Kapittel 11

Varme

Et lukket system i en viss tilstand har en indre energi E, som er funksjon av 2 tilstandsvariable

Den indre energien representerer den energien som må tilføres systemet for å nå denne tilstanden. Men indre energi er <u>ikke</u> bare molekylers bevegelse

$$E \neq \frac{\partial E}{\partial T} T = CT$$

Det er også, for eksempel, energi til faseoverganger is $\to$ vann $\to$ damp

$\uparrow$ varme $\uparrow$ varme

For små endringer i energi uten faseovergang har man

$$\Delta E = \frac{\partial E}{\partial T} \Delta T$$

$$\Delta E = c \Delta T$$

Og fra termodynamikken's første lov får vi da

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T = \chi \nabla^2 T + \frac{q}{\rho c}$$

Gjelder altså ikke ved faseovergang.

Tar man bort konveksjon og kildeledd får man

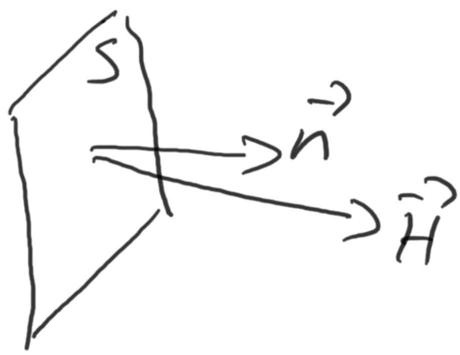
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \nabla^2 T$$

som heter varmelikninga eller "heat equation".

Lineær med mange kjente løsninger.

<u>Eksempel</u>

Finn varmefluksen gjennom en vilkårlig flate S.



$$\vec{H} = \rho E \vec{v} - k \nabla T$$

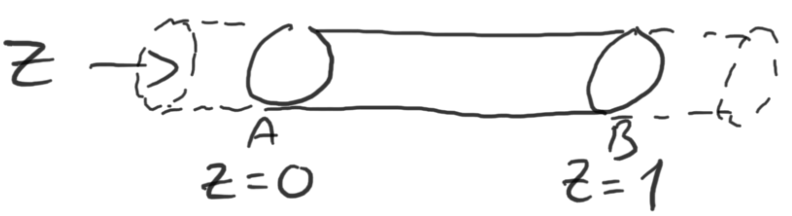
$\vec{H}$ i retning $\vec{n}$ $= \vec{H} \cdot \vec{n}$

Summert over flate

$$\int_S \vec{H}\cdot\vec{n}\, d\sigma = \int_S (\rho E \vec{v} - k\nabla T)\cdot\vec{n}\, d\sigma$$

Må kjenne $S, \rho, E, \vec{v}, k$ og T for å finne et tall!

Anta nå at vi ser på strømning i del av et rør



$\vec{v} = v_0 \mathbf{k}$

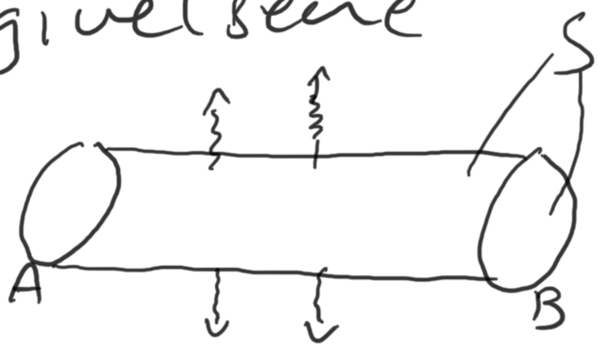
Strømmer inn ved A og ut ved B. Strømmer ikke gjennom rørveggen.

Steady-state

Ingen kilder eller faseovergang

$$\vec{v}\cdot\nabla T = \chi \nabla^2 T$$

Varmetap gjennom veggen pga lav temperatur i omgivelsene



Varmefluks gjennom rørveggen

På grunn av varmetap vil $T_B < T_A$. Vi antar lineært fall slik at

$$T(z) = T_A + (T_B - T_A) z$$

$$\nabla T = (T_B - T_A)\mathbb{k}$$

Ser nå på varmebalansen

$$\vec{v} \cdot \nabla T = \chi \nabla^2 T$$

$$\int_V \vec{v} \cdot \nabla T - \chi \nabla^2 T \, dV = 0$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{v} T - \nabla \cdot \chi \nabla T \, dV = 0$$

$$\oint_S (\vec{v}T - \chi \nabla T) \cdot \vec{n}\, d\sigma = 0$$

Hele varmelikningen er bestemt av fluksen ut av S.

Merk $\vec{v}T - \chi\nabla T = \dfrac{\vec{H}}{\rho c}$

$$\oint \vec{v}T \cdot \vec{n}\, d\sigma = \int_{S_B} v_0 \mathbb{k} T_B \cdot \mathbb{k}\, d\sigma$$

$$- \int_{S_A} v_0 \mathbb{k} T_A \cdot \mathbb{k}\, d\sigma$$

$$= v_0 S_B T_B - v_0 S_A T_A$$

$$S_A = S_B = \pi r^2$$

$$= \underline{v_0 \pi r^2 (T_B - T_A)}$$

Varmefluks pga ledning

$$\oint_S \chi \nabla T \cdot \vec{n}\, d\sigma$$

har vi gjennom alle flater

$$\oint \chi \nabla T \cdot \vec{n}\, d\sigma = \int_{S_B} \chi \nabla T \cdot \mathbb{k}\, d\sigma$$

$$- \int_{S_A} \chi \nabla T \cdot \mathbb{k}\, d\sigma$$

Veggen $\longrightarrow$ $$+ \int_{w} \chi \nabla T \cdot \mathbb{u}_r\, d\sigma$$

Ved A og B har vi

$$\nabla T = (T_B - T_A)\, \mathbb{k}$$

$$\int_{S_B} \chi (T_B - T_A)\mathbb{k} \cdot \mathbb{k}\, d\sigma = \chi (T_B - T_A)\pi r^2$$

$$-\int_{S_A} \chi (T_B - T_A)\mathbb{k} \cdot \mathbb{k}\, d\sigma = -\chi (T_B - T_A)\pi r^2$$

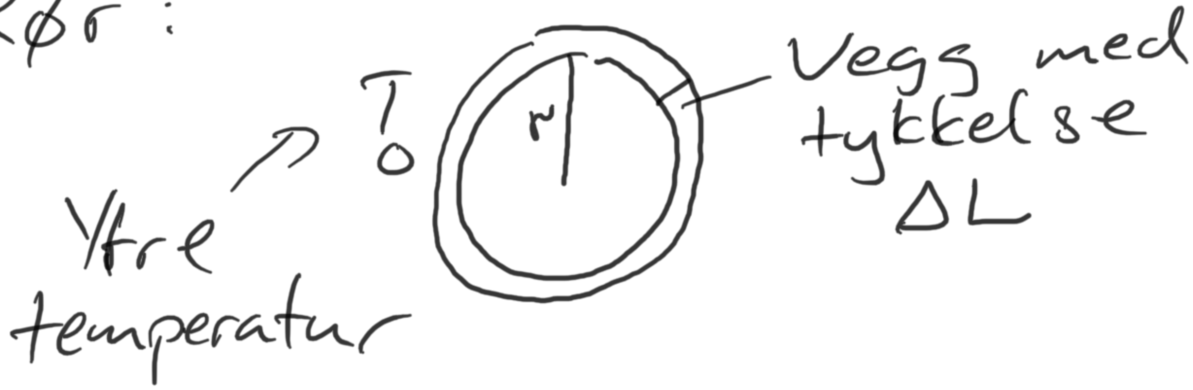
$\Rightarrow$ De to endeflatene kansellerer.

Veggen:

$$\int_w \kappa \nabla T \cdot \mathbf{u}_r \, d\sigma = ?$$

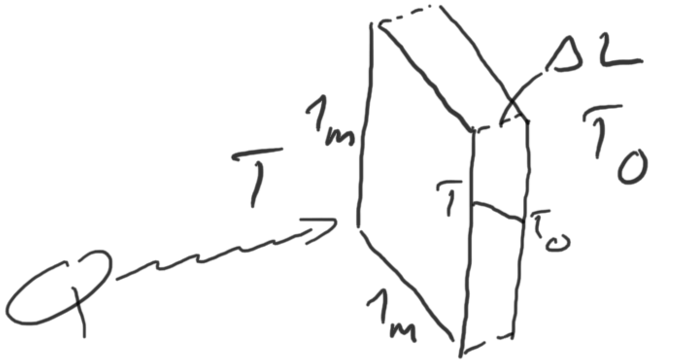
Varmetap gjennom veggen er en grensebetingelse!

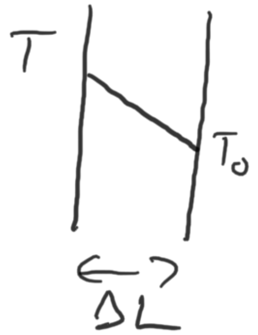
Rør:



Vi må vite hvordan veggen leder varme. Varmetap gjennom $1\ m^2$ stor flate for et materiale finnes i oppslagsverk. Generelt har man

$$\frac{\text{Varmefluks}}{A} = \frac{k\,\Delta T}{\Delta L}$$





$\Delta T = T - T_0$

$k : \frac{W}{mK}$

Luft : 0,025 (!)

Glass : 0,84

Kopper : 386

Glava : 0,035

Varmetap per flateareal:

$$\frac{k}{\Delta L}(T - T_0) \quad \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

Dette brukes for å finne varmetapet gjennom veggen

$$-\rho c \int_w \chi \nabla T \cdot u_r \, d\sigma = \int_w \frac{k}{\Delta L} \Delta T \, d\sigma$$

Merk: ρc er nødvendig for å få riktige enheter.

$$\rho c \chi \nabla T : \frac{\cancel{kg}}{m^3} \frac{J}{\cancel{kg}\cancel{K}} \frac{m^2}{s} \frac{\cancel{K}}{m} : \frac{J}{m^2 s} : \frac{W}{m^2}$$

Hvis vi vet alle betingelser,

$T_A, T_B, v_0, T_0, \rho, c, r, \Delta L$.

Kan vi finne k?

Vi går tilbake til balanselikningen vår for røret:

$$\rho c \cdot \oint (\vec{v} T - \chi \nabla T) \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0$$

$$\rho c U_0 \pi r^2 (T_B - T_A) = \rho c \oint \chi \nabla T \cdot i_r \, d\sigma$$

$$= \int_w \rho c \chi \nabla T \cdot i_r \, d\sigma$$

$$= -\int_w \frac{k}{\Delta L} \Delta T \, d\sigma$$

$$\Delta T = T - T_0 = T_A + (T_B - T_A) z - T_0$$

$$\int_w \frac{k}{\Delta L} \Delta T \, d\sigma = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{k}{\Delta L} \left(T_A + (T_B - T_A) z - T_0\right) r \, d\theta \, dz$$

$$= \int_0 \frac{2\pi r k}{\Delta L} \left(T_A + (T_B - T_A) z - T_0\right) dz$$

$$= \frac{2\pi r k}{\Delta L} \left(\frac{1}{2}(T_A + T_B) - T_0\right)$$

$$\rho c U_0 \cancel{\pi} r^{\cancel{2}} (T_B - T_A) = -\frac{2\cancel{\pi}\cancel{r}k}{\Delta L} \left(\frac{1}{2}(T_A + T_B) - T_0\right)$$

$$k = \frac{\rho c v_0 r \Delta L (T_A - T_B)}{T_A + T_B - 2T_0}$$

Varmeledningskoeffisienten kan finnes ved indirekte å måle T_A, T_B, T_0, ΔL, v_0 ...