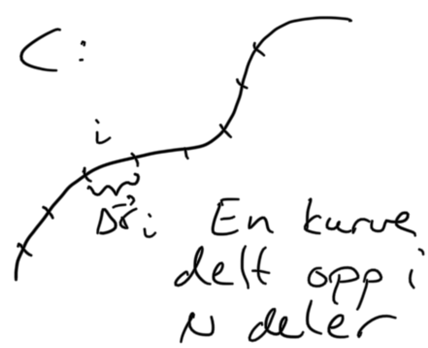
- Kurveintegraler
- Konservative felt

M 2.2, 3.2.1

Vi har sett at

$$\int_C |d\vec{r}| = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} |\Delta\vec{r}_i|$$



gir buelengden, og

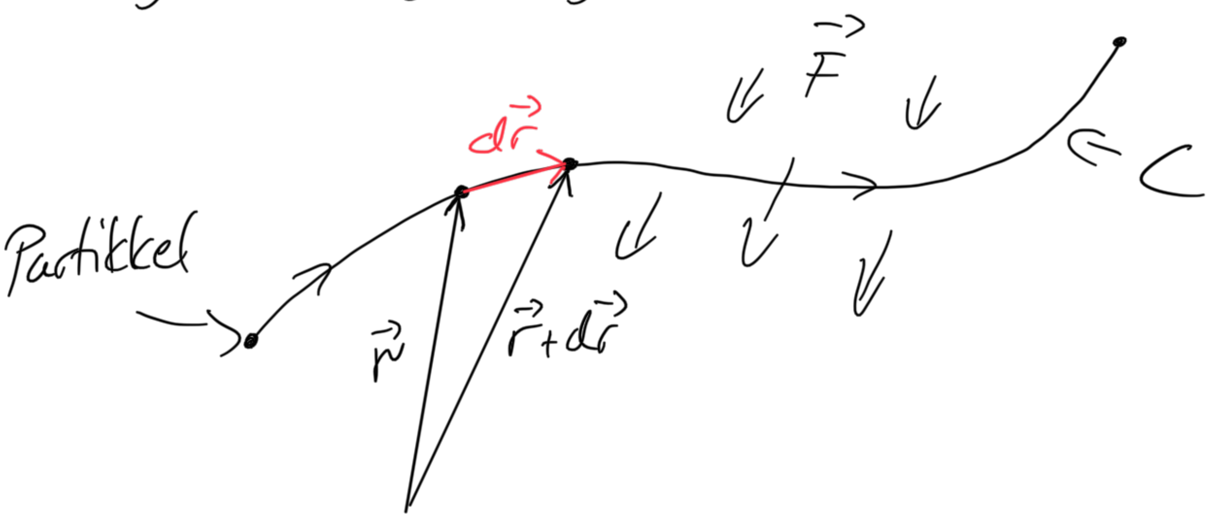
$$\int \rho(\vec{r})\,|d\vec{r}| = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \rho(\vec{r}_i)\,|\Delta\vec{r}_i|$$

gir massen av et tau med tetthet $\rho(\vec{r})$. Massen er summen av massen til alle elementene. Buelengden er summen av lengden til alle elementene.

Et annet integral er

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

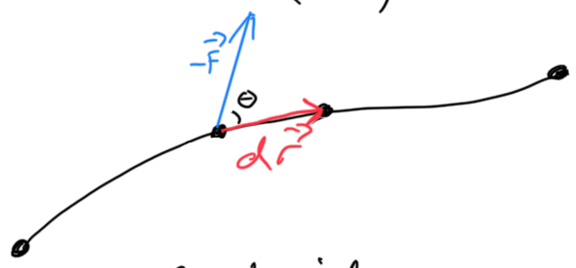
der $\vec{F}(\vec{r})$ er et vektorfelt. Dette integralet er forbundet med <u>arbeid</u>. Tenk på en partikkel som beveger seg langs en kurve C. Det er et kraftfelt $\vec{F}(\vec{r})$ som virker på partikkelen. F.eks kan $\vec{F}(\vec{r})$ være tyngdefeltet. En annen mulig kraft er friksjon.



Kraften $\vec{F}(\vec{r})$ er en vektor.

Arbeid = Kraft · vei

$$= -\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = |\vec{F}||d\vec{r}|\cos\theta$$

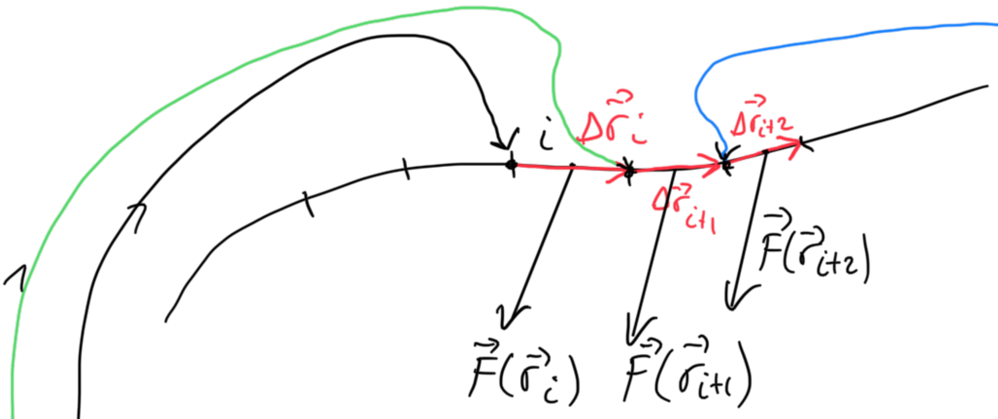


= Arbeid som kreves for å flytte partikkelen fra $\vec{r}$ til $\vec{r}+d\vec{r}$

<u>Minus</u> siden arbeidet går <u>mot</u> kraftfeltet. Vi løfter <u>mot</u> tyngdefeltet, ikke med.

Totalt arbeid blir

$$\sum_{i=1}^{N} -\vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i$$



$-\vec F(\vec r_i)\cdot\Delta\vec r_i$ for å flytte part fra her til hit, så $-\vec F(\vec r_{i+1})\cdot\Delta\vec r_{i+1}$ for å flytte hit osv.

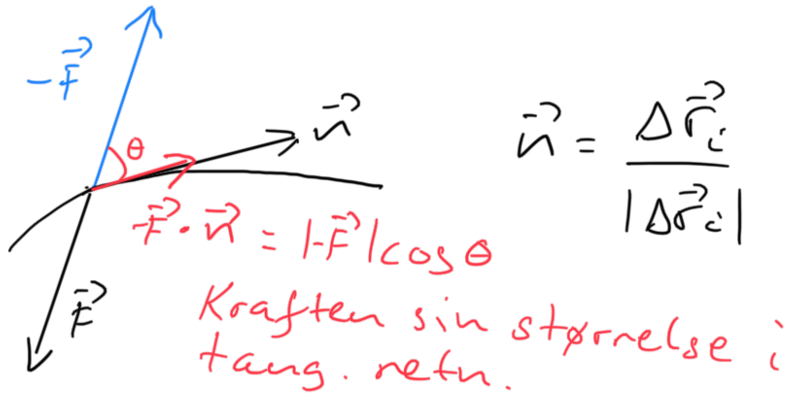
Dette blir et integral når $N\to\infty$

$$\int_C -\vec F(\vec r)\cdot d\vec r = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} -\vec F(\vec r_i)\cdot\Delta\vec r_i$$

Alternativ tolkning

$$f(\vec r_i) = -\vec F(\vec r_i)\cdot \underbrace{\frac{\Delta\vec r_i}{|\Delta\vec r_i|}}_{\text{enhetsvektor}}$$

er kraften sin <u>størrelse</u> i tangensiell retning langs kurven.



Dette er en arbeidstetthet, dvs. arbeid/vei, siden vi deler med lengden på et element $|\Delta \vec{r}_i|$.

Vi kan nå bruke integralene fra forrige uke til å finne totalt arbeid langs C.

Husk

$$\int_C \rho(\vec{r})\,|d\vec{r}| = \text{total masse,}$$

når $\rho(\vec{r})$ er tetthet, eller masse/vei.

Nå har vi arbeid/vei $= f(\vec{r})$

$\Rightarrow$ Totalt arbeid =

$$\int_C f(\vec{r})\,|d\vec{r}| = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(\vec{r}_i)\,|\Delta\vec{r}_i|$$

Kan sette inn for $f(\vec{r})$ for å sjekke at dette er samme totale arbeid som før:

$$= \int_C -\vec{F}(\vec{r})\cdot \frac{d\vec{r}}{\cancel{|d\vec{r}|}}\,\cancel{|d\vec{r}|} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} -\vec{F}(\vec{r}_i)\cdot \frac{\Delta\vec{r}_i}{\cancel{|\Delta\vec{r}_i|}}\,\cancel{|\Delta\vec{r}_i|}$$

$$= \int_C -\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} -\vec{F}(\vec{r}_i)\cdot \Delta\vec{r}_i$$

Samme som før, men fra litt annen vinkel.

Husk: Integral er sum over små elementer!

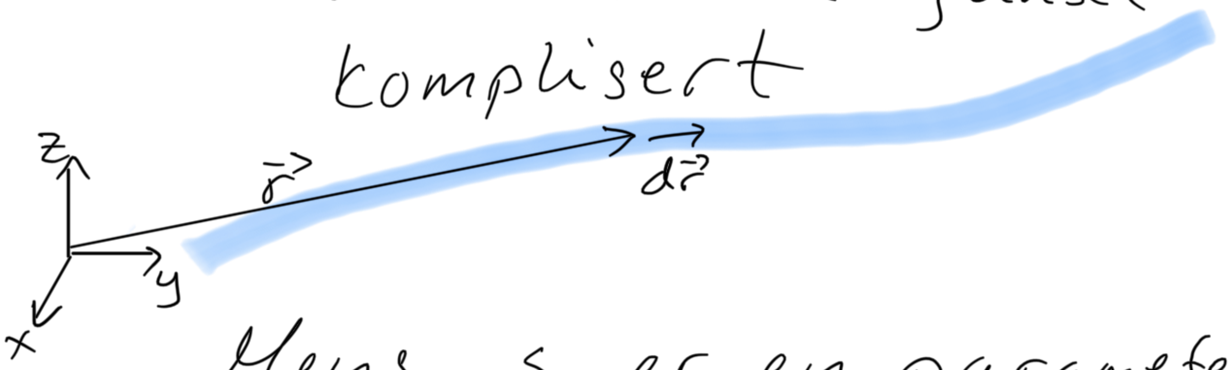
Husk:

$$\int_C |d\vec{r}| = \int_S \left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| ds$$

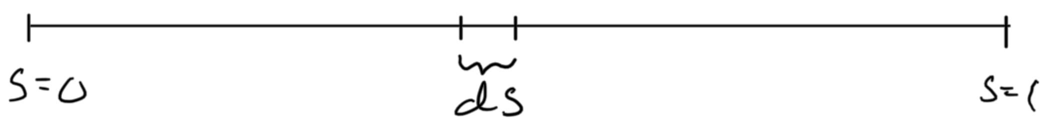
Har på samme måte

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_S \underbrace{\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{ds}}_{\text{skalar (tetthet)}} ds$$

Husk: $\vec{r}$ er fysisk posisjon som kan være ganske komplisert



Mens s er en parameter i et rettlinjet og enkelt parameterrom



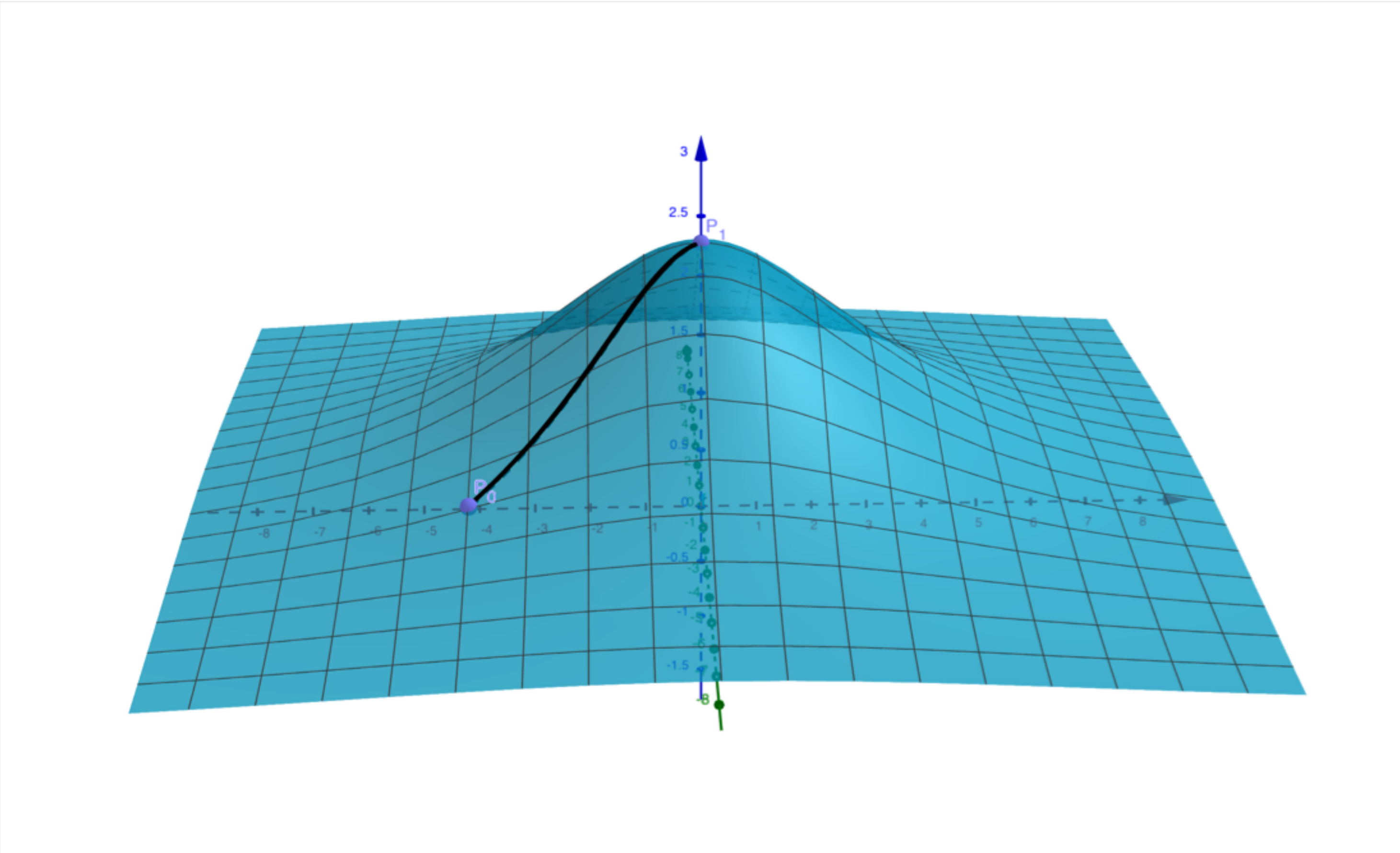
Når det står

$$\frac{d\vec{r}}{ds}$$

så leses det som endring i posisjon ved en infinitesimal endring i parameteren s.

$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right|$ er lengden på denne endringen.

<u>Eksempel</u> Topptur



Vi står ved foten av fjellet i punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$
Fjellet er beskrevet ved

$$z = f(x,y) = \frac{h_0}{1 + \frac{x^2+y^2}{R^2}}$$

Finn raskeste vei til toppen.
Hvor langt er det?
Hvilket arbeid kreves for å nå toppen?

Toppen er ved $P_1 = (0, 0, h_0)$

Raskeste vei er rett luftlinje.
Parametriserer med $t \in [0,1]$
Dvs ved $t=0$ er vi i bunn (P_0)
og ved $t=1$ er vi på toppen (P_1)
Posisjonen vår

$$\vec{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

$$= x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + f(x,y)\,\mathbf{k}$$

Rett linje:

$$x(t) = x_0 + t(\underset{x_1=0}{x_1} - x_0) = x_0(1-t)$$

$$y(t) = y_0 + t(\underset{y_1=0}{y_1} - y_0) = y_0(1-t)$$

$x(0) = x_0$ og $x(1) = 0$ ok

$y(0) = y_0$ og $y(1) = 0$ ok

C:

$$\vec{r}(t) = x_0(1-t)\,\mathbf{i} + y_0(1-t)\,\mathbf{j} + f(x_0(1-t), y_0(1-t))\,\mathbf{k}$$

Distanse til toppen = buelengde

$$\int_C |d\vec{r}| = \int_{t=0}^{1} \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt$$

Må regne litt

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -x_0\,\mathbf{i} - y_0\,\mathbf{j} + \frac{df}{dt}\,\mathbf{k}$$

$$f = \frac{h_0}{1+\frac{x^2+y^2}{R^2}} = \frac{h_0}{1+a} \quad , \quad a = \frac{x^2+y^2}{R^2}$$

$a(x,y)$

$\rightarrow$ partielle deriverte

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{da}\frac{da}{dt}$$

$$= -\frac{h_0}{(1+a)^2}\left(\frac{\partial a}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= -\frac{h_0}{(1+a)^2}\left(\frac{2x}{R^2}\cdot(-x_0) + \frac{2y}{R^2}(-y_0)\right)$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{2h_0}{R^2(1+a)^2}\left(xx_0 + yy_0\right)$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(-x_0\mathbf{i} - y_0\mathbf{j} + \frac{df}{dt}\mathbf{k}\right)\cdot\left(-x_0\mathbf{i} - y_0\mathbf{j} + \frac{df}{dt}\mathbf{k}\right)} \,,$$

$$= \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + \left(\frac{df}{dt}\right)^2}$$

$$\text{Distanse} = \int_{t=0}^{1} \sqrt{x_0^2+y_0^2+\left(\frac{df}{dt}\right)^2}\, dt$$

$\Rightarrow$ Langtekkelig! Geogebra eller liknende gir svar $\underline{\underline{5.82}}$ km!

Hva med arbeid?

Vi jobber mot tyngdefeltet, som har kraft

$$-9{,}81\,\frac{m}{s^2}\downarrow \qquad \uparrow z$$

$$\vec{F} = -9{,}81\,\mathbb{k} \quad \left[\frac{N}{kg}\right] \qquad N = \frac{kg\,m}{s^2}$$

$$\text{Arbeid}/kg = \int_C -\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= -\int_t \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\,dt$$

$$\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = -9{,}81\cdot\frac{df}{dt} \qquad \left(\frac{d\vec{r}}{dt} = -x_0\mathbb{i} - y_0\mathbb{j} + \frac{df}{dt}\mathbb{k}\right)$$

$$\underline{\text{Arbeid} = 9{,}81\int_0^1 \frac{df}{dt}\,dt} = 14{,}79\cdot 10^3\ J$$

Husk dimensjon! $[f] = [h_0]$

I geogebra bruker jeg $h_0 = 2{,}28$, som er i km.

Finn en barnevennlig rute!

Prøver $\quad x(t) = a_x(1-t)\cos\left(\frac{9\pi}{4}(1-t)\right)$

$$y(t) = a_y(1-t)\sin\left(\frac{9\pi}{4}(1-t)\right)$$

$$a_x = x_0\sqrt{2}\,, \quad a_y = y_0\sqrt{2}$$

$$\text{Distanse} = \int_{t=0}^{1} \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt = \underline{21{,}1} \text{ km}$$

se geogebra

$$\text{Arbeid} = \int_{t=0}^{1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \underline{14{,}79}\cdot 10^3 \text{ J}$$

Arbeid er uavhengig av rute!

$\Rightarrow$ Tyngdefeltet er konservativt

To relevante spørsmål om kurve-integral

1) Gir forskjellige parametriseringer av samme vei samme svar?

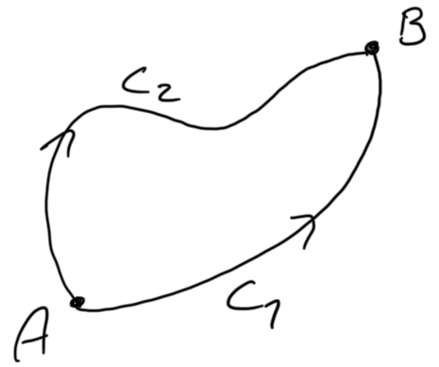
Eks. Parametriserer x-aksen $x \in [0,1]$

To mulige løsninger er

$$\vec{r}(t) = t\,\vec{i} \quad , \quad t \in [0,1]$$
$$\vec{r}(t) = t^2\,\vec{i} \quad , \quad t \in [0,1]$$

Samme vei, forskjellig parametrisering!

2) Gir forskjellige veier mellom samme start og sluttpunkt samme svar?



$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad ?$$

Vi skal se at disse to spørsmålene er knyttet til om $\vec{F}$ er et <u>konservativt</u> vektorfelt.

<u>Eksempel</u>

$$\vec{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Finn $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ når

1) C_1: $x(t) = t$, $y(t) = t$, $z(t) = 2t^2$ $\qquad$ C_2: $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, $z(t) = 2t$

$$t \in [0,1]$$

To forskjellige veier mellom

$$\underset{A}{(0,0,0)} \to \underset{B}{(1,1,2)}$$

C_1:

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t=0}^{1} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\,dt$$

$$= \int_{t=0}^{1} (t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4t\mathbf{k})\, dt$$

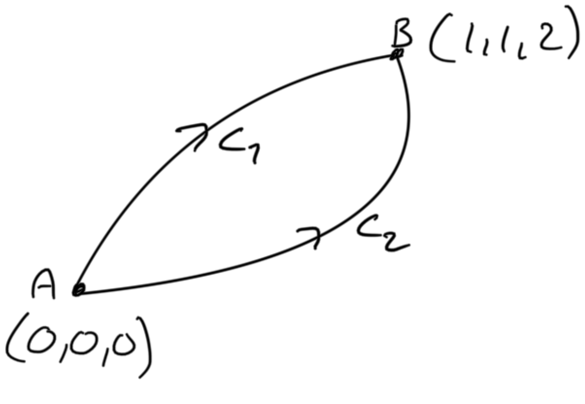
$$= \int_{t=0}^{1} 2t + 8t^3 \, dt = t^2 + 2t^4 \Big|_0^1 = \underline{3}$$

C_2: $$\int_0^1 (t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2\mathbf{k})\, dt$$

$$= \int_0^1 t^2 + 2t^2 + 4t \, dt = t^3 + 2t^2 \Big|_0^1 = \underline{3}$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Uavhengig av vei -> Konservativt vektorfelt



La oss nå integrere først langs C_1 fra A til B, og så tilbake igjen langs C_2 fra B til A.

La $C = C_1 - C_2 = C_1 + (-C_2)$

C er en lukket kurve

Sirkulasjonen av $\vec{F}$ er definert som

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

der C er en <u>lukket</u> kurve.

Finn <u>sirkulasjonen</u> av

$$\vec{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Vi har

siden reversert, fra B -> A.

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= 3 - 3$$

$$= \underline{0}$$

Sirkulasjonen $= 0 \Rightarrow \vec{F}$ er konservativt

Vi har en del sammenfallende definisjoner

i) M s. 28 : $\vec{F}$ er konservativ dersom sirkulasjonen $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ for vilkårlig lukket kurve C.

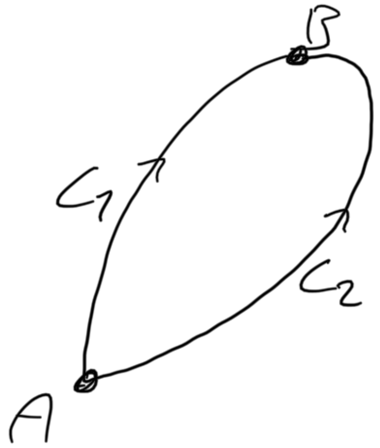
ii) GF s 100 : $\vec{F}$ er konservativ dersom kurveintegralet mellom 2 punkter er uavhengig av vei.

iii) LH s 202 : $\vec{F}$ er konservativ dersom den kan skrives som gradienten til et skalarfelt $\vec{F} = \nabla \phi$

ϕ er da et skalarpotensial

Utsagn i), ii) og iii) er ekvivalente!

Vi har sett at hvis vi har ii), så følger også i)



Hvis $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Har vi selvsagt også

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

der $C = C_1 + (-C_2)$

Hva med utsagn iii)?

Hvis $\vec{F}$ kan skrives som

$$\vec{F} = \nabla\phi$$

så kalles ϕ <u>potensialet</u> til $\vec{F}$

skalar

Det følger at

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \nabla\phi \cdot d\vec{r}$$

Husk: $d\phi = \nabla\phi \cdot d\vec{r}$

gradient

Integrasjon ved subst

$$\Rightarrow \int_{C_1} \nabla\phi \cdot d\vec{r} = \int_{\phi=A}^{\phi=B} d\phi = \phi\Big|_A^B$$

$$= \underline{\phi(B) - \phi(A)}$$

svaret er kun avhengig

av start og slutt, og derfor uavhengig av vei.

$\Rightarrow$ iii) impliserer ii), som igjen impliserer i)!