Feltlikning for bevegelsesmengde
Newton's 2 lov

GF 10.4 (6.6)

Vi har sett at loven om konservering av masse gir kontinuitetslikningen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0$$

Én likning (skalarlikning)
4 ukjente

$\rho(\vec{r}, t)$	skalar	1
$\vec{v}(\vec{r}, t)$	vektor	3

Kont. likningen er ikke nok for å kunne beskrive strømning av fluider helt generelt!

Vi trenger Newton's 2 lov for å finne en likning for $\vec{v}$. Vi ser for oss en infinidesimal fluidpartikkel, og så bruker vi 2 lov på denne

$$(1) \qquad m\vec{a} = \sum \text{krefter}$$

Vi har

m = masse til partikkel

$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt}$ partikkelakselerasjon $\left(\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\right)$

$\sum$ krefter = Summen av de kreftene som virker på en fluidpartikkel. Dette er:

- Trykkraft
- Friksjonskraft
- Tyngdekraft

Vi vil nå utlede en matematisk form av (1) som kan brukes til å finne $\vec{v}$.

Vi velger å se bort fra friksjon, som kun er viktig i grensesjikt nær veggen.

<u>Tyngdekraft</u> er ganske enkelt

$$m\vec{g}$$

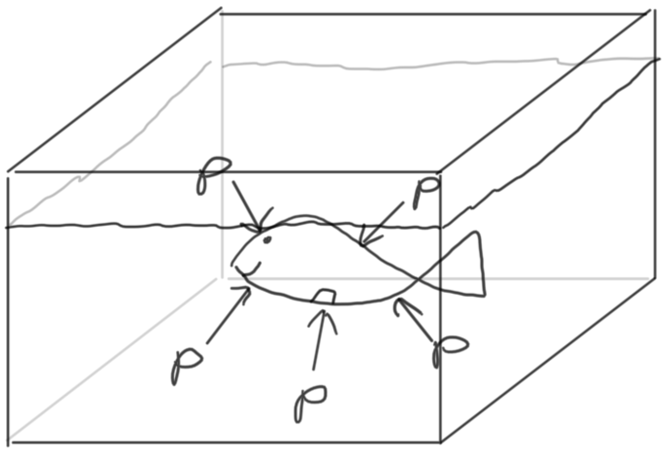
$$\vec{g} = -g\mathbf{k} \qquad z$$

$$g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$$

Uproblematisk siden kraften er konstant, og dermed kjent.

<u>Trykkrefter</u> er krefter som virker normalt inn mot en flate. Se på fisken i akvariet.

Jo dypere den går, jo høyere blir trykket, siden man da har mer vann over seg



$p: \left[\frac{N}{m^2}\right]$

På et lite flatelement $\Delta\sigma_i$ på fisken, så virker det en trykkraft rettet normalt inn mot fisken

$$-p\vec{n}\Delta\sigma_i \qquad [N]$$

Summerer man alle flate-elementene $\sum_i -p\vec{n}\Delta\sigma_i$ og tar $\lim \Delta\sigma_i \to 0$, så får man total trykkraft som virker på fisken

$$\vec{F} = -\oint_S p\vec{n}\,d\sigma \qquad \left(\begin{array}{c} S = \text{Flaten} \\ \text{til fisken} \end{array}\right)$$

Nå kan vi bruke Gauss' sats (på alternativ form):

$$\vec{F} = -\int_V \nabla p\,dV \qquad \left(\begin{array}{c} V = \text{Volumet} \\ \text{til fisken} \end{array}\right)$$

Hvis vi nå istedenfor fisk ser på en fluidpartikkel, så får vi (part. er så liten at $\nabla p \approx$ konst)

$$\vec{F} = -\nabla p \int_V dV$$

$$= -\nabla p\, V$$

der $V = \dfrac{m}{\rho}$ er volumet (til partikkel)

(se også GF 6.6)

Tilbake til Newton's 2 lov

$$m \vec{a} = \Sigma \text{ krefter}$$

$$m \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p \, V + m\vec{g}$$

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}$$

Euler's likning

Vektorlikning. Kun gyldig hvis man ser bort fra friksjon. I praksis betyr det at likningen gjelder langt fra faste vegger.

<u>Vanligste form</u>, sammen med kontinuitetslikningen

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0$$

4 likninger
5 ukjente : $\rho, \vec{v}, p$

Inkompressibelt fluid:
$\rho = \text{konst}$

$\Rightarrow$ 4 likninger, 4 ukjente !

Kompressibelt fluid:

Trenger 1 likning til
- Termodynamikk
- Konservering av energi

Euler's likning er ikke-linear $((\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v})$, og kan derfor bare

Løses med numeriske metoder, unntatt ved forenklede tilfeller.

Eksempel

Stillestående fluid $\rightarrow \vec{v} = \vec{0}$
Euler's likning reduseres til den lineære

$$\nabla p = \rho \vec{g}$$

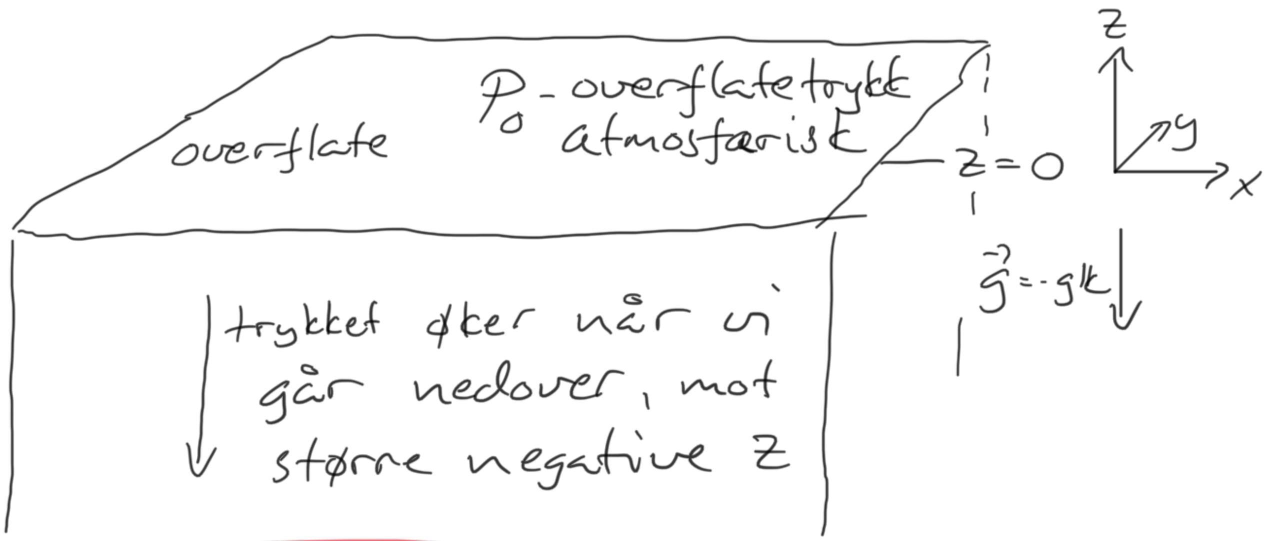
Hvis $\vec{g} = -g\mathbf{k}$ får vi

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

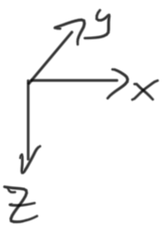
Hvis ρ = konstant

$$\Rightarrow \quad p(z) = p_0 - \rho g z$$

der p_0 = konstant. $\rightarrow$ Kalles hydrostatisk trykk.



Merk: GF 6.6 bruker omvendt koordinatsystem, der z peker nedover, og får



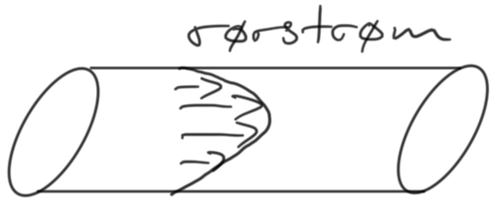
$$p(z) = p_0 + \rho g z$$

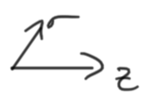
GF har heller ikke høyrehånds koord. system

Andre tilfeller der det ikke-lineære leddet faller bort:

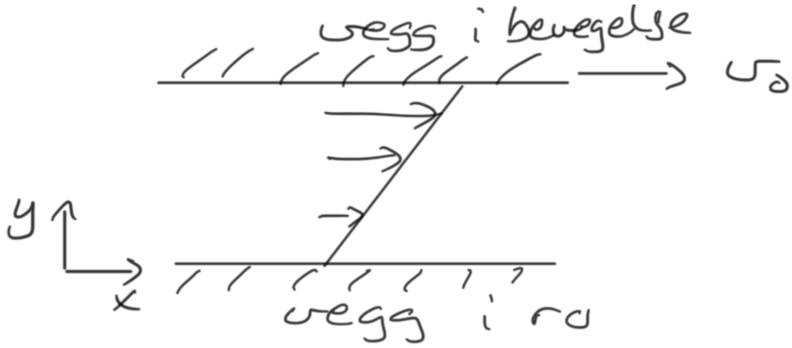
Parallell skjærstrøm

$$\vec{U} = U_0(1-r^2)\mathbf{k}$$





$$\vec{v} = y v_0 \mathbf{i}$$



I begge tilfeller så er strømningen rettlinjet, og parallell med omsluttende vegger

$\Rightarrow$ den ikke-lineære konveksjonen

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \vec{0}$$

Hvis $\vec{v} = \underbrace{v_0 y}_{v_x} \mathbf{i}$

$$(\vec{v}\cdot\nabla) = v_x \frac{\partial}{\partial x} + \cancel{v_y} \frac{\partial}{\partial y} + \cancel{v_z} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$= v_0 y \frac{\partial}{\partial x}$$

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = v_0 y \frac{\partial}{\partial x}(v_0 y \mathbf{i})$$

$$= v_0^2 y \mathbf{i} \cancel{\frac{\partial y}{\partial x}} = \underline{\vec{0}}$$