Krumlinjete koordinater
Divergens av vektor

Vi har koordinater

$$(u_1, u_2, u_3)$$

Enhetsvektorer:

$$\vec{e}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}, \quad i \in (1,2,3)$$

Skaleringsfaktorer:

$$h_i = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}\right|, \quad i \in (1,2,3)$$

Nabla operator:

$$\nabla = \frac{\vec{e}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\vec{e}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\vec{e}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \frac{\vec{e}_i}{h_i}\frac{\partial}{\partial u_i}$$

Og vektor:

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3 = \sum_{j=1}^{3} v_j\vec{e}_j$$

Divergens av $\vec{v}$ er gitt ved

$$\nabla \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3 v_i}{h_i} \right)$$

Dette er mulig å vise ved direkte utledning fra

$$\nabla \qquad \cdot \qquad \vec{v}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\vec{e}_i}{h_i} \frac{\partial}{\partial u_i} \cdot \sum_{j=1}^{3} v_j \vec{e}_j$$

$$= \sum_i \sum_j \frac{\vec{e}_i}{h_i} \cdot \frac{\partial}{\partial u_i} (v_j \vec{e}_j)$$

Siden $\vec{e}_j$ ikke er rettlinjet kan vi ikke umiddelbart ta $\vec{e}_j$ utenfor derivasjonen, og utledningen videre blir

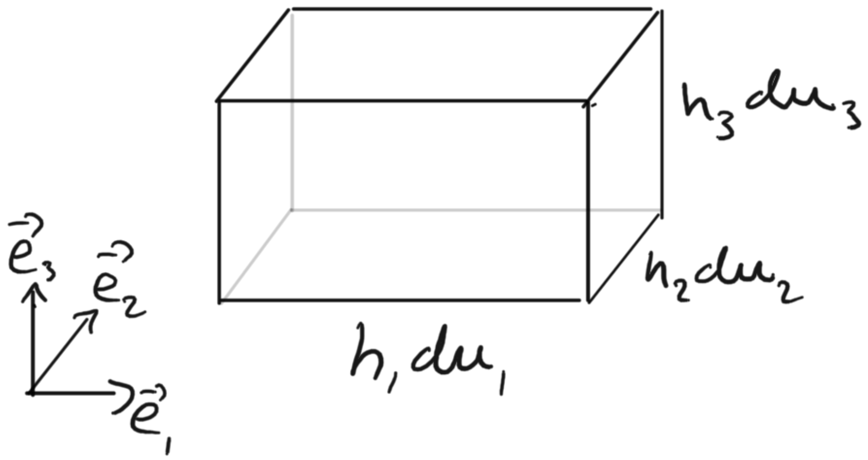
veldig komplisert.
Heldigvis finnes det en alternativ utledning fra

$$\nabla \cdot \vec{v} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

Vi vet fra før at en flate parametrisert med to parametre har

$$\vec{n} \, d\sigma = \pm \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \, du \, dv$$

Nå vil vi jo generelt ha tre nye koordinater (u_1, u_2, u_3), ikke 2. Men ser vi på en kube, vil hver side være beskrevet av kun 2 parametre.



Merk: lokalt blir dette rettlinjet selv om $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ kan skifte retning globalt

Merk: Hvis man endre u_1 fra u_1 til $u_1 + du_1$, så forflytter man seg en distanse $h_1 du_1$. Husk

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 = h_1 \vec{e}_1 du_1$$

Altså en distanse $h_1 du_1$ i retning $\vec{e}_1$.

Vi har

$$d\vec{r} = \vec{e}_1 h_1 du_1 + \vec{e}_2 h_2 du_2 + \vec{e}_3 h_3 du_3$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$$

Hver side av kuben er nå et rektangel beskrevet av 2 koordinater (den 3 er konstant).

Et flateintegral på hver enkelt sideflate er derfor

$$\int \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_j} du_i du_j$$

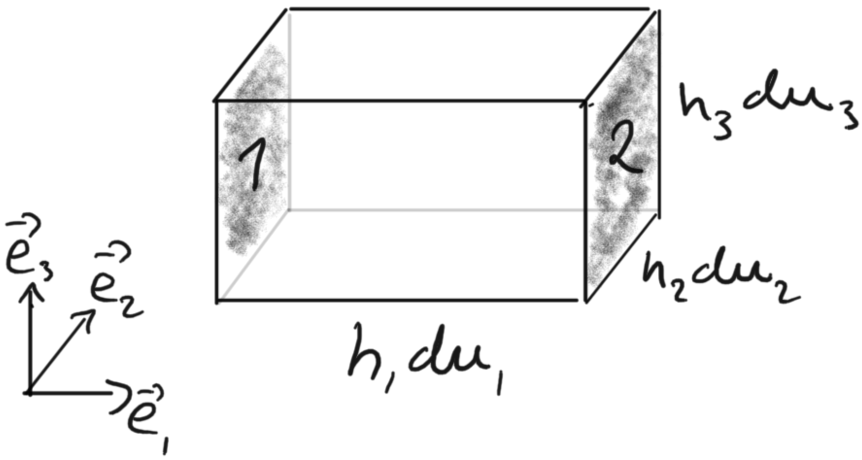
$i, j \in (1,2,3)$

Vi kan nå beregne

$$\oint \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \sum_{i=1}^{6} \int \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$$

Ta de to sideflatene som

ligger utspent av $\vec{e}_2$ og $\vec{e}_3$



$$\int_{S_2} \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \, du_2 du_3 \qquad \left(h_i \vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right)$$

$$= \int_{S_2} \vec{v} \cdot \left(h_2 \vec{e}_2 \times h_3 \vec{e}_3 \right) du_2 du_3$$

$$= \int_{S_2} \vec{v} \cdot h_2 h_3 \vec{e}_1 \, du_2 du_3$$

$$\simeq v_1 h_2 h_3 \, du_2 du_3$$

Merk: $v_1 h_2 h_3$ evaluert ved $u_1 + du_1$

Side 1:

$$\int_{S_1} \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \, du_3 \, du_2$$

Merk $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}$ først for å få normalvektor <u>ut</u> fra Vol.

$$= \int_{S_1} \vec{v}_1 \cdot h_3 \vec{e}_3 \times h_2 \vec{e}_2 \, du_3 \, du_2$$

$\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$

$$\simeq -v_1 h_2 h_3 \, du_2 \, du_3$$

Evaluert ved u_1

Summer S_1 og S_2 og del på volum $\Rightarrow$

$$\frac{\left(v_1 h_2 h_3 (u_1 + du_1) - v_1 h_2 h_3 (u_1)\right) \cancel{du_2} \cancel{du_3}}{h_1 h_2 h_3 \, du_1 \cancel{du_2} \cancel{du_3}}$$

$$\approx \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial v_1 h_2 h_3}{\partial u_1}$$

Med samme utledning i de to gjenværende retningene får man

$$\nabla \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{h_1 h_2 h_3 v_i}{h_i}\right)$$

Noen kommentarer

Flateelement

Vi brukte

$$\vec{n}\, d\sigma = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_j} du_i du_j$$

$$= h_i \vec{e}_i \times h_j \vec{e}_j \, du_i \, du_j$$

$$= h_i h_j \vec{e}_k \, du_i \, du_j$$

(Ingen summasjon)

Kuben har derfor 3 forskjellige flateelementer.

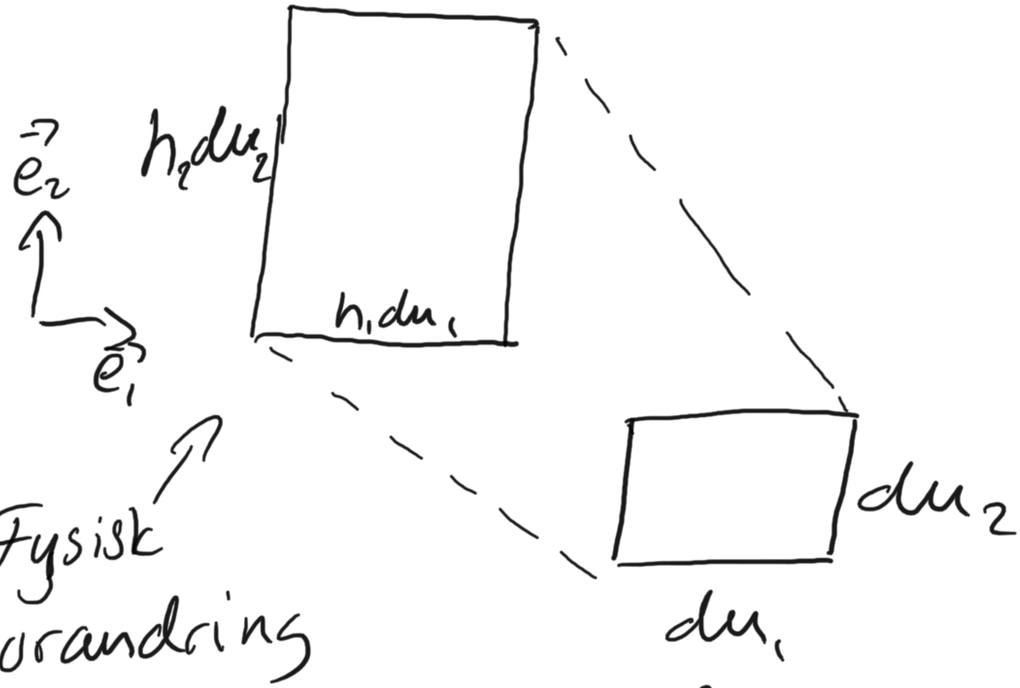
Volumelement

$$dV = h_1 h_2 h_3 \, du_1 \, du_2 \, du_3$$

Igjen: Dette gjelder forflytninger på du_1, du_2 og du_3 i nye koordinater,

som gir endret posisjon ($\vec{r}$)

$h_1 du_1$, $h_2 du_2$ og $h_3 du_3$.



Fysisk forandring

$$h_i \vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}$$

Forandring i beregningskoordinater.