Indeksnotasjon og ∇-operator

∇-operatoren er generell og virker uavhengig av koordinatsystem. Med indeksnotasjon må vi begrense oss til Kartesiske koordinater, og bruker nå

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \quad (\text{ikke } (x, y, z))$$

I MEK1100 bruker vi ∇-operatoren som en vektor. Kartesisk er dette

$$\nabla = u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (\text{summasjon på } i)$$

eller $$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} u_i$$

Det finnes andre konvensjoner, men for skalarfelt er alle like.

Gradienten av skalarfelt f er

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathbf{u}_i = \frac{\partial f}{\partial x_1} \mathbf{u}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \mathbf{u}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \mathbf{u}_3$$

Men med indeksnotasjon ser vi vanligvis bare på komponenten

$$(\nabla f)_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i \in (1,2,3)$$

Fra definisjonen på en gradient har vi

$$df = \nabla f \cdot d\vec{r}$$

Dette kan vi nå skrive som

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathbf{u}_i \cdot \overbrace{dx_j \mathbf{u}_j}^{d\vec{r}} \qquad \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_j \, \delta_{ij}$$

substitusjon $j \to i$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Husk at dette tilsvarer med summasjon

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3$$

$$\left(= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right)$$

Laplace operatoren $\nabla^2 f$

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Med indeks

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$$

Merk at man som regel skriver $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ og ikke $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$, siden siste form ser ut til å ha en fri indeks, ikke en repetert.

Pga linearitet har vi (g skalarfelt)

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$$
$$= u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

For produkter har vi produktregel

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$
$$= f u_i \frac{\partial g}{\partial x_i} + g u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

For én komponent er dette opplagt

$$(\nabla fg)_i = \frac{\partial fg}{\partial x_i} \qquad \left(i=1 \quad \frac{\partial fg}{\partial x_1} = \frac{\partial fg}{\partial x} \right.$$
$$= f\frac{\partial g}{\partial x_i} + g\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

og så slipper vi enhetsvektoren :-)

∇ og $\nabla\cdot$ av skalar · vektor

Bruker nå en skalert vektor

$$\vec{b} = f\vec{a}$$

Hva er $\nabla\vec{b}$ og $\nabla\cdot\vec{b}$?

Vi har igjen produktregel

(1) $\nabla\vec{b} = \nabla(f\vec{a}) = f\nabla\vec{a} + (\nabla f)\vec{a}$

$\nabla\vec{b}$ er en dyade. $(\nabla\vec{b})_{ij} = \frac{\partial b_j}{\partial x_i}$

$\nabla\vec{b}$ er <u>ytre</u> produkt av vektorene ∇ og $\vec{b}$.
Kommer tilbake til def.

At uttrykket (1) stemmer ser vi lett med indeksnotasjon. Komponent i,j er

$$(\nabla\vec{b})_{ij} = \frac{\partial f a_j}{\partial x_i} = f\frac{\partial a_j}{\partial x_i} + a_j\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$= f(\nabla\vec{a})_{ij} + (\nabla f)_i a_j$$

Merk: Her er både f og a_j skalarer. Derfor er det rett frem med produktregelen.

Divergensen blir

$$\nabla \cdot \vec{b} = \nabla \cdot (f\vec{a}) = f \nabla \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \nabla f$$

Dette er ikke veldig opplagt med vektornotasjon. Med indeks er det lett å se at dette er produkt-regel igjen

$$\nabla \cdot \vec{b} = \frac{\partial b_i}{\partial x_i} = \frac{\partial f a_i}{\partial x_i}$$

produktregel ↓

$$= f \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

↓ tilbake til vektor

$$= f \; \nabla \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \nabla f$$

Merk: Prikkene er viktige!

$\nabla \cdot \vec{b}$ er skalar

$\nabla \vec{b}$ er 2 ordens tensor

Nytt og vanskeligere eksempel

Fra s 82 i M

$$\nabla(\vec{a}\cdot\vec{b}) = a\times(\nabla\times\vec{b}) + \vec{b}\times(\nabla\times\vec{a}) + (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b} + (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a}$$

? ? ?

Dette er faktisk fremdeles bare produktregel, men det er vanskelig å se logikken med vektornotasjon. Med indeks er det enklere

$\nabla(\vec{a}\cdot\vec{b})$ er en vektor.
(gradient av skalar $\vec{a}\cdot\vec{b}$)

$$\Rightarrow \left(\nabla(\vec{a}\cdot\vec{b})\right)_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(a_j b_j)$$

Produktregel

$$\Rightarrow \quad a_j \frac{\partial b_j}{\partial x_i} + b_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$$

Husk nå at $(\nabla\vec{b})_{ij} = \frac{\partial b_j}{\partial x_i}$, $(\nabla\vec{a})_{ij} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$

$$a_j \frac{\partial b_j}{\partial x_i} = \frac{\partial b_j}{\partial x_i} a_j = \left((\nabla\vec{b})\cdot\vec{a}\right)_i$$

Matrise høyremultiplisert med vektor.

Hvis $S_{ij} = (\nabla\vec{b})_{ij}$

$\Rightarrow S_{ij} a_j$

$$b_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i} = (\nabla\vec{a})_{ij}\, b_j = \left((\nabla\vec{a})\cdot\vec{b}\right)_i$$

Så kort og greit

$$\left(\nabla(\vec{a}\cdot\vec{b})\right)_i = \left((\nabla\vec{b})\cdot\vec{a}\right)_i + \left((\nabla\vec{a})\cdot\vec{b}\right)_i$$

På vektorform

$$\nabla(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\nabla\vec{b})\cdot\vec{a} + (\nabla\vec{a})\cdot\vec{b}$$

Og det ser jo ikke så rart ut!

Det rare kommer hvis man vil bruke en annen likhet (s.79 i M)

$$\left(\vec{a}\times(\nabla\times\vec{b})\right)_i = a_j\frac{\partial b_j}{\partial x_i} - a_j\frac{\partial b_i}{\partial x_j}$$

eller

$$\vec{a}\times(\nabla\times\vec{b}) = (\nabla\vec{b})\cdot\vec{a} - (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b}$$
$$\vec{b}\times(\nabla\times\vec{a}) = (\nabla\vec{a})\cdot\vec{b} - (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a}$$

Setter man dette inn i

$$\nabla(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\nabla\vec{b})\cdot\vec{a} + (\nabla\vec{a})\cdot\vec{b}$$

så får man som lovet

$$\nabla(\vec{a}\cdot\vec{b}) = a\times(\nabla\times\vec{b}) + \vec{b}\times(\nabla\times\vec{a}) + (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b} + (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a}$$

Merk $\quad \vec{b}\cdot\nabla\vec{a} = (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a}$

I M står det bare $\vec{b}\cdot\nabla\vec{a}$
Likheten gjelder så lenge man bruker ∇ som en vektor.
Noen definerer ∇ slik at

$$(\nabla\vec{b})_{ij} = \frac{\partial b_i}{\partial x_j}$$

og ikke

$$(\nabla\vec{b})_{ij} = \frac{\partial b_j}{\partial x_i}$$

I MEK1100 bruker vi denne

$\nabla\vec{b}$ = Ytre produkt av vektor ∇ med vektor $\vec{b}$

$$\mathbf{i}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\, b_j \mathbf{i}_j = \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\mathbf{i}_i\mathbf{i}_j$$

i - rad siden i først ($\mathbf{i}_i\mathbf{i}_j$)

j - kolonne

Dette er ikke gradienten av $\vec{b}$!

$$\text{grad}\,\vec{b} = (\nabla\vec{b})^T$$

← Transponert

$$\frac{\partial b_i}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial b_j}{\partial x_i}\right)^T$$

$$(\text{grad}\,\vec{b})_{ij} = \frac{\partial b_i}{\partial x_j}$$

Med teskje:

$$(\nabla \vec{b})_{ij} = \frac{\partial b_j}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial b_1}{\partial x_1} & \frac{\partial b_2}{\partial x_1} & \frac{\partial b_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial b_1}{\partial x_2} & \frac{\partial b_2}{\partial x_2} & \frac{\partial b_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial b_1}{\partial x_3} & \frac{\partial b_2}{\partial x_3} & \frac{\partial b_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$\left((\nabla \vec{b})^T\right)_{ij} = \frac{\partial b_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial b_1}{\partial x_1} & \frac{\partial b_1}{\partial x_2} & \frac{\partial b_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial b_2}{\partial x_1} & \frac{\partial b_2}{\partial x_2} & \frac{\partial b_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial b_3}{\partial x_1} & \frac{\partial b_3}{\partial x_2} & \frac{\partial b_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \text{grad}\, \vec{b}$$

Hvis det fremdeles var gresk, så husk

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{\text{Transponer}}{\Rightarrow} A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Til slutt litt om $\nabla \times$

Vi har lært at

$$\nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

$$= \mathbb{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \mathbb{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)$$

$$+ \mathbb{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)$$

Med indeksnotasjon blir dette som kryssprodukt mellom ∇ og $\vec{a}$

$$(\nabla \times \vec{a})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j}$$

sum på j og k

Vi vet at

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0$$

Dette kan lett vises med indeksnotasjon

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varepsilon_{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x_j}\right)$$

$$= \varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 a_k}{\partial x_i \partial x_j}$$

ε_{ijk} har bare konst. verdier og kan tas utenfor derivasjon

Sum på i, j og k

Hvis $k=3$, så er det 2 ε_{ij3} som er $\neq 0$. Det er $\varepsilon_{123} = 1$ og $\varepsilon_{213} = -1$

$$\varepsilon_{ij3}\frac{\partial a_3}{\partial x_i \partial x_j} = \varepsilon_{123}\frac{\partial a_3}{\partial x_1 \partial x_2} + \varepsilon_{213}\frac{\partial a_3}{\partial x_2 \partial x_1}$$

$$= \frac{\partial a_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial a_3}{\partial x_2 \partial x_1} = \underline{0}$$

Samme får vi for $k = 1$ og 2.

Vi kan også bruke at ε_{ijk}

skifter fortegn om vi bytter to av indeksene, altså

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} \quad \leftarrow \text{bytter } i \text{ og } j$$

$$\vee \quad \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj} \quad \leftarrow \text{bytter } j \text{ og } k$$

$$\vee \quad \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{kji} \quad \leftarrow \text{bytter } i \text{ og } k$$

Har

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 a_k}{\partial x_i \partial x_j}$$

Bytter $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$

$$= -\varepsilon_{jik} \frac{\partial^2 a_k}{\partial x_i x_j}$$

Bytter navn i og j

$$= -\varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 a_k}{\partial x_j \partial x_i}$$

Orden på partiell derivasjon er likegyldig

$$= -\varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 a_k}{\partial x_i \partial x_j}$$

Har nå funnet at

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 a_k}{\partial x_i \partial x_j} = -\varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 a_k}{\partial x_i \partial x_j}$$

Det kan bare stemme om

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0$$

Til slutt. Vis at

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}$$

Dette er ikke lett uten indeksnotasjon!

Med indeks $\quad (\nabla \times \vec{u})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$

$$\left(\nabla \times (\nabla \times \vec{a})\right)_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial (\nabla \times \vec{a})_k}{\partial x_j} \qquad (\nabla \times \vec{a})_k = \varepsilon_{klm} \frac{\partial a_m}{\partial x_l}$$

$$= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon_{klm} \frac{\partial a_m}{\partial x_l}$$

$$= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \frac{\partial^2 a_m}{\partial x_j \partial x_l}$$

Husk nå

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

$$= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \frac{\partial^2 a_m}{\partial x_j \partial x_l}$$

I $\delta_{il}\delta_{jm}$ må $i=l$ og $j=m$

$$\Rightarrow \delta_{il}\delta_{jm}\frac{\partial^2 a_m}{\partial x_j \partial x_l} = \frac{\partial^2 a_j}{\partial x_j \partial x_i}$$

I $\delta_{im}\delta_{jl}$ må $i=m$ og $j=l$

$$\Rightarrow \delta_{im}\delta_{jl}\frac{\partial^2 a_m}{\partial x_j \partial x_l} = \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$\Rightarrow \left(\nabla\times(\nabla\times\vec{a})\right)_i = \underbrace{\frac{\partial^2 a_j}{\partial x_i \partial x_j}} - \underbrace{\frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_j}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial a_j}{\partial x_j}\right) - \nabla^2 a_i$$

$$= \left(\nabla\nabla\cdot\vec{a} - \nabla^2\vec{a}\right)_i$$

Dermed har vi vist at

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{a}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{a}) - \nabla^2\vec{a}$$

og at Laplace av en vektor er ganske komplisert

$$\nabla^2\vec{a} = \nabla(\nabla\cdot\vec{a}) - \nabla\times(\nabla\times\vec{a})$$