Gauss' sats
Divergensteoremet
Konservering av masse

M 5.1 GF 7.4 (10.3)

Definisjon: For et volum V, med en <u>omsluttende</u> flate S, og normalvektor $\vec{n}$ (pekende utover)

har man for et <u>vilkårlig</u> vektorfelt $\vec{A}$

$$\int_V \nabla\cdot\vec{A}\,dV = \oint_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

Total mengde = Fluksintegral
divergens inne i V gjennom S

Hvis $\vec{A} = \vec{v}$, der $\vec{v}$ er hastigheten til et fluid, så har vi

$$\oint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

som er lik netto utstrømning fra volumet V.

Bevis for Gauss' sats:

Start med å huske definisjonen for divergensen av $\vec{v}$ (eller $\vec{A}$)

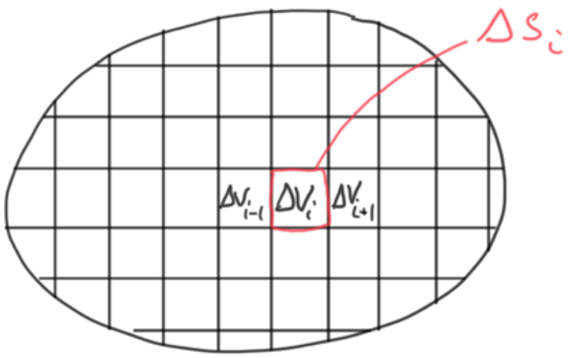
$$\nabla \cdot \vec{v} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

Gyldig i et punkt

Gyldig for et volum V som omslutter punktet. Når $V \to 0$ så går V mot punktet.

Vi ser for oss at V har en endelig utstrekning, og deler så inn V i små ikke-overlappende deler ΔV_i

slik at



$$\int dV = \sum_i \Delta V_i = V$$

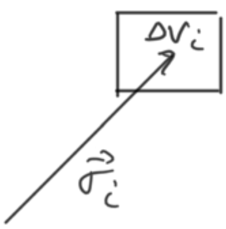
Vi tegner i 2D siden det er enklest, men ΔV_i er et delvolum.

Et delvolum ΔV_i omsluttes av flaten ΔS_i

Fra definisjonen av divergens får vi nå for ett delvolum i

$$\nabla \cdot \vec{v}(\vec{r}_i) \approx \frac{1}{\Delta V_i} \oint_{\Delta S_i} \vec{v} \cdot \vec{n}\, d\sigma$$

der approksimasjonen blir eksakt når $\Delta V_i \to 0$. $\vec{r}_i$ er posisjonsvektor for midten av ΔV_i



Omformer

$$\nabla \cdot \vec{v}\, \Delta V_i \approx \oint_{\Delta S_i} \vec{v} \cdot \vec{n}\, d\sigma$$

Summerer alle delvolumene

$$\sum_i \nabla \cdot \vec{v}\, \Delta V_i \approx \sum_i \oint_{\Delta S_i} \vec{v} \cdot \vec{n}\, d\sigma$$

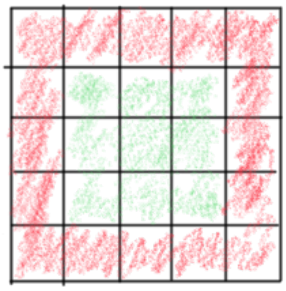
Kan nå ta grensen $\Delta V_i \to 0$.
Da blir (Riemann sum)

$$\sum_i \nabla \cdot \vec{v}\, \Delta V_i = \int_V \nabla \cdot \vec{v}\, dV$$

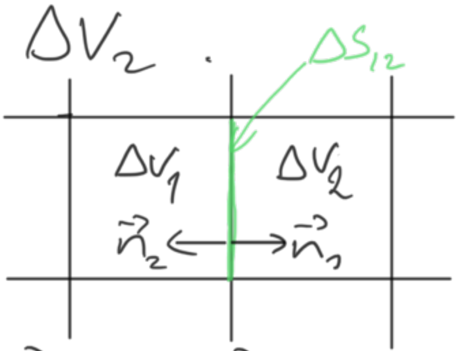
= Total mengde $\nabla \cdot \vec{v}$ inne i V.

Hva med $\sum_i \oint_{\Delta S_i} \vec{v} \cdot \vec{n}\, d\sigma$?

Dette har ingen Riemann sum analog. Men vi kan omforme mha litt logikk. Volumet V er delt inn i delvolumer ΔV_i, som enten er <u>interne</u>, eller eksterne. Eksterne ΔV_i har noen sider som tilhører S, mens interne ΔV_i har hele ΔS_i inne i V.



Se nå på et internt ΔV_1, med nabo ΔV_2.



$\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$

Den interne flaten ΔS_{12} tilhører både ΔV_1 og ΔV_2.

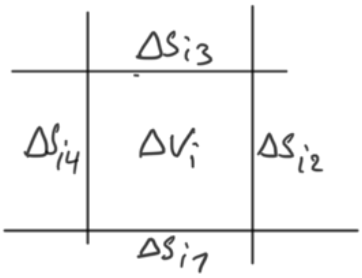
Alle interne flater deles av to nabovolumer!

Alle interne flater har to flatenormaler $\vec{n}_1$ og $\vec{n}_2$, som peker i motsatte retninger.

Hva gjør dette med

$$\sum_i \oint_{\Delta S_i} \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma \qquad ?$$

Husk at summen går over alle delvolumer. I vår 2D tegning så har hver ΔV_i 4 sideflater



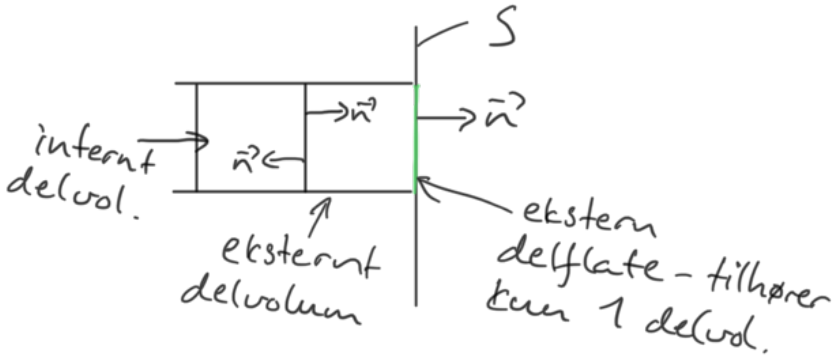
$$\Delta S_i = \Delta S_{i1} \cup \Delta S_{i2} \cup \Delta S_{i3} \cup \Delta S_{i4}$$

$$\oint_{\Delta S_i} \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \sum_{j=1}^{4} \int_{\Delta S_{ij}} \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

Hvert delintegral summerer over alle sideflatene.

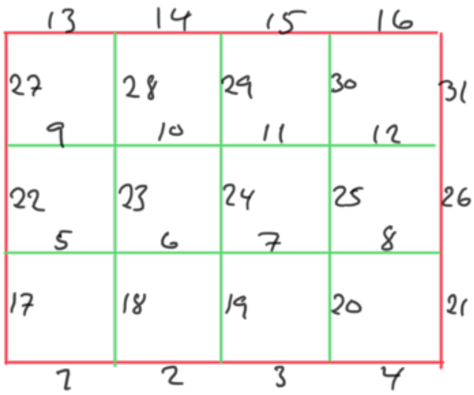
Det er nå viktig å innse at alle interne flater vil telles 2 ganger, mens alle eksterne vil telles kun 1 gang, siden en ekstern flate tilhører kun 1 delvolum.

Vi får



$$\sum_i \oint_{\Delta S_i} \vec{v}\cdot\vec{n}\, d\sigma = \sum_i \sum_j \int_{\Delta S_{ij}} \vec{v}\cdot\vec{n}\, d\sigma$$

For eks:

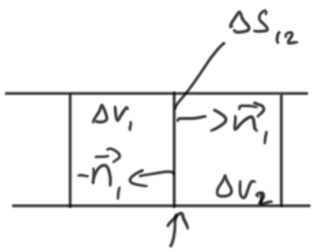


$\Delta S_E = (1,2,3,4,13,14,15,16,17,21,22,26,27,31)$

$\Delta S_I = (5,6,7,8,9,10,11,12,18,19,20,23,24,25,28,29,30)$

Integralet blir en sum over alle sideflater.

Alle interne bidrag <u>kanselleres</u> siden interne sideflater besøkes 2 ganger, med motsatt fortegn pga $\vec{n}$.



$\vec{n}_1$ peker ut fra ΔV_1, mens $-\vec{n}_1$ peker ut fra ΔV_2

$$\int_{\Delta S_{12}} \vec{v}\cdot\vec{n}_1\,d\sigma + \int_{\Delta S_{12}} \vec{v}\cdot\vec{n}_2\,d\sigma = 0$$

To bidrag som kansellerer

Vi står igjen med

ΔS_k er her kun eksterne delflater.

$$\sum_i \oint_{\Delta S_i} \vec{v}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \sum_{k\in\Delta S_E} \int_{\Delta S_k} \vec{v}\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

Sum over alle eksterne delflater, blir lik

$$= \oint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

integralet over lukket S

(Se rød ΔS_E)

Da har vi vist at

$$\sum_i \nabla\cdot\vec{v}\,\Delta V_i = \int_V \nabla\cdot\vec{v}\,dV$$

og

$$\sum_i \oint_{\Delta S_i} \vec{v}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \oint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

Siden også

$$\sum_i \nabla\cdot\vec{v}\,\Delta V_i \approx \sum_i \oint_{\Delta S_i} \vec{v}\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

som blir eksakt når $\Delta V_i \to 0$,

så får vi Gauss' sats

$$\int_V \nabla\cdot\vec{v}\,dV = \oint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

$$\nabla\cdot\vec{v} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint \vec{v}\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

$\nabla\cdot\vec{v}$ er konstant i V

$$\int \nabla\cdot\vec{v}\,dV \to \nabla\cdot\vec{v}\int dV = \nabla\cdot\vec{v}\,V$$

$$\nabla\cdot\vec{v}\,V = \oint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

$$\nabla\cdot\vec{v} = \frac{1}{V}\oint \vec{v}\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

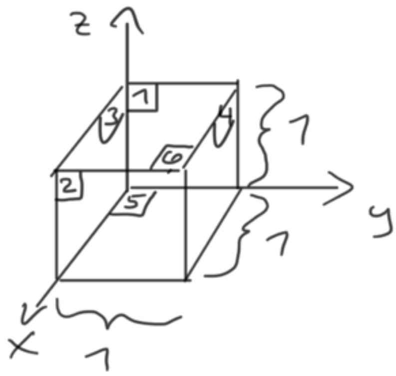
Gauss' sats kan brukes til å beregne fluksintegraler gjennom et volumintegral – hvilket er en god idé om det siste er enklere!

Eksempel

Gitt $\vec{u} = x\,\vec{i}$, finn

$$\oint_S \vec{u}\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

der S er flaten som omslutter en enhetskube med 6 sideflater S_i.



Direkte regning

$$\oint_S \vec{u}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \sum_{i=1}^{6}\int_{S_i}\vec{u}\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

S_1: $\vec{n} = -\vec{i}$, $\vec{u} = \vec{0}$ $\Rightarrow \int_{S_1}\vec{u}\cdot\vec{n}\,d\sigma = 0$

S_2: $\vec{n} = \vec{i}$, $\vec{u} = \vec{i}$ $\Rightarrow \int_{S_2}\vec{i}\cdot\vec{i}\,d\sigma = 1$

S_3 og S_4 : $\vec{n}_3 = -\mathbb{j}$

$\vec{n}_4 = \mathbb{j}$

$\vec{u}$ samme på S_3 og S_4 siden $\vec{u}$ bare er funksjon av x

$$\Rightarrow \int_{S_3} \vec{u} \cdot \vec{n} \, d\sigma + \int_{S_4} \vec{u} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0$$

S_5 og S_6 : $\vec{n}_5 = -\mathbb{k}$

$\vec{n}_6 = \mathbb{k}$ $\Rightarrow \int_{S_5+S_6} \vec{u} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0$

$\vec{u}$ samme

Summerer alle

$$\Rightarrow \oint_S \vec{u} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \underline{\underline{1}}$$ (med mye jobb)

Bruker nå Gauss' sats

$$\oint_S \vec{u} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_V \nabla \cdot \vec{u} \, dV$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{u} \, dV = \int_V dV = \underline{\underline{1}}$$

Samme svar, men mye raskere!
Gauss' sats er et nyttig verktøy!

Eksempel

Hva er forholdet mellom flate-integralet $\oint_S \vec{r} \cdot \vec{n} \, d\sigma$ og volumet flaten S omslutter?

Gauss' sats gir svaret

$$\int_V \nabla \cdot \vec{r} \, dV = \oint_S \vec{r} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

Har $\nabla \cdot \vec{r} = 3$, så

$$3 \int_V dV = \oint_S \vec{r} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

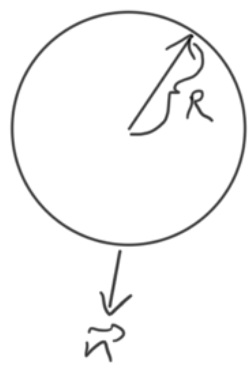
$$\underline{\underline{3 = \frac{\oint \vec{r} \cdot \vec{n} \, d\sigma}{V}}}$$

Eksempel

Bruk Gauss' sats til å finne volumet av en kule. Kula har flateareal $= 4\pi R^2$.

Kula med radius R har

$$\vec{r} = R\,\mathbf{u}_r \quad , \text{ og}$$
$$\vec{n} = \mathbf{u}_r$$



Gauss' sats gir

$$\int_V \nabla \cdot \vec{r}\, dV = \oint_S \vec{r} \cdot \vec{n}\, d\sigma$$

$$3V = \oint_S R\,\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r\, d\sigma$$

$$3V = R \underbrace{\oint_S d\sigma}_{\text{Kulas overflateareal } (= 4\pi R^2)}$$

$$3V = R\, 4\pi R^2$$

$$\underline{\underline{V = \frac{4}{3}\pi R^3}}$$

Gauss' sats er en form for delvis integrasjon i flere dimensjoner!

Husk delvis integrasjon i 1D

$$\int_a^b v u' \, dx = vu \Big|_a^b - \int_a^b v' u \, dx$$

Gauss' sats er

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A} \, dV = \oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

Velger nå $\vec{A} = \phi \vec{u}$, der ϕ er et skalarfelt. Har vektoridentitet

$$\nabla \cdot \phi \vec{u} = \phi \nabla \cdot \vec{u} + \nabla \phi \cdot \vec{u}$$

som vi setter inn i Gauss' sats

$$\int_V (\phi \nabla \cdot \vec{u} + \nabla \phi \cdot \vec{u}) \, dV = \oint_S \phi \vec{u} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

Omformer

$$\int_V \phi \nabla\cdot\vec{u}\, dV = \oint_S \phi\vec{u}\cdot\vec{n}\, d\sigma - \int_V \nabla\phi\cdot\vec{u}\, dV$$

Se likheten med

$$\int_a^b \phi u' dx = \phi u \Big|_a^b - \int_a^b \phi' u\, dx$$

Andre varianter av Gauss' sats

Konservativt felt

$$\vec{A} = \phi\nabla\beta$$

Bruker

$$\int_V \phi \nabla\cdot\vec{u}\, dV = \oint_S \phi\vec{u}\cdot\vec{n}\, d\sigma - \int_V \nabla\phi\cdot\vec{u}\, dV$$

og får

$$\int_V \phi \nabla\cdot\nabla\beta\, dV = \oint_S \phi\nabla\beta\cdot\vec{n}\, d\sigma - \int_V \nabla\phi\cdot\nabla\beta\, dV$$

$$\int_V \phi\nabla^2\beta + \nabla\phi\cdot\nabla\beta\, dV = \oint \phi\nabla\beta\cdot\vec{n}\, d\sigma$$

Green's første identitet

Hvis vi velger

$$\vec{A} = \phi \nabla \zeta - \zeta \nabla \phi$$

så får vi Green's andre identitet

$$\int_V \phi \nabla^2 \zeta - \zeta \nabla^2 \phi \, dV = \oint_S (\phi \nabla \zeta - \zeta \nabla \phi) \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

Det er god øvelse å vise dette.

Ny versjon får vi om vi velger

$$\vec{A} = \phi \vec{a}$$

der $\vec{a}$ er en konstant vektor.

Har

$$\nabla \cdot \vec{A} = \nabla \cdot \phi \vec{a} = \cancel{\phi \nabla \cdot \vec{a}} + \vec{a} \cdot \nabla \phi$$

$$= \vec{a} \cdot \nabla \phi$$

Gauss' sats gir

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A} \, dV = \oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

$$\int_V \vec{a} \cdot \nabla\phi \, dV = \oint_S \vec{a}\phi \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

$$\vec{a} \cdot \int_V \nabla\phi \, dV = \vec{a} \cdot \oint_S \phi \vec{n} \, d\sigma$$

$$\vec{a} \cdot \left(\int_V \nabla\phi \, dV - \oint_S \phi \vec{n} \, d\sigma \right) = 0$$

$$\Rightarrow \int_V \nabla\phi \, dV = \oint_S \phi \vec{n} \, d\sigma$$

Siste versjon

$$\vec{A} = \vec{a} \times \vec{u} \qquad \left(\begin{array}{ll} \vec{a} & \text{konstant} \\ \vec{u} & \text{vanlig vektorfelt} \end{array} \right)$$

Har

$$\nabla \cdot \vec{A} = \nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{u}) \qquad (4.29 \text{ i } M)$$

$$= \nabla \times \vec{a} \cdot \vec{u} - (\nabla \times \vec{u}) \cdot \vec{a}$$

$$\underline{= -(\nabla \times \vec{u}) \cdot \vec{a}}$$

$$(\text{s } 71 \text{ M})$$

og $(\vec{a} \times \vec{u}) \cdot \vec{n} = \vec{a} \cdot (\vec{u} \times \vec{n})$

Gauss' sats gir

$$\int_V \nabla\cdot\vec{A}\,dV = \oint_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

$$\int_V -(\nabla\times\vec{u})\cdot\vec{a}\,dV = \oint_S \vec{a}\cdot(\vec{u}\times\vec{n})\,d\sigma$$

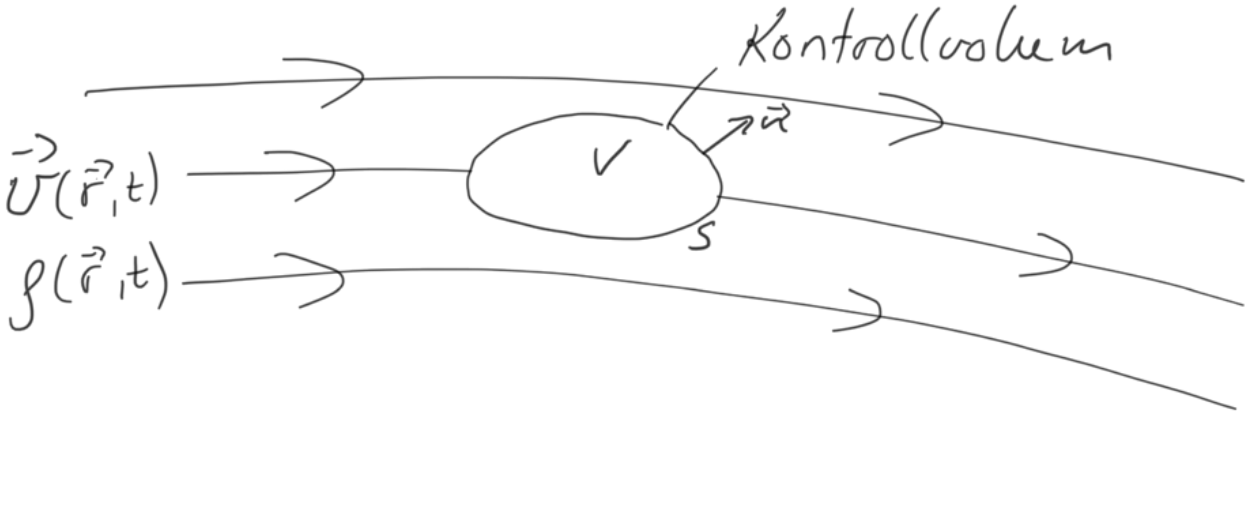
$$\vec{a}\cdot\left(\int_V \nabla\times\vec{u}\,dV + \oint_S \vec{u}\times\vec{n}\,d\sigma\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \int_V \nabla\times\vec{u}\,dV = -\oint \vec{u}\times\vec{n}\,d\sigma$$

Gauss' sats har mange nyttige former!

Eksempel på anvendelse

Konservering av masse



Vi ser på et kontrollvolum midt i et strømmende fluid, med hastighet $\vec{v}(\vec{r},t)$ og tetthet $\rho(\vec{r},t)$. Kontrollvolumet er fast og urørlig, men fluidet strømmer uhindret gjennom grenseflaten S.

Total masse i V er

$$M(t) = \int_V \rho \, dV \qquad [\text{kg}]$$

$M(t)$ er funksjon av tid siden $\rho(\vec{r},t)$ er funksjon av tid. $M(t)$ er <u>ikke</u> funksjon av $\vec{r}$, siden romavhengigheten integreres bort. Ser kanskje dette lettere med Kartesiske koordinater og $dV = dx\,dy\,dz$

$$M(t) = \iiint \rho(x,y,z,t) \, dx\,dy\,dz$$

x, y, z avhengighet forsvinner
x, y, z er integrasjonsvariabler

Vi vet også at netto utstrømning til V er gitt ved fluksintegralet

$$Q(t) = \oint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma \quad \left[\frac{kg}{s}\right]$$

Netto innstrømming er $-Q(t)$.

Vi har nå en fysisk lov som sier at masse er en størrelse som er konstant, eller konservert. Altså må endring i total masse i V balanseres mot inn/ut-strømning.

Hvis $Q(t) > 0$ strømmer det mer masse ut fra V enn inn. Da vil $M(t)$ minske.

Hvis $Q(t) < 0$ strømmer det

mer masse inn til V enn ut.
Da vil $M(t)$ øke.

Matematisk: Konservering av masse på integrert form

$$\frac{dM}{dt} + Q = 0$$

endring i total masse i V mhp tid + netto utstrømning av masse = 0

Setter nå inn for $M(t)$ og $Q(t)$

$$\frac{d}{dt}\left(\int_V \rho \, dV\right) + \oint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0$$

Siden V er fast så kan vi ta $\frac{d}{dt}$ innenfor integralet. Siden ρ er funksjon av rom og tid blir den tidsderiverte $\frac{d}{dt} \to \frac{\partial}{\partial t}$

Vi får

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0$$

Nå bruker vi Gauss' sats og får

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot \rho \vec{v} \, dV = 0$$

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} \; dV = 0$$

For at dette integralet alltid skal være 0, så må integranden være 0

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0$$

Dette er kontinuitetslikningen, eller konservering av masse på differensial form.