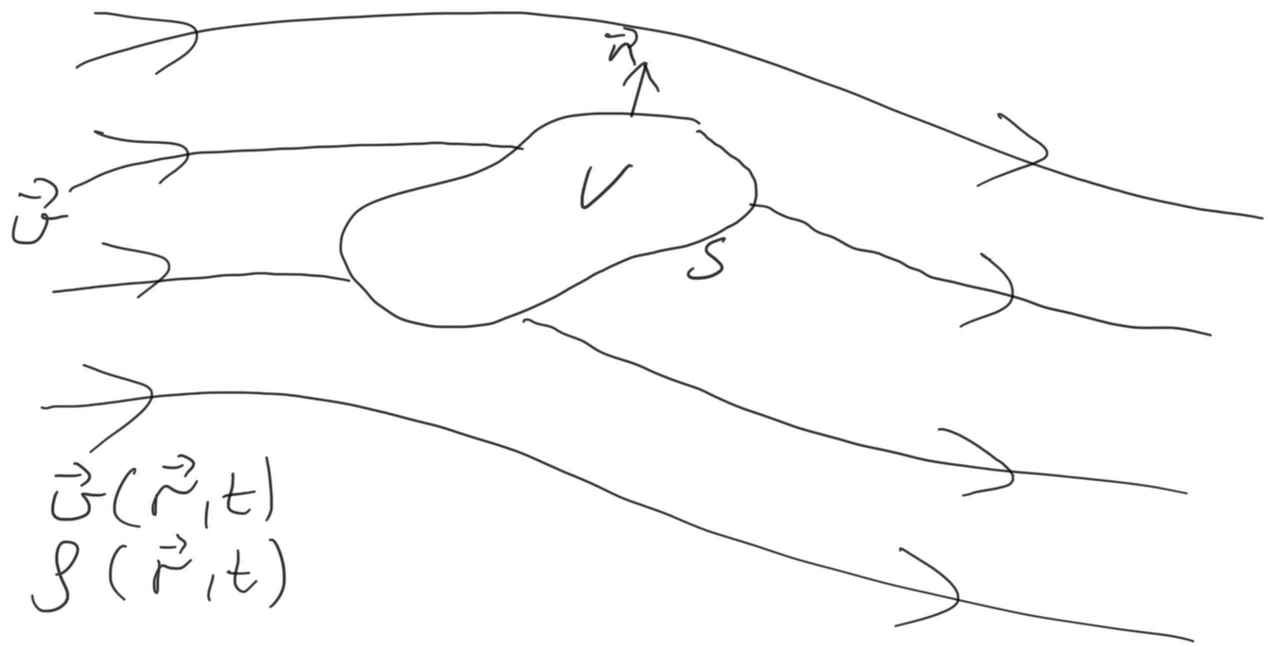
Euler's likning
Alternativ utledning

(1) $$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g}$$

Vi har utledet (1) ved å bruke Newton's 2 lov på en fluidpartikkel.

Vi vil nå utlede (1) ved å se på en balanse over et kontroll-volum. På samme måte som ble gjort for massebevarelse.
Vi vil nå se på balansen av bevegelsesmengde $\rho\vec{v}$, istedenfor masse.
Vi starter med et <u>fast</u> kontrollvolum V, med en viss utstrekning



Fluidet strømmer gjennom V uhindret.

Total bevegelsesmengde $\rho\vec{v}$ i V:

$$B(t) = \int_V \rho\vec{v}\, dV$$

Endring i denne mhp tid

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\vec{v}\, dV = \int_V \frac{\partial \rho\vec{v}}{\partial t}\, dV$$

Vi kan flytte $\frac{d}{dt}$ innenfor siden kontrollvolumet V er fast.
Inne i integralet blir $\frac{d}{dt} \to \frac{\partial}{\partial t}$.

siden $\rho\vec{v}$ er funksjon av $\vec{r}$ og t. $B(t)$ er kun funksjon av t.

Vi definerer nå fluksstettheten av $\rho\vec{v}$ som

$\rho\vec{v}\vec{v}$ 2 ordens tensor

$\rho v_i v_j$ Indeksform

Merk: Fluksstetthet av

masse $= \rho\vec{v}$

bevegelsesmengde $= \rho\vec{v}\vec{v}$

Integrert fluks av bev. mengde ut gjennom flaten S er

$$\oint_S \rho\vec{v}\vec{v}\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

Dette er netto utstrømning av $\rho\vec{v}$.

Her kan vi bruke Gauss' sats og få

$$\int_V \nabla\cdot(\rho\vec{v}\vec{v})\,dV$$

For spesielt interesserte: For en 2 ordens tensor $\vec{\vec{T}}$, har man Gauss' sats

$$\oint_S \vec{\vec{T}}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \int_V \mathrm{div}(\vec{\vec{T}})\,dV$$

Husk $(\mathrm{div}\,\vec{\vec{T}})_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$

mens $(\nabla\cdot\vec{\vec{T}})_i = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j}$

$(v_i v_j = v_j v_i)$

Siden $\vec{v}\vec{v} = (\vec{v}\vec{v})^T$, så er $\mathrm{div}(\vec{v}\vec{v}) = \nabla\cdot\vec{v}\vec{v}$. Så for symmetrisk $\vec{\vec{T}}$ har man

$$\oint_S \vec{\vec{T}}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \int_V \nabla\cdot\vec{\vec{T}}\,dV$$

Tilbake til (1). Vi har tidligere sett at trykkrefter på et vilkårlig volum (fisk), er

$$-\oint_S p\vec{n}\,d\sigma$$

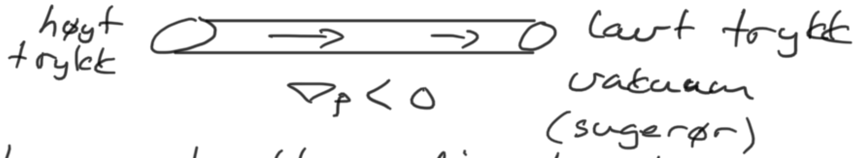
$$= -\int_V \nabla p\,dV$$

Tyngdekraft på V er

$$\int_V \rho\vec{g}\,dV$$

Trykk og tyngdekrefter er <u>kilder</u> til bevegelsesmengde.

- Trykkgradienter driver fluider gjennom rør. Tenk på pumper, eller sugerør.



$\nabla p < 0$

Jo større trykkgradient, jo mer bevegelsesmengde.

- Jo høyere tyngdeakselerasjon, jo mer bevegelsesmengde.

Hvis vi nå setter at total mengde $\rho\vec{v}$ i V balanseres av trykk og tyngdekrefter, så får vi

$$\int_V \frac{\partial \rho\vec{v}}{\partial t}\,dV + \int_V \nabla\cdot\rho\vec{v}\vec{v}\,dV = -\int_V \nabla p\,dV + \int_V \rho\vec{g}\,dV$$

Akkumulasjon pga endring i $\rho\vec{v}$ mhp t + Netto utstrømning = Trykk krefter + Tyngde krefter

$$\Rightarrow \int_V \underbrace{\frac{\partial \rho\vec{v}}{\partial t} + \nabla\cdot\rho\vec{v}\vec{v} + \nabla p - \rho\vec{g}}_{=0}\,dV = 0$$

$$\Rightarrow (2)\quad \frac{\partial \rho\vec{v}}{\partial t} + \nabla\cdot\rho\vec{v}\vec{v} = -\nabla p + \rho\vec{g}$$

Merk: Uten trykk- og tyngdekrefter så har man

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v}\vec{v} = \vec{0}$$

Da er $\rho\vec{v}$ en bevart størrelse, akkurat som masse.

Vi kan forenkle ② videre ved å bruke kontinuitetslikningen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0$$

Vi har (produktregel)

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} = \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \rho \vec{v}\vec{v} = \vec{v}\, \nabla \cdot \rho \vec{v} + (\rho \vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$$

Denne ser jeg enklest med indeks-notasjon

$$(\nabla \cdot \rho \vec{v}\vec{v})_i = \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j v_i)$$

Produktregel

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} \rho v_j v_i = \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j}$$

$$= \left((\rho \vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}\right)_i + \left(\vec{v}\, \nabla \cdot \rho \vec{v}\right)_i$$

Vi får $\quad v_j \frac{\partial}{\partial x_j} = \vec{v} \cdot \nabla$

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} \vec{v} =$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{\cancel{\vec{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}\, \nabla \cdot \rho \vec{v}}}_{\cancel{\vec{v} \frac{D\rho}{Dt} = 0}} + (\rho \vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$$

$$= \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\rho \vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$$

Til slutt inn i 2

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \rho \vec{g} \quad \Big| \frac{1}{\rho}$$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}}$$

Euler's likning