Feltlikninger

Partikkelderivasjon

Eulersk vs Lagransk beskrivelse

GF 10.1 - 3

Bevegelsen, eller dynamikken, til fluider beskrives ved hjelp av Newtonsk fysikk og lover

1) Konservering av masse

2) Newton's 2 lov

$$\sum \text{krefter} = m\vec{a}$$

(3) Konservering av energi)

Disse fysiske lovene kan vi nå beskrive matematisk, ved hjelp av

divergens  Inn- eller utstrøming i et punkt

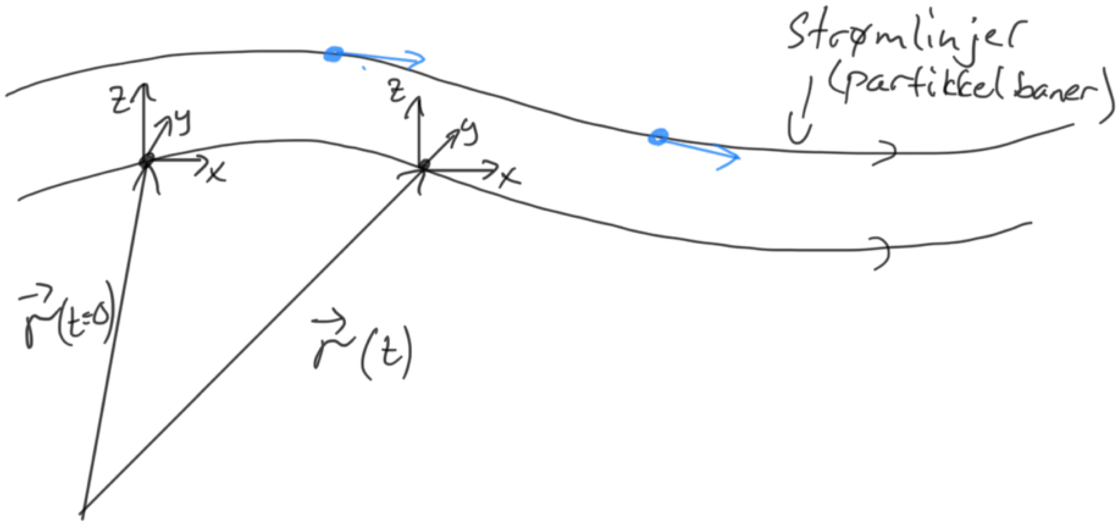
gradient  Romderivert

virvling  Sirkulasjon

Gauss' sats  Inn- eller utstrømning i et utstrakt område

Det er i hovedsak 2 måter å formulere likningene på

1) Lagransk formulering
Koordinatsystemet følger en fluidpartikkel



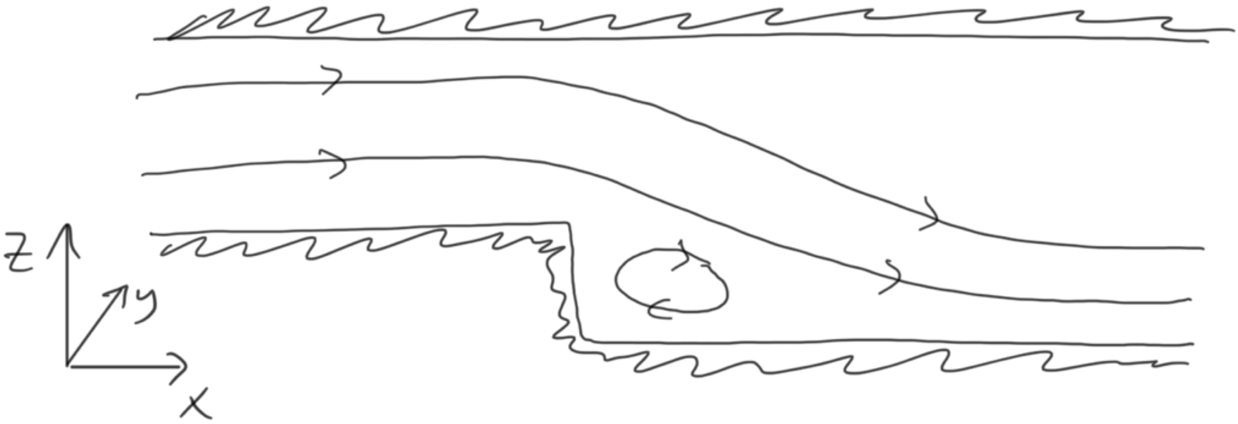
Man velger, eller markerer, partikler ved et utgangspunkt $t=0$. Tid er eneste parameter.

$$\vec{v}_p(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{a}_p(t) = \frac{d\vec{v}_p}{dt}$$

p indikerer Lagransk formulering

2) Eulersk beskrivelse

Fast koordinatsystem



Felter er funksjoner av både rom og tid

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t) \quad , \quad \rho = \rho(\vec{r}, t)$$

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t) \qquad \rho = \rho(x, y, z, t)$$

Feltene er beskrevet overalt, i både rom og tid.
I kontrast til en Lagransk form som beskriver én partikkels bane.

Sammenhengen er gitt ved

$$\rho(\vec{r}_p(t), t) = \rho_p(t)$$

$$\vec{v}(\vec{r}_p(t), t) = \vec{v}_p(t)$$

der $\vec{r}_p(t)$ er en gitt fluidpartikkels posisjon ved tiden t.

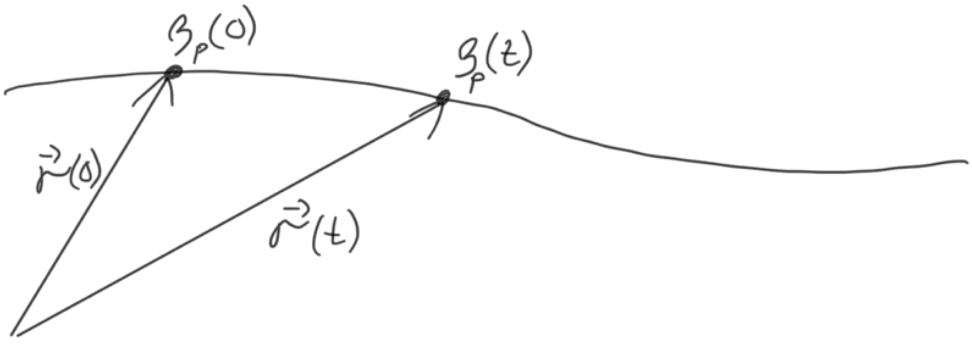
Det er ikke veldig viktig for

MEK1100 å forstå hva som ligger i Lagransk beskrivelse. Vi bruker Eulersk.

Partikkelderivert

Endring av egenskap langs en partikkelbane.

Se på skalarfeltet g, hvordan endrer $g(x,y,z,t)$ seg langs en strømlinje, eller partikkelbane?



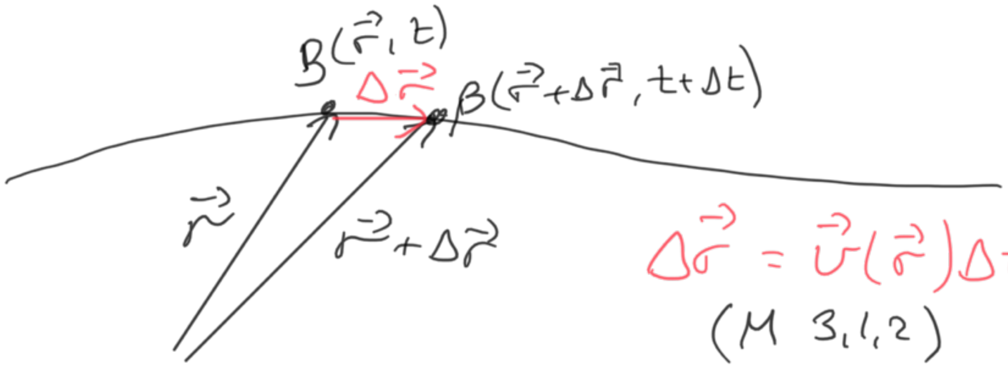
Merk: g er <u>ikke</u> strømfunksjonen (den endrer seg som kjent ikke langs en strømlinje)

Med Lagranske koordinater

$$\frac{d B_p(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B_p(t+\Delta t) - B_p(t)}{\Delta t}$$

Eulerske $B = B(x, y, z, t)$. Nå endres både $\vec{r}$ og t når vi går langs en partikkelbane.

$$\Delta B = B(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t + \Delta t) - B(\vec{r}, t)$$



$$\Delta\vec{r} = \vec{v}(\vec{r})\Delta t$$

(M 3.1.2)

$$\left(\begin{array}{l} B(x, y, z, t) \\ dB = \frac{\partial B}{\partial x} dx + \frac{\partial B}{\partial y} dy + \frac{\partial B}{\partial z} dz + \frac{\partial B}{\partial t} dt \end{array} \right)$$

$$\Delta B = \frac{\partial B}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial B}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial B}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial B}{\partial t}\Delta t$$

Merk: $B(\vec{r}, t) = B_p(t)$ og

$B(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t + \Delta t) = B_p(t + \Delta t)$

Eulersk beskrivelse er mer komplisert siden vi har 4 variable.

Merk også:

Dette er veldig likt der vi var ved definisjonen av gradient.

Da var $z = z(x, y, z)$, og

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial z}{\partial z}\Delta z$$

Nå har vi i tillegg variabelen tid.

For gradient bruker vi

$$\Delta \vec{r} = \Delta x \mathbb{i} + \Delta y \mathbb{j} + \Delta z \mathbb{k}$$

og får rett frem at

$$\Delta z = \nabla z \cdot \Delta \vec{r}$$

Når vi lar $\Delta \to 0$, får vi

$$dz(\vec{r}) = \nabla z \cdot d\vec{r}$$

Legg merke til at vi nå kan skrive (for $z = z(x, y, z, t)$)

$$\Delta \mathcal{z} = \frac{\partial \mathcal{z}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \mathcal{z}}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \mathcal{z}}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial \mathcal{z}}{\partial t}\Delta t$$

$$\Delta \mathcal{z} = \nabla \mathcal{z} \cdot \Delta \vec{r} + \frac{\partial \mathcal{z}}{\partial t}\Delta t$$

Deler på Δt

$$\frac{\Delta \mathcal{z}}{\Delta t} = \nabla \mathcal{z} \cdot \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} + \frac{\partial \mathcal{z}}{\partial t}$$

Lar nå igjen $\Delta \to 0$ ($\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$)
og bruker $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

$$\frac{D\mathcal{z}}{Dt} = \nabla \mathcal{z} \cdot \vec{v} + \frac{\partial \mathcal{z}}{\partial t}$$

$$\frac{D\mathcal{z}}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\right)\mathcal{z}$$

Merk $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathcal{z}}{\Delta t} = \frac{D\mathcal{z}}{Dt}$

siden $\mathcal{z}$ er funksjon av flere variable. Derivasjonen

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$$

kalles også den partikkelderiverte, eller materielle deriverte.

$\vec{v} \cdot \nabla$ er en <u>konvektiv</u> operator

$$\vec{v} \cdot \nabla = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$\vec{v} \cdot \nabla \rho$ er <u>konveksjon</u> av ρ.

Merk:
Litt annen utledning er gitt i Gjevik 10.1. Se også s 147 i M.

Man kan ta den partikkel-deriverte av hastighetsvektoren $\vec{v}$. Da får man akselerasjon.

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{v}_p}{dt} \qquad \text{(Lagransk)}$$

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$$

$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ kalles konveksjon eller konvektiv akselerasjon.

Konveksjon er akselerasjon pga <u>romlige</u> forandringer.

Parantesen $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ brukes for å vise at denne operatoren er i bruk.

Merk at

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \vec{v} \cdot \nabla\vec{v}$$

dersom

$$\nabla\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

som er den konvensjonen vi bruker.

Men om man har definert

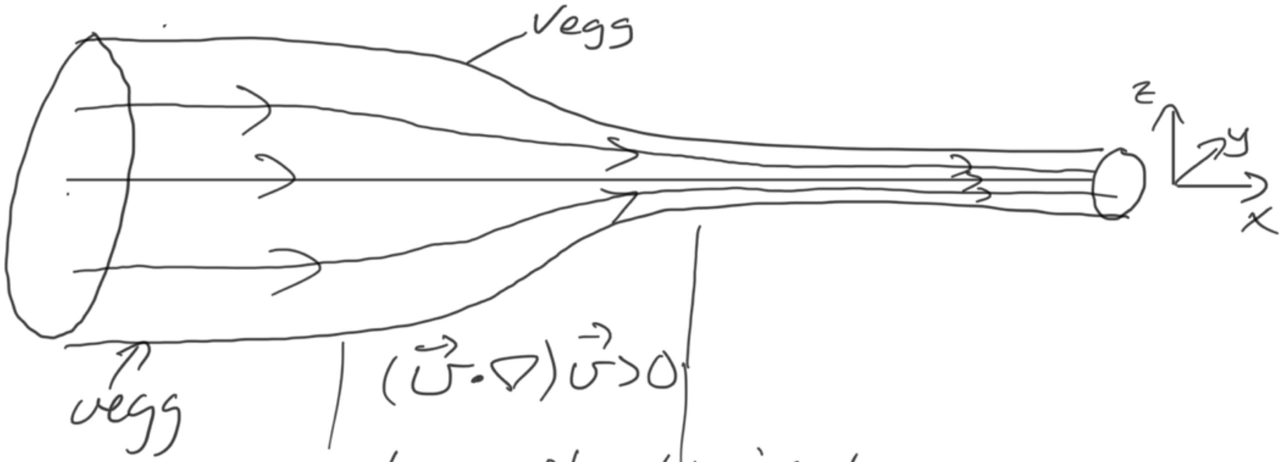
$$\nabla \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

så er $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = (\nabla \vec{v}) \cdot \vec{v}$

Dette kommer inn på ytreprodukter, som vi bare skal såvidt innom i MEK1100.

Eksempel på konveksjon

Innsnevring av rør



Her vil fluidet akselerere, siden røret blir trangere.

Her er det store romlige forandringer!

Loven om konservering av masse sier at like mye $[\frac{kg}{s}]$ væske kommer inn det tjukke røret på venstre side, som det går ut til høyre. Se på kontinuitetslikningen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0$$

Anta inkompressibel væske (som vann) med ρ = konstant

$$\Rightarrow \quad \cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \rho \nabla \cdot \vec{v} + \cancel{\vec{v} \cdot \nabla \rho} = 0$$

$$\rho \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$\underline{\nabla \cdot \vec{v} = 0}$$

Bruk Gauss' sats baklengs. Hvis $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, så er også

$$\int \nabla \cdot \vec{v} \, dV = 0$$

Da gir Gauss' sats at

$$\oint \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0$$

Anta nå at $\vec{v}\cdot\vec{n} = 0$ på veggene, altså ingen gjennomstrømning.

Da får vi at

$$\int_{\text{innløp}} \vec{v}\cdot(-i)\,d\sigma + \int_{\text{utløp}} \vec{v}\cdot i\,d\sigma = 0$$

$$-\int_{\text{innløp}} v_x\,d\sigma + \int_{\text{utløp}} v_x\,d\sigma = 0$$

$$\left(A = \int d\sigma\right)$$

Siden arealet på innløpet er større enn på utløpet, så må farten inn være mindre enn farten ut

$$v_x(x=\text{ut}) > v_x(x=\text{innløp})$$

Denne <u>akselerasjonen</u> får vi altså gjennom <u>konveksjon</u>.

Litt mer om kontinuitetslikningen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0$$

Bruker vektoridentitet (produktregel)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \vec{v} + \underbrace{\vec{v} \cdot \nabla \rho}_{\text{Konveksjon av } \rho} = 0$$

Omorganiserer litt

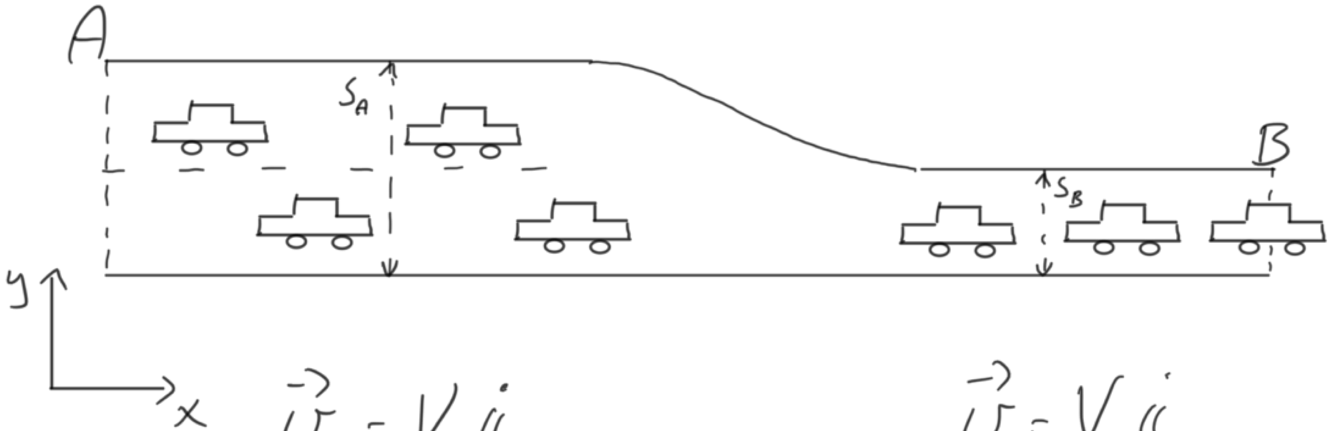
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \rho = -\rho \nabla \cdot \vec{v}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{v}$$

Som er en alternativ form av kontinuitetslikningen.

Nytt eksempel

Kompressibel biltrafikk ved overgang fra tofelts vei til 1 felt



$\vec{U}_A = V_A \, \mathbf{i}$ $\qquad$ $\vec{U}_B = V_B \, \mathbf{i}$

Tverrsnitt $\quad \dfrac{S_A}{S_B} = 2$ $\qquad$ Kun avh av x! og t

Biltetthet $= \rho(x,t) = \dfrac{\text{Antall biler}}{km^2}$

Ω = området mellom A og B

La oss nå, rimelig nok, anta at antall biler er en konservert størrelse.
Hvis det kommer flere biler inn ved A enn det går ut ved B, så må antallet biler i domenet Ω øke. Vi har

Antall biler ut ved B

$$\int_{S_B} \rho_B \vec{v}_B \cdot \hat{i}\, dy \qquad \left[\frac{\text{Antall biler}}{h}\right]$$

Antall biler ut ved A

$$\int_{S_A} \rho_A \vec{v}_A \cdot (-\hat{i})\, dy$$

Endring i totalt antall biler mhp t

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega} \rho \, d\sigma\right) \qquad \left[\frac{\text{Antall biler}}{h}\right]$$

Vi får balansen siden antall biler er konservert:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \rho \, d\sigma + \underbrace{\int_{S_B} \rho_B \vec{v}_B \cdot \hat{i}\, dy - \int_{S_A} \rho_A \vec{v}_A \cdot \hat{i}\, dy}_{\text{Netto utstrømning av biler}} = 0$$

Anta nå at ingen biler kjører av veien. Da er utstrømningen

$$\int_{S_B} \rho_B \vec{v}_B \cdot \hat{i}\, dy - \int_{S_A} \rho_A \vec{v}_A \cdot \hat{i}\, dy = \oint_{S} \rho \vec{v} \cdot \vec{n}\, ds$$

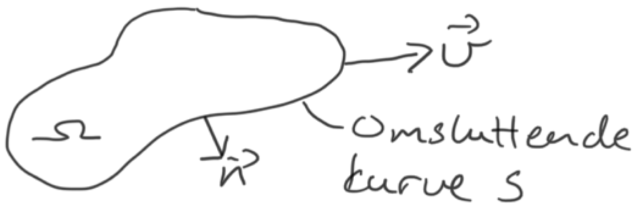
Vi får

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho \, d\sigma + \oint_S \rho \vec{v}\cdot\vec{n}\, ds = 0$$

Ω er konstant, så vi kan ta $\frac{d}{dt}$ innenfor integraltegnet. Siden $\rho(x,t)$ får vi $\frac{d}{dt} \to \frac{\partial}{\partial t}$ og

$$\int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\sigma + \oint_S \rho \vec{v}\cdot\vec{n}\, ds = 0$$

Merk: Gauss' sats gjelder også i 2D



$$\int_\Omega \nabla\cdot\vec{v}\, d\sigma = \oint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\, ds$$

Ved å bruke Gauss' sats i 2D får vi

$$\int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\sigma + \int_\Omega \nabla\cdot\rho\vec{v}\, d\sigma = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0$$

Vi får altså kontinuitetslikningen fra vår antagelse at antall biler er konservert størrelse!

La oss nå finne tettheten av biler hvis vi antar at

$$V_B = 60 \ \frac{km}{h} \ , \ V_A = 100 \ \frac{km}{h}$$

og at $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Dvs stasjonær tilstand uten tidsavhengighet.

$$\Rightarrow \quad \oint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, ds = 0 \qquad \begin{array}{l} \vec{v}_A = V_A \, \hat{i} \\ \vec{v}_B = V_B \, \hat{i} \end{array}$$

$$\int_{S_B} \rho_B \vec{v}_B \cdot \hat{i} \, dy - \int_{S_A} \rho_A \vec{v}_A \cdot \hat{i} \, dy = 0$$

$$\rho_B V_B \int_{S_B} dy - \rho_A V_A \int_{S_A} dy = 0$$

$$\rho_B V_B S_B - \rho_A V_A S_A = 0$$

Har at $\frac{s_A}{s_B} = 2$

$$\frac{\rho_B}{\rho_A} = \frac{V_A s_A}{V_B s_B} = 2\frac{V_A}{V_B} = 2 \cdot \frac{100}{60}$$

$$\frac{\rho_B}{\rho_A} = \frac{10}{3}$$

God plass mellom bilene på to-felts veien, og tett trafikk ut.
Mer enn 3 ganger flere biler pr. km^2 på 1-feltsveien.