Kapittel 9

Divergens- og virvelfrie felter

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$
$$\nabla \times \vec{v} = 0$$

Husk: dersom et vektorfelt er virvelfritt, så eksisterer et potensial ϕ

$$\vec{v} = \nabla \phi$$

Dette følger siden curlen til en gradient $= \vec{0}$.

$$\nabla \times (\nabla \phi) = \vec{0}$$

Hvis feltet i tillegg er divergensfritt, så har vi

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$\nabla \cdot \nabla \phi = 0$$

$$\nabla^2 \phi = 0$$

Laplace sin likning

Laplace operator:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$$

Merk: ∇^2 er koordinat-uavhengig.

Kartesisk:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Sylinder:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Husk 2

Dersom $\vec{v}$ er divergensfritt, $(\nabla \cdot \vec{v} = 0)$, så eksisterer et vektorpotensial

$$\vec{v} = \nabla \times \vec{A}$$

Dette vet vi siden divergens av en curl alltid er 0

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) = 0$$

Hvis $\vec{v}$ i tillegg er virvelfritt, $\nabla\times\vec{v} = 0$, så har vi

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = 0$$

vektor identitet

Vektor Laplace

Merk: $\nabla\cdot\vec{A}$ er ikke null bare

fordi $\nabla\cdot\vec{v}=0$. Men vi kan

vektor identitet

Vektor Laplace

Merk: $\nabla\cdot\vec{A}$ er ikke null bare

fordi $\nabla\cdot\vec{v}=0$. Men vi kan

gauge. (Brukes ofte for magnetfelt)

Merk: For inkompressibel strømning gir massebevaring

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Det lukker 1 frihetsgrad, men vektoren $\vec{v}$ har 3, så $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ er ikke nok til å finne $\vec{v}$.

$\nabla \cdot \vec{v} = 0$ kalles også en restriksjon (constraint).

Vektor Laplace

$$\nabla^2 \vec{A} = 0$$

For Kartesisk har vi

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 \left(A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \right)$$

$$= \mathbf{i}\nabla^2 A_x + \mathbf{j}\nabla^2 A_y + \mathbf{k}\nabla^2 A_z$$

Tre like komponentlikninger ↺

Men for kurvelineære koord. er dette ikke rett frem.

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 (A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3)$$

blir ikke tre like komponentlikninger siden enhetsvektorene må deriveres.

→ Lang og tronglete utledning.

Superposisjon

Laplace's likning

(1) $$\nabla^2 \phi = 0$$

er linear. Da gjelder superposisjon. Dvs, hvis ϕ_1 og ϕ_2 løser (1), så gjør også ϕ_3

$$\phi_3 = a\phi_1 + b\phi_2$$

der a og b er konstanter.

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi_3 &= \nabla^2(a\phi_1 + b\phi_2)\\ &= a\nabla^2\phi_1 + b\nabla^2\phi_2\\ &= 0\end{aligned}$$

Laplaciske felt i 2D

- strømfunksjon ψ
- Potensial ϕ

$$\vec{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$$

Potensial $\vec{v} = \nabla \phi$

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Strømfunksjon

$$\vec{v} = -\nabla \times \vec{\psi}$$

2D $\vec{\psi} = \psi \mathbb{k}$ $\psi = |\vec{\psi}|$

$$\nabla \times (\psi \mathbb{k}) = \nabla \psi \times \mathbb{k} + \cancel{\psi \nabla \times \mathbb{k}}$$

$$\vec{v} = -\nabla \psi \times \mathbb{k}$$

$$\vec{v} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \mathbb{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \mathbb{j} \right) \times \mathbb{k}$$

$(\mathbb{j} \times \mathbb{k} = \mathbb{i})$

$(\mathbb{i} \times \mathbb{k} = -\mathbb{j})$

$$\vec{v} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \mathbb{i} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \mathbb{j}$$

Vi har altså

$$\vec{v} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\,\mathbf{j}$$

$$\vec{v} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}\,\mathbf{i} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\,\mathbf{j}$$

Cauchy-Riemann relasjonene:

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

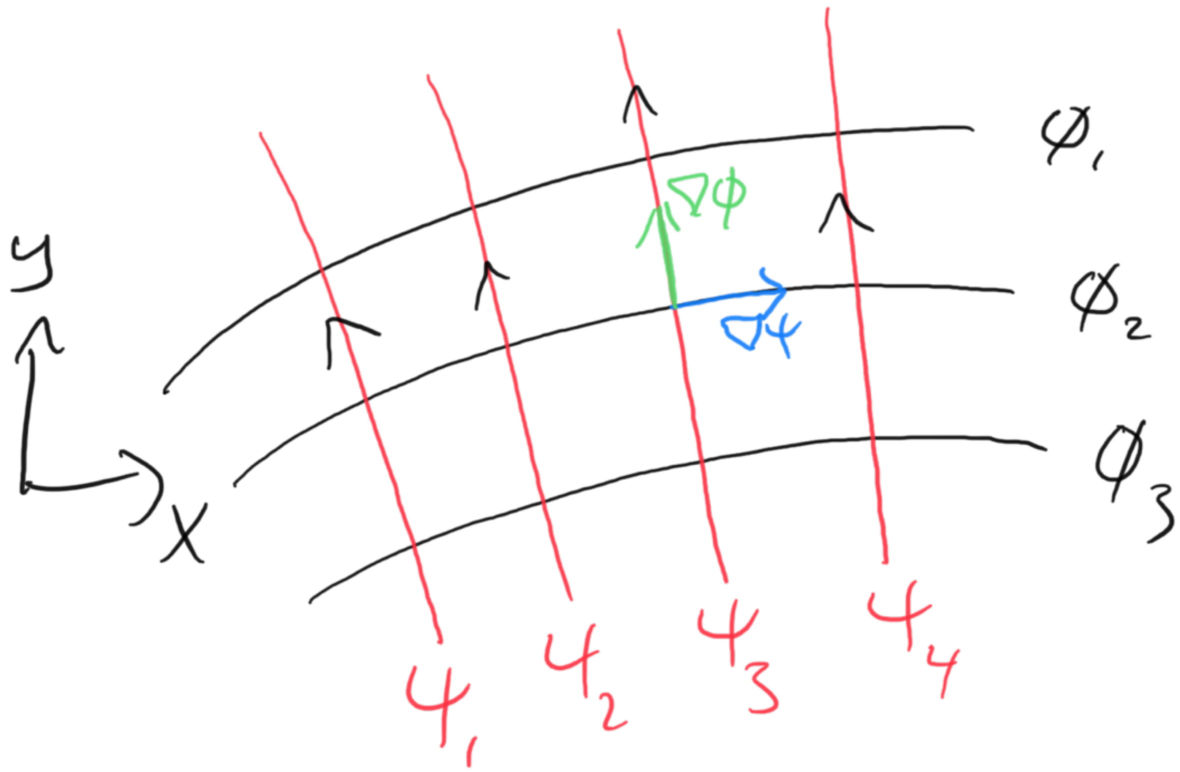
Har at

$$\nabla\phi \cdot \nabla\psi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$= -\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$\underline{= 0}$$

→ Ekviskalarlinjene til ϕ og ψ står vinkelrett på hverandre



Polarkoord.

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\mathbf{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\mathbf{i}_\theta$$

$$\vec{v} = -\nabla\psi \times \mathbb{k}$$

$$= -\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbb{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbb{i}_\theta\right)\times\mathbb{k}$$

$$= \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbb{i}_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbb{i}_r$$

$$v_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{\partial\phi}{\partial r}$$

$$v_\theta = \frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$$

Cauchy-Riemann i polar.

$$\nabla\phi\cdot\nabla\psi$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\mathbb{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\mathbb{i}_\theta\right)\cdot\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbb{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbb{i}_\theta\right)$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\left(-r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)$$

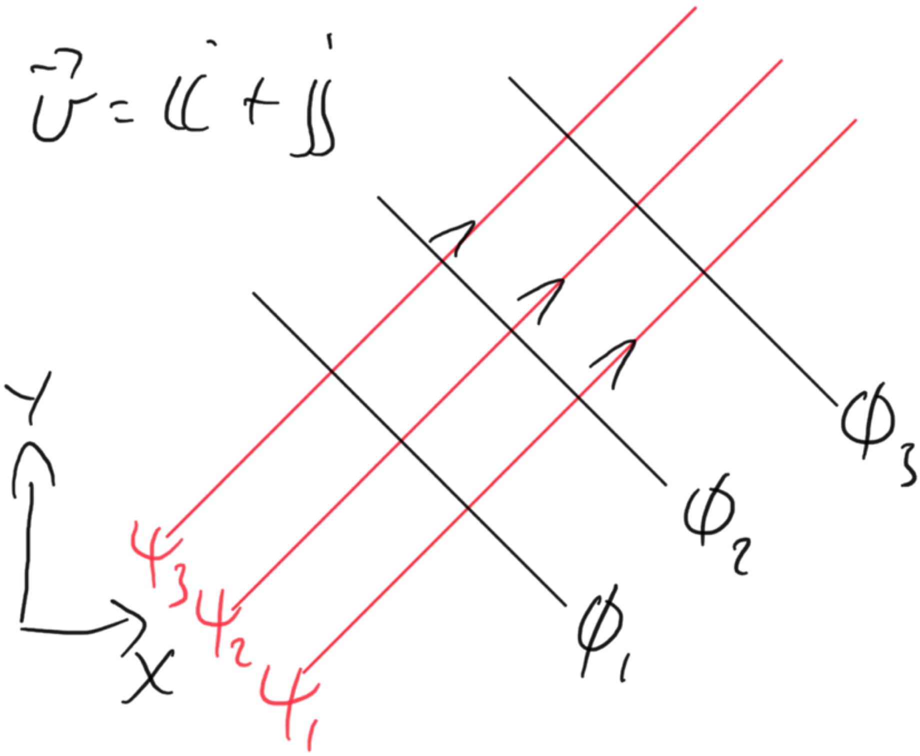
$$\underline{= 0}$$

Eksempel

$\vec{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

$\nabla \cdot \vec{v} = 0$

$\nabla \times \vec{v} = 0$



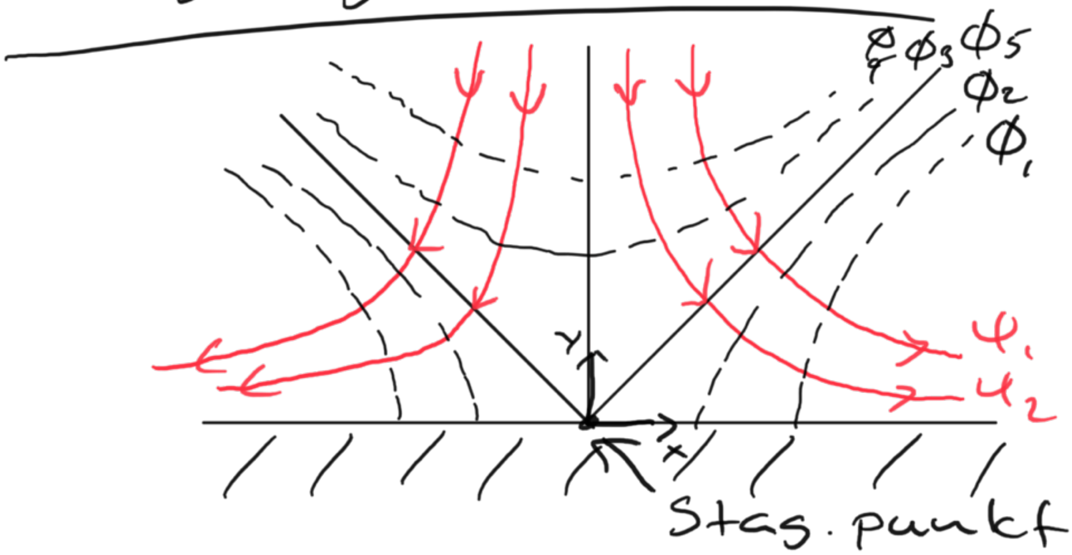
$\nabla^2 \phi = 0$

$\nabla^2 \psi = 0$

$$\phi = x + y \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 1\right)$$

$$\psi = -Y + X \quad \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 1\right)$$

Stagnasjonsstrøm



$$\vec{U} = Ax\,\mathbf{i} - Ay\,\mathbf{j}$$

Ser at

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad , \quad \nabla \times \vec{U} = 0$$

Modell for strømning inn mot vegg. Feil fordi den ikke tar hensyn til friksjon som er viktig i et grensesjikt nær veggen.

Finner ϕ og ψ

$$\nabla\phi = Ax\,\mathbf{i} - Ay\,\mathbf{j}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = Ax \;,\; \frac{\partial\phi}{\partial y} = -Ay$$

$$\phi = \frac{1}{2}Ax^2 + f_1(y) \;,\; \phi = -\frac{1}{2}Ay^2 + f_2(x)$$

$$\Rightarrow \underline{\phi = \frac{1}{2}A(x^2 - y^2)}$$

Strømfunksjon:

$$Ax = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \;,\; -Ay = \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$\psi = -Axy + f_1(x) \;,\; \psi = -Axy + f_2(y)$$

$$\Rightarrow \underline{\psi = -Axy}$$

<u>Sjekk</u>

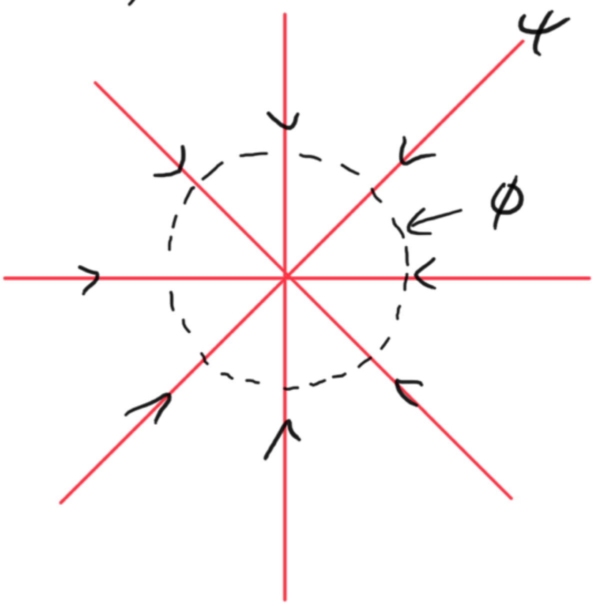
$$\nabla^2 \phi = \nabla^2 \frac{1}{2} A (x^2 - y^2)$$
$$= \frac{1}{2} A (2-2) = \underline{0}$$

$$\nabla^2 \psi = -\nabla^2 Axy = \underline{0}$$

Kilde/sluk

Strøm rettet inn eller ut fra et punkt

$$\vec{v} = \frac{A}{r} u_r$$



ϕ/ψ kun funksjoner av r.

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = A \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{1}{r} \right) \right) = 0$$

Men netto innstrømning/utst

tyder på divergens?
Singulært punkt i origo
der hastigheten → ∞

Vi finner netto inn-/utstrømning
fra

$$Q = \oint \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{A}{r} \mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}_r \, r \, d\theta$$

$$\underline{Q = 2\pi A}$$

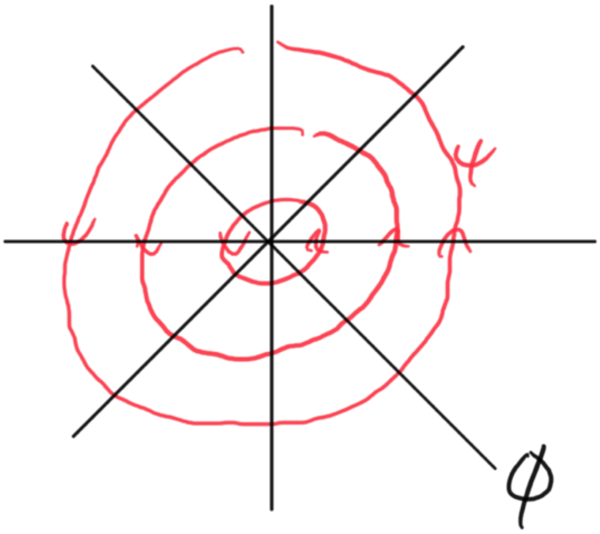
Uavhengig av r!

$A > 0 \rightarrow$ utstrømning

$A < 0 \rightarrow$ innstrømning

Q er styrken til kilden/sluket.

Punktvirvel



$$\vec{v} = \frac{A}{r}\,\mathbf{i}_\theta$$

$$\nabla\cdot\vec{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\frac{A}{r} = 0$$

Sirkulasjonen

$$\oint \vec{v}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} v_\theta\, r\, d\theta$$

Styrken til punktvirvelen $= \underline{2\pi A}$

Igjen en singularitet i origo.

$\nabla\times\vec{v} = \vec{0}$ overalt unntatt origo. I origo er $\nabla\times\vec{v} \to \infty$

$$\nabla\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_r & r\mathbf{i}_\theta & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & A & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Merk: Punktvirvelen er en (ufysisk) modell av en virkelig virvel.
I en virkelig virvel blir friksjonen stor inn mot $r=0$, slik at hastigheten der bremses og ikke $\to \infty$.