{ij} fungerer som en substitusjonstensor.

$$\delta_{ij} a_j = \delta_{i1} a_1 + \delta_{i2} a_2 + \delta_{i3} a_3$$

Vi ser at hvis $i = 1$, så er

$$\delta_{1j} a_j = \delta_{11} a_1 = a_1$$

Hvis $i = 2 \Rightarrow \delta_{2j} a_j = \delta_{22} a_2 = a_2$

$$\Rightarrow \quad \delta_{ij}\, a_j = a_i$$

Bytter indeks på a fra j til i.

Flere eksempler

$$\underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{b})}_{\text{skalar}}\; \underbrace{\vec{c}}_{\text{vektor}}$$

$\Rightarrow$ Dette er en skalert vektor $\vec{c}$.

Med indeksnotasjon ser vi på én komponent av denne vektoren.

$$\left((\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}\right)_i = \hat{u}_i \cdot \overbrace{(\vec{a} \cdot \vec{b})}^{a_j b_j}\vec{c}$$

$$\hat{u}_i \cdot \vec{c} = c_i$$

$$= a_j b_j c_i$$ ← Kort og fint!

summasjon på j. vektor komponent i

j er her en <u>repetert</u> indeks.

i er her en <u>fri</u> indeks.

En vektor har alltid én fri indeks, som angir komponenten til vektoren.

Merk: Den repeterte indeksen har vilkårlig bokstav, bare den er forskjellig fra den frie. Dvs, vi kan skrive

$$((\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c})_i = a_j b_j c_i$$

$$\vee \; a_k b_k c_i$$

$$\vee \; a_\ell b_\ell c_i$$

Vilkårlig, siden vi uansett skal summere over 1, 2, 3.

Plasseringen av komponentene er også likegyldig. Vi kan skrive

$$a_j c_i b_j = c_i b_m a_m$$

Annet eksempel

$$\beta = \underbrace{(\vec{a}\cdot\vec{b})}_{\text{skalar}}\underbrace{(\vec{c}\cdot\vec{d})}_{\text{skalar}}$$

$$= a_i b_i c_j d_j$$

$$(= a_j b_j c_i d_i = a_k b_k c_j d_j \ldots)$$

Plasseringen er igjen likegyldig:

$$= a_i c_j b_i d_j \quad (= a_k c_m b_k d_m)$$

og bokstaven er likegyldig

Huskeregler

- Summering over repeterte indekser.
- Hvilken bokstav som brukes for fri eller repetert indeks er vilkårlig.

a_i og a_j betyr samme ting

siden vi ikke kjenner verdien
til i eller j. Vet bare at
$i \in (1,2,3)$ og $j \in (1,2,3)$

a_i = komponent i av vektor
$\vec{a}$. $i \in (1,2,3)$

a_j = komponent j av vektor
$\vec{a}$. $j \in (1,2,3)$

— Samme indeks kan ikke
forekomme mer enn 2 ganger
i ett uttrykk.

Dvs $\cancel{a_i b_i c_i}$ finnes ikke

- Gjelder kun for Kartesiske
koordinater

- I en likning med flere
uttrykk så må den frie indeksen

alltid være den samme

Vektorlikning $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

Komponentvis (indeksform) $a_i + b_i = c_i \, , \; i \in (1,2,3)$

Ikke $a_i + b_j = c_k$!

Andre ordens tensorer (matriser)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

En andre ordens tensor i fysikken kalles ofte en dyade, og har to basisvektorer

$$A = a_{ij} \, u_i u_j$$

summering på både i og j.

$$A = a_{11}\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 + a_{12}\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 + a_{13}\mathbf{i}_1\mathbf{i}_3$$
$$+ a_{21}\mathbf{i}_2\mathbf{i}_1 + a_{22}\mathbf{i}_2\mathbf{i}_2 + a_{23}\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$$
$$+ a_{31}\mathbf{i}_3\mathbf{i}_1 + a_{32}\mathbf{i}_3\mathbf{i}_2 + a_{33}\mathbf{i}_3\mathbf{i}_3$$

Rad k i matrisen $(k \in (1,2,3))$

$$\mathbf{i}_k \cdot A = \mathbf{i}_k \cdot a_{ij}\mathbf{i}_i\mathbf{i}_j$$
$$= a_{ij}\underbrace{(\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_i)}_{\delta_{ki}}\mathbf{i}_j$$

Bytter i med k

$$= a_{kj}\mathbf{i}_j \;(= a_{ij}\mathbf{i}_j)$$
$$= a_{k1}\mathbf{i}_1 + a_{k2}\mathbf{i}_2 + a_{k3}\mathbf{i}_3$$

Man tenker ofte på en dyade som en vektor av vektorer.

Merk at for a_{ij} så er første indeks rad (her i) og andre (her j) kolonne. Bokstaven er imidlertid fremdeles likegyldig. For a_{ji} er j rad og i kolonne.

Et matrise-matrise produkt kan skrives på indeksnotasjon som

$$(A\,B)_{ij} = a_{ik}\, b_{kj}$$

Kronecker delta δ_{ij} er komponent i,j i en matrise $\underline{I}$

$$\underline{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Denne kalles ofte identitetsmatrisen. Gradienten av en vektor er en 2 ordens tensor, med komponenter

$$\left(\operatorname{grad}\vec{u}\right)_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

i rad
j kolonne

$$\operatorname{grad}\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{grad} u \\ \operatorname{grad} v \\ \operatorname{grad} w \end{pmatrix} \Leftarrow \text{vektor av vektorer}$$

Mer om grad og indeksnotasjon kommer neste gang.

Kryssprodukter

$$\vec{a} \times \vec{b} = ?$$

Hvordan skrive dette med indeks-notasjon?

Vi har rett frem at

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_i \mathbf{i}_i \times b_j \mathbf{i}_j$$

$$= a_i b_j \, \mathbf{i}_i \times \mathbf{i}_j$$

Vi må nå summere over repeterte indekser i og j. Og vi vet at de eneste leddene som da er forskjellig fra 0 er

$$\mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 , \quad \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_1 = -\mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_1 , \quad \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_2 = -\mathbf{i}_1$$

$$\mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 , \quad \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_3 = -\mathbf{i}_2$$

Legg merke til symmetrien. Hver likning inneholder 1, 2 og 3. Kryssproduktet blir ved summasjon på i og j:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\mathbf{i}_3 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)\,\mathbf{i}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\mathbf{i}_2$$

Som vi vet fra før. Hva med den enkle indeksnotasjonen?

Det finnes en tredje ordens tensor som heter "Levi-Levita" symbolet, eller "alternerende" tensor, eller "permutasjons" tensoren ε_{ijk}

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{hvis } ijk \text{ i } 12312 \\ -1 & \text{hvis } ijk \text{ i } 32132 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{312} = 1 \quad , \quad \varepsilon_{213} = -1$$

$$\varepsilon_{122} = 0$$

I indeksnotasjon så er kryss-produktet sin komponent i

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk}\, a_j\, b_k$$

1 fri indeks

2 repeterte indekser j, k

Ved summasjon får vi

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})_i &= \cancel{\varepsilon_{i11}}\, a_1 b_1 + \varepsilon_{i12}\, a_1 b_2 \\ &+ \varepsilon_{i13}\, a_1 b_3 + \varepsilon_{i21}\, a_2 b_1 \\ &+ \cancel{\varepsilon_{i22}}\, a_2 b_2 + \varepsilon_{i23}\, a_2 b_3 \\ &+ \varepsilon_{i31}\, a_3 b_1 + \varepsilon_{i32}\, a_3 b_2 \\ &+ \cancel{\varepsilon_{i33}}\, a_3 b_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})_1 &= \cancel{\varepsilon_{112}}\, a_1 b_2 + \cancel{\varepsilon_{113}}\, a_1 a_3 \\ &+ \cancel{\varepsilon_{121}}\, a_2 b_1 + \underline{\varepsilon_{123}^{(=1)}}\, a_2 b_3 \\ &+ \cancel{\varepsilon_{131}}\, a_3 b_1 + \underline{\varepsilon_{132}^{(=-1)}}\, a_3 b_2 \\ &= \underline{a_2 b_3 - a_3 b_2}\end{aligned}$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})_2 = \overset{=-1}{\varepsilon_{213}} a_1 b_3 + \overset{=1}{\varepsilon_{231}} a_3 b_1$$
$$= \underline{a_3 b_1 - a_1 b_3}$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})_3 = \overset{=1}{\varepsilon_{312}} a_1 b_2 + \overset{=-1}{\varepsilon_{321}} a_2 b_1$$
$$= \underline{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

<u>Eksempel</u> Vis at

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}$$

Merk: Her må man ta kryss-produktet først, ellers gir det ingen mening

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = a_i \underbrace{\varepsilon_{ijk} b_j c_k}_{(\vec{b}\times\vec{c})_i}$$ ← prikkprod. er summasjon på i.

$$= \underline{\varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k}$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \underbrace{\varepsilon_{ijk} a_j b_k}_{(\vec{a}\times\vec{b})_i} c_i$$

$$= \varepsilon_{kij} a_i b_j c_k = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$

Merk at $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{jik}$. Husk at $\varepsilon_{ijk} = 1$ hvis ijk er i 12312.
Så hvis $ijk = 123$ så er

$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{123} = 1$ 123 er i 12312

$\varepsilon_{kij} = \varepsilon_{312} = 1$ 312 er i 12312

$\varepsilon_{jki} = \varepsilon_{231} = 1$ 231 er i 12312

Samme med $ijk = 321$

$\Rightarrow \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = -1$

Vil vise

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$

$\varepsilon_{kij} a_i b_j c_k$ $\varepsilon_{kij} = \varepsilon_{ijk}$

$\downarrow$

$\Rightarrow \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$

Et viktig forhold mellom ε_{ijk} og δ_{ij} er

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

4 (!) frie indekser
i, j, l, m

$\Rightarrow$ 81 ledd ved summasjon (3^4)
Men bare forskjellig fra 0
når $i=l$ og $j=m$ eller $i=m$ og $j=l$
Denne identiteten brukes til
doble kryssprodukter, som

$$(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}))_i = \varepsilon_{ijk}\, a_j\, (\vec{b}\times\vec{c})_k$$

$((\vec{b}\times\vec{c})_k = \varepsilon_{klm} b_l c_m)$

$$= \varepsilon_{ijk}\, a_j\, \varepsilon_{klm}\, b_l\, c_m$$

identity $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \ldots$

$$= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\, a_j\, b_l\, c_m$$

$$= a_m b_i c_m - a_l b_l c_i$$

(1) $i=l, j=m$
(2) $i=m$ $j=l$

$$= (\vec{a}\cdot\vec{c})\, b_i - (\vec{a}\cdot\vec{b})\, c_i$$

Neste gang skal vi se på
likninger, og ∇-operatoren
i indeksnotasjon.