Bernoulli's likning

GF 10.5 (M 8.5.3)

Euler's likning + kontinuitetslikn.

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g}$$

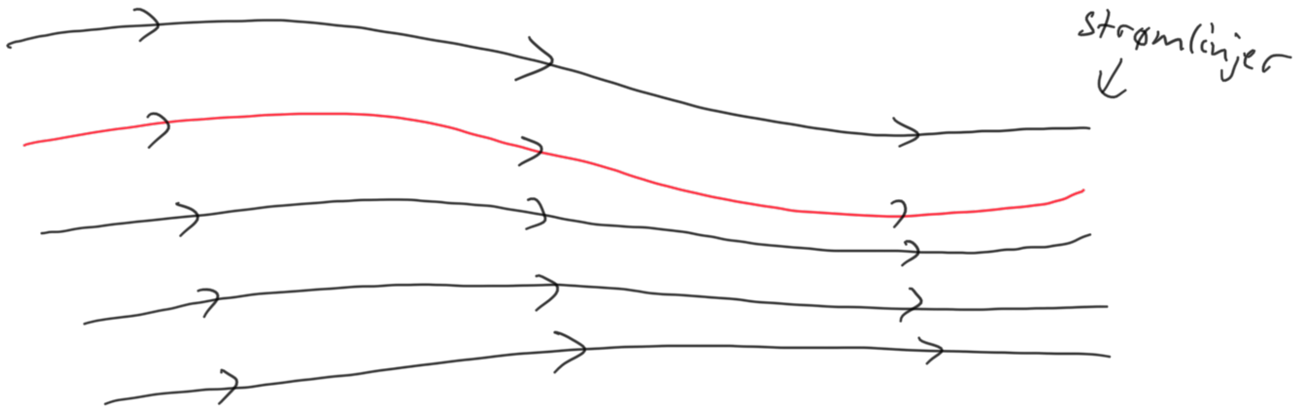
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\rho\vec{v} = 0$$

gir oss trykk og hastighet overalt -> Eulersk formulering.

Men, ikke-linear og krevende å løse. Vi trenger forenklinger!

-> Bernoulli's likning er en Lagransk formulering av Euler's likning.

Bernoulli's likning er Euler's likning langs én strømlinje



Euler's likning : 3D rom + tid

Bernoulli : Stasjonær, langs 1 kurve i rommet

Forenkling!

Utledning

Antagelser

- stasjonær strømning $\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \right)$
- inkompressibel $(\rho = \text{konstant})$

(1) $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} + \frac{1}{\rho}\nabla p - \vec{g} = \vec{0}$

Vi skriver nå tyngdekreftene som et skalarpotensial $\vec{g} = -\nabla \psi \; (= -\nabla g z)$ og bruker vektoridentiteten

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \frac{\nabla|\vec{v}|^2}{2} + \underbrace{(\nabla \times \vec{v})}_{\vec{\omega}} \times \vec{v}$$

Se M: Eksempel 4.14

Setter inn i (1)

$$\nabla \frac{|\vec{v}|^2}{2} + \nabla \frac{p}{\rho} + \nabla \psi + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{0}$$

(2) $$\nabla \left(\frac{|\vec{v}|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \psi \right) + \vec{\omega} \times \vec{v} = 0$$

Merk: Dette er fremdeles en Eulersk formulering, som gjelder i 3D rom.

Ta nå prikkprodukt av (2) med $\vec{v}$, eller $d\vec{r}$. Begge disse vektorene er parallelle med strømlinjene

$$\vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{|\vec{v}|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \psi \right) + \underbrace{\vec{v} \cdot \cancel{(\vec{\omega} \times \vec{v})}}_{0} = 0$$

siden $\vec{\omega} \times \vec{v}$ står vinkelrett på $\vec{v}$

Vi får

$$\vec{v} \cdot \nabla\left(\frac{|\vec{v}|^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \psi \right) = 0$$

eller

$$d\vec{r} \cdot \nabla\left(\frac{|\vec{v}|^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \psi \right) = 0$$

$\Rightarrow$ $\nabla\left(\frac{|\vec{v}|^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \psi \right)$ er vinkelrett på $\vec{v}$ eller $d\vec{r}$

Dette gir oss Bernoulli's likning:

$\frac{|\vec{v}|^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \psi$ er konstant langs strømlinje

Husk: Infinitesimal endring i skalar f, df, er gitt ved

$$df = \nabla f \cdot d\vec{r}$$

Så

$$d\left(\frac{|\vec{v}|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \psi\right) = \nabla\left(\frac{|\vec{v}|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \psi\right) \cdot d\vec{r}$$

Vi har funnet at denne er 0, så derfor er også denne 0.

$$d\left(\frac{|\vec{v}|}{2} + \frac{p}{\rho} + \psi\right) = 0 \quad \text{langs strømlinje}$$

Merk:

$$\frac{|\vec{v}|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \psi$$ er konstant langs en strømlinje, men verdien på konstanten varierer fra linje til linje.

Bernoulli's likning gir oss <u>ikke</u> verdien til konstanten.

Merk:

Hvis $\vec{v}$ er virvelfritt $(\nabla \times \vec{v} = \vec{0})$ så har vi Euler's likning

$$\nabla\left(\frac{|\vec{v}|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \psi\right) = \vec{0}$$

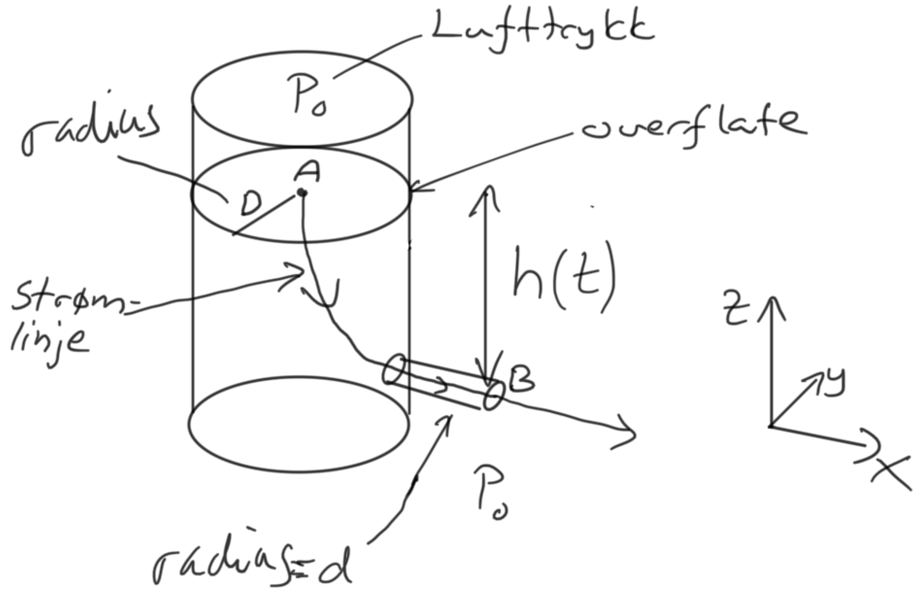
Så i dette tilfellet er

$$\frac{|\vec{v}|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \psi = \text{konst}$$

og konstanten har samme verdi for alle strømlinjer!

Eksempel

Væskeutstrømning gjennom en liten åpning i en stor tank.



Hva er utstrømningshastigheten?

Vi ser på en strømlinje som strekker seg fra overflaten A til utløpet B.

Bernoulli's likning gir oss

$$\text{①} \quad \frac{1}{2}|\vec{v}_A|^2 + \frac{P_A}{\rho} + gh = \frac{1}{2}|\vec{v}_B|^2 + \frac{P_B}{\rho} + g\cdot \underset{\substack{\uparrow \\ z=0 \text{ ved} \\ \text{utløp}}}{0}$$

$\vec{v}_A = -v_A \mathbf{k}$, $v_A > 0$, hast. ved A

$\vec{v}_B = v_B \mathbf{i}$, $v_B > 0$, hast. ved B

Både A og B er ved samme lufttrykk P_0.

Setter inn i ①

$$\frac{1}{2}v_A^2 + gh = \frac{1}{2}v_B^2$$

$$\text{②} \qquad \underline{v_B = \sqrt{2gh + v_A^2}}$$

Hvis vi antar at $v_A \ll v_B$, så har vi

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

Sammenlign med å slippe en stein fra en høyde h. Potensiell energi mgh går over til kinetisk $\frac{1}{2}mv^2$

$$\Rightarrow \cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$$

$$\underline{v = \sqrt{2gh}}$$

Tilbake til 2. Kan vi finne v_A?

Vi kan bruke loven om massebevaring med ρ = konst. Det gir

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Da er også $\int_V \nabla \cdot \vec{v} \, dV = 0$, og Gauss' sats gir oss at

$$\oint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0$$

Det er kun strømning ved A og B.

$$\oint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_A \vec{v}_A \cdot \mathbb{k} \, d\sigma + \int_B \vec{v}_B \cdot \mathbb{i} \, d\sigma = 0$$

$$\int_A -v_A \mathbb{k} \cdot \mathbb{k} \, d\sigma + \int_B v_B \mathbb{i} \cdot \mathbb{i} \, d\sigma = 0$$

$$-v_A \int_A d\sigma + v_B \int_B d\sigma = 0$$

$$-v_A \cancel{\pi} D^2 + v_B \cancel{\pi} d^2 = 0$$

$$\underline{v_A = v_B \left(\frac{d}{D}\right)^2}$$

Setter inn i 2

$$\frac{1}{2} v_A^2 + gh = \frac{1}{2} v_B^2$$

$$\frac{1}{2} v_B^2 \left(\frac{d}{D}\right)^4 + gh = \frac{1}{2} v_B^2$$

$$\underline{\underline{v_B = \sqrt{\frac{2gh}{1-\left(\frac{d}{D}\right)^4}}}}$$

Merk: Vi har brukt Bernoulli og antar stasjonær strøm. Men siden overflaten synker er dette kun en tilnærming!

Vi kan finne v_A som funksjon av tid siden

$$v_A = -\frac{dh}{dt}$$

$$v_A = v_B\left(\frac{d}{D}\right)^2 = \sqrt{\frac{2gh}{1-\left(\frac{d}{D}\right)^4}}\left(\frac{d}{D}\right)^2 = -\frac{dh}{dt}$$

$$\underbrace{\sqrt{\frac{2g\left(\frac{d}{D}\right)^4}{1-\left(\frac{d}{D}\right)^4}}}_{\alpha}\sqrt{h} = -\frac{dh}{dt}$$

$$\alpha\sqrt{h} = -\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{1}{\sqrt{h}}\frac{dh}{dt} = -\alpha$$

Multipliserer begge sider med dt og integrerer fra 0 til t

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{h}}\frac{dh}{dt}\,dt = \int_0^t -\alpha\,dt$$

Substitusjon

$$\int_{h(0)}^{h(t)} \frac{1}{\sqrt{h}}\,dh = -\int_0^t \alpha\,dt$$

$$\left. 2\sqrt{h}\right]_{h(0)}^{h(t)} = -\alpha t \qquad (h_0 = h(0))$$

$$2(\sqrt{h} - \sqrt{h_0}) = -\alpha t$$

$$\sqrt{h} = \sqrt{h_0} - \frac{\alpha}{2}t$$

$$h = \left(\sqrt{h_0} - \frac{\alpha}{2}t\right)^2$$

$$v_A = -\frac{dh}{dt} = -2\left(\sqrt{h_0} - \frac{\alpha}{2}t\right)\left(-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= \underline{\alpha\left(\sqrt{h_0} - \frac{\alpha}{2}t\right)}$$

Overflatens synkefart er lineær mhp tid.

Men husk, vi bruker Bernoulli som antar stasjonære forhold. Så dette er kun gyldig for $v_A << v_B$

Tømming av tank er et klassisk tilfelle der Bernoulli's likning er nyttig, siden vi i dette tilfellet kun er interessert i hastigheten ved to forskjellige steder langs en strømlinje!