Stokes' sats

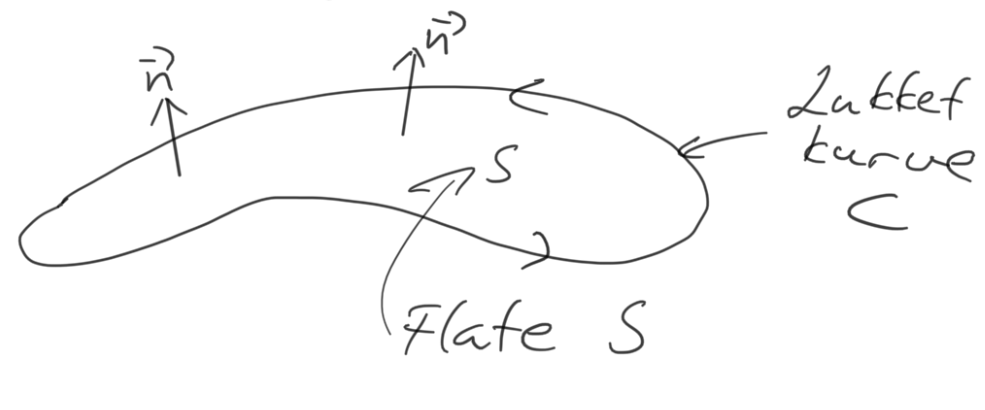
M 5.2 GF 7.3

Virvlingsteorem

Gir en alternativ måte å beregne sirkulasjon.

Nok et nyttig verktøy.

For en <u>lukket</u> kurve C, som omslutter en flate S,



har vi ifølge Stokes' sats

$$\int_S \nabla \times \vec{u} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{r}$$

Total mengde virvling i flaten S

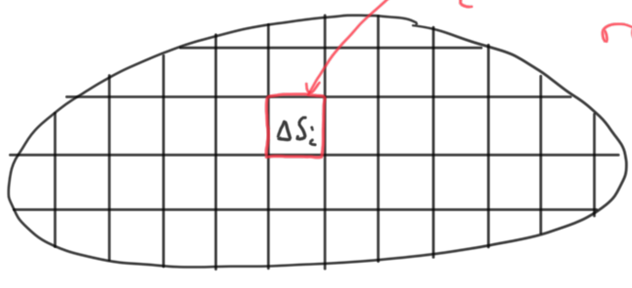
sirkulasjon

Nyttig verktøy for å finne sirkulasjon, når det er enkelt å finne virvlingen!

<u>Bevis</u> er veldig likt som for Gauss' sats.

Anta at S deles opp i mindre delflater ΔS_i

C_i er kurven (lukket) rundt ΔS_i



Vi har at $S = \int_S d\sigma = \sum_i \Delta S_i$

Definisjonen av virvling gir oss

$$\nabla \times \vec{u} \cdot \vec{n} = \lim_{S \to 0} \frac{1}{S} \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{r}$$

For delflate har vi derfor

$$\nabla \times \vec{u} \cdot \vec{n} \, \Delta S_i \approx \oint_{C_i} \vec{u} \cdot d\vec{r}$$

(Hvis $\Delta S_i \to 0$ blir $\approx$ til $=$)

Hvis vi nå summerer over alle delflater, så får vi

$$① \quad \sum_i \nabla \times \vec{u} \cdot \vec{n} \, \Delta S_i \approx \sum_i \oint_{C_i} \vec{u} \cdot d\vec{r}$$

Venstre siden er enkel siden det er en Riemann sum

$$\sum_i \nabla \times \vec{u} \cdot \vec{n} \, \Delta S_i \approx \int_S \nabla \times \vec{u} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

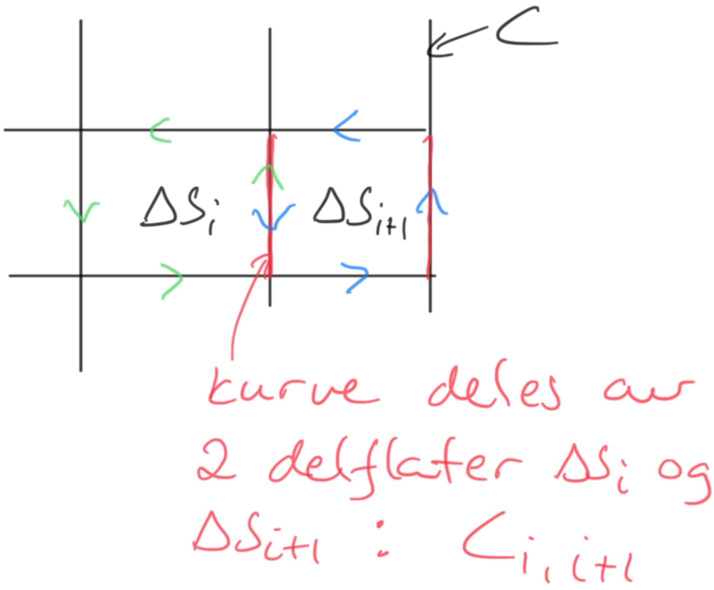
Hvis vi lar $\Delta S_i \to 0$ får vi til og med likhetstegn

$$\lim_{\Delta S_i \to 0} \sum_i \nabla \times \vec{u} \cdot \vec{n}\, \Delta S_i = \int_S \nabla \times \vec{u} \cdot \vec{n}\, d\sigma$$

Høyresiden i 1 er mer komplisert siden det ikke er noen Riemann sum der. Men vi får noe som blir veldig likt som for Gauss' sats. Når vi summerer over alle delflater

$$\sum_i \oint_{C_i} \vec{u} \cdot d\vec{r}$$

så forsvinner alle bidrag fra <u>interne</u> kurver, og vi står kun igjen med integral over <u>eksterne</u> kurver. Som for Gauss' sats, så er dette fordi alle interne kurver integreres over 2 ganger, mens eksterne integreres over 1 gang. Alle interne kurver deles av 2 delflater



Når vi tar summen over alle del-flater $\sum_i \oint_{C_i} \vec{u} \cdot d\vec{r}$

får vi for tegningen over sine to delflater ΔS_i og ΔS_{i+1} bidragene

$$\oint_{C_i} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_{i+1}} \vec{u} \cdot d\vec{r}$$

For kurven $C_{i,i+1}$ får vi da to bidrag.

Vi ser at over ΔS_i så går kure-integralet over $C_{i,i+1}$ oppover (grønne piler) mens for ΔS_{i+1} gå det nedover (blå piler). Siden $\vec{u}$ ellers er lik, vil de to bidragene kansellere.

For den <u>eksterne</u> kurven til ΔS_{i+1}, så er det ingen delflate til høyre, så bidraget her blir ikke kansellert.

Konklusjon

$$\sum_i \oint_{C_i} \vec{u}\cdot d\vec{r} = \sum_{\substack{\text{eksterne}\\ \text{kurver}\\ C_j^e}} \int_{C_j^e} \vec{u}\cdot d\vec{r}$$

ikke lukket

I grensen $\Delta S_i \to 0$ blir dette

$$\lim_{\Delta S_i \to 0} \sum_i \oint_{C_i} \vec{u}\cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{u}\cdot d\vec{r}$$

lukket

Den siste likheten følger fra at alle de eksterne delkurvene blir til C når vi slår alle sammen. C er lukket.

Følgelig har vi nå vist at

$$\int_S \nabla \times \vec{u} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{r}$$

Virvlingen i en flate er lik sirkulasjonen rundt flaten.

Fra før visste vi at

Virvlingen i et punkt er lik sirkulasjonen rundt punktet.

$$\nabla \times \vec{u} \cdot \vec{n} = \lim_{S \to 0} \frac{1}{S} \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{r}$$

Eksempel

Gitt et vektorfelt for rotasjon av fast legeme

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{\omega} = \omega \mathbf{k}$$

Hva blir sirkulasjonen av $\vec{v}$

for en vilkårlig kurve C i xy-planet ?

Her finner vi enkelt virvlingen

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y\omega\,\mathbf{i} + x\omega\,\mathbf{j}$$

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y\omega & x\omega & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k} \cdot 2\omega$$
$$= 2\vec{\omega}$$

Bruker Stokes' sats til å finne

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_S \nabla \times \vec{v} \cdot \vec{n}\, d\sigma$$
$$= \int_S 2\vec{\omega} \cdot \mathbf{k}\, d\sigma$$
$$= 2\omega \overbrace{\int_S d\sigma}^{A}$$
$$\underline{\underline{= 2\omega A}}$$

Stokes' sats viser oss at et virvelfritt vektorfelt er konservativt!

Hvis $\nabla \times \vec{u} = \vec{0}$, så har vi

$$\oint_C \vec{u} \cdot d\vec{r} = \int_S \nabla \times \vec{u} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

$$= \int_S \vec{0} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

$$= \underline{0}$$