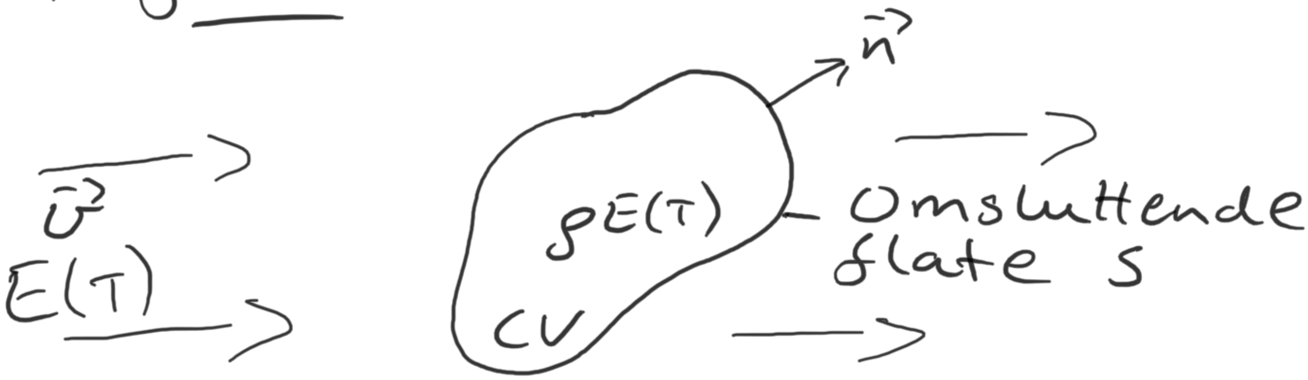
Kapittel 11

Utledning av varmelikning

Vi ser på termisk energi i et fast kontrollvolum



I kontrollvolumet har vi en energibalanse mellom

- Varmekonveksjon - pga $\vec{v}$
- Varmeledning - pga ∇T
- Kilde/sluk - kjemiske reaksjoner, friksjon, osv.

Balansen tilfredsstiller termodynamikkens 1 lov.

Energi kan hverken skapes eller ødelegges, den kan bare endre form.

Balanse på indre energi

Endring av indre energi i CV er $\left[\frac{J}{s}\right]$

$$\frac{d}{dt}\int_{CV} \rho E(T)\, dV = \int_{CV} \frac{\partial \rho E}{\partial t}\, dV$$

- $\frac{d}{dt}$ kan flyttes innenfor $\int$ siden CV er fast.

$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}$ siden $\rho(\vec{r}, t)$
$E(T(\vec{r}, t))$

- <u>Varmekonveksjon</u> - Varme transporteres pga strømnings-feltet $\vec{v}$:

$$\text{flux} \Rightarrow \rho \vec{v} E \quad \left[\frac{J}{m^2 s}\right]$$

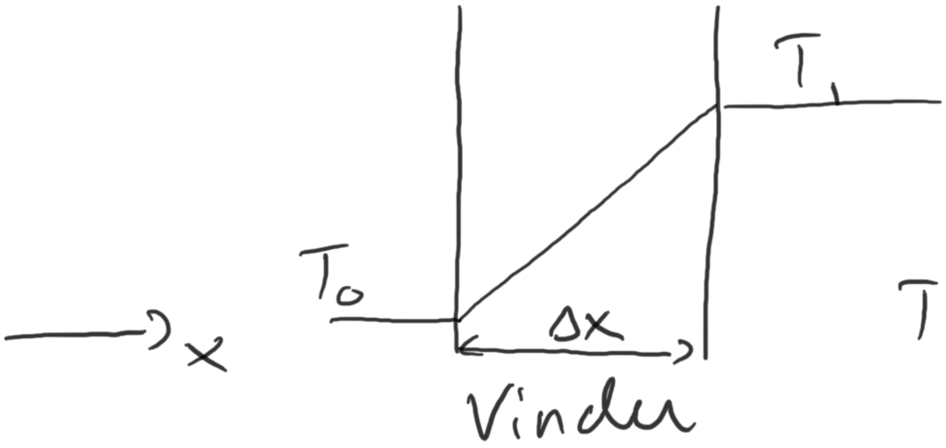
Netto utstrømning fra CV:

$$\oint_S \rho \vec{v} E \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

- <u>Varmeledning</u> - Varme ledes fra der det er varmt til der det er kaldt.

Fourier's law

$$\text{flux} \Rightarrow -k \nabla T \quad \left[\frac{J}{m^2 s}\right]$$



$T_1 > T_0$

$$\nabla T = \frac{T_1 - T_0}{\Delta x}\,\mathbf{i} \qquad k > 0$$

$$-k\nabla T = -k\frac{T_1 - T_0}{\Delta x}\,\mathbf{i}$$

$\longleftarrow$ Fra høy temp T_1 til lav T_0

k – Varmeledningstall
eller termisk konduktivitet
$\left[\frac{J}{m\,s\,K}\right]$

Netto utstrømning pga ledning

$$\oint_S -k\nabla T \cdot \vec{n}\, d\sigma$$

– Kilde/sluk (produksjon/dissipasjon)

Felles betegnelse $q \left[\frac{J}{m^3 s}\right]$

I CV

$$-\int_{CV} q \, dV$$

$q > 0 \rightarrow$ produksjon

$q < 0 \rightarrow$ sluk

Samler opp

Akkumulasjon + ut – inn = 0

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho E}{\partial t} dV + \oint_S (\rho E \vec{v} - k \nabla T) \cdot \vec{n} \, d\sigma - \int_{CV} q \, dV = 0$$

Bruker Gauss' teorem

$$\int_{CV} \left(\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \vec{v} - k \nabla T) - q \right) dV = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot \rho E \vec{v} = \nabla \cdot k \nabla T + q$$

Som er en likning for ρE.

Ønsker likning for T

Produktregel: $\qquad E(T)$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} = \rho \frac{\partial E}{\partial t} + E \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$= \rho \frac{\partial E}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + E \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$= \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + E \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \rho E \vec{v} = \rho \nabla \cdot E \vec{v} + E \vec{v} \cdot \nabla \rho$$

$$= \rho \left(E \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla E \right) + E \vec{v} \cdot \nabla \rho$$

$$\left(\nabla E(T) = \frac{\partial E}{\partial T} \nabla T = c \nabla T \right)$$

$$= \rho\left(E\nabla\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot c\nabla T\right) + E\vec{v}\cdot\nabla\rho$$

Setter sammen

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla\cdot\rho E\vec{v} = E\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho c\frac{\partial T}{\partial t} + E\vec{v}\cdot\nabla\rho$$
$$+ \rho E\nabla\cdot\vec{v} + \rho\vec{v}\cdot c\nabla T$$

Ser at røde ledd tilsvarer
$E\,\cdot$ kontinuitetslikning

$\Rightarrow$ Røde ledd summeres til 0.

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla\cdot\rho E\vec{v} = \rho c\frac{\partial T}{\partial t} + \rho\vec{v}\cdot c\nabla T$$

kan flytte
skalar c

$\rightarrow \rho c\vec{v}\cdot\nabla T$

$(\vec{a}\cdot c\vec{b} = c\vec{a}\cdot\vec{b})$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c \vec{v} \cdot \nabla T = \nabla \cdot k \nabla T + q$$

Deler på ρc og antar at
k = konstant og $\chi = \frac{k}{\rho c}$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T = \chi \nabla^2 T + \frac{q}{\rho c}$$

Temperaturlikning

χ - varmediffusivitet $[\frac{m^2}{s}]$

$\chi \nabla^2 T$ = diffusjon

$\vec{v} \cdot \nabla T$ = konveksjon

Diffusjon og konveksjon
er de to måtene en
størrelse kan transporteres i

et fluid. Transport konserverer, en størrelse kan hverken skapes eller ødelegges ved transport.