13. april 2022

MEK1100

Obligatorisk oppgave 2 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 12. mai 2022, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Merk at man har **ett forsøk** på å få oppgaven godkjent. Dette betyr at det ikke lenger gis andregangsforsøk.

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) senest samme dag som innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Hver deloppgave gir maksimalt 10 poeng. I alt kan du oppnå 70 poeng. Vi krever minimum 70 % eller 49 poeng for å få obligen godkjent.

I denne oppgaven skal vi anvende det vi har lært i emnet for å analysere et datasett målt i Hydrodynamisk laboratorium ved Matematisk institutt.

Eksperimentet ble gjort i et rør. Røret har sirkulært tverrsnitt med radius 5 cm. Målingene ble gjort med "Particle Imaging Velocimetry" (PIV). Dette er en teknikk som gjør oss i stand til å måle hastighetsfeltet. Vi måler kun hastighetskomponentene u i x-retning og v i y-retning. Det fulle hastighetsfeltet er $\boldsymbol{v} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + w\boldsymbol{k}$. Vi måler altså ikke hastighetskomponenten w i z-retning.

a)

Last ned fila data.mat og les den inn Matlab/Octave/Python. (Hvordan dette kan gjøres er forklart i Appendiks A).

Fila inneholder fire matriser X, Y, U, V og to vektorer XIT, YIT. Matrisene X og Y inneholder x- og y-koordinatene i xy-planet. Matrisene U og V inneholder u- og v-komponentene til hastighetsfeltet. Vektorene XIT og YIT inneholder posisjonen til skilleflaten mellom gass og væske i xy-planet.

- ○ Sjekk at hver matrise har 194 punkter i x-retning og 201 punkter i y-retning, tilsammen 38994 punkter i xy-planet.
- ○ Sjekk at de to vektorene har 194 punkter i x-retning. (Hvordan man sjekker dette er forklart i Appendiks B).
- ○ Sjekk at griddet i xy-planet er regulært med intervall 0.5 mm i begge retninger.
- ○ Sjekk at y-koordinatene spenner ut hele diameteren til røret.

b)

Vi skal nå se på strukturen i både gassfasen og væskefasen. Siden lufta har mye større fart enn vannet er det vanskelig å se strukturen i bare ett plott.

- ○ Lag to konturplott for å illustrere farten $\sqrt{u^2 + v^2}$ for hastighetskomponentene i xy-planet og vis fargeskala.
- ○ Tegn inn posisjonen til skilleflaten i plottet, dette kan gjøres ved å bruke en serie med * i en farge som skiller seg ut fra konturplottet.

c)

○ Lag et vektor pilplott med hastigheten i xy-planet u**i** + v**j**. Vi ønsker at plottet skal gi nyttig informasjon, og ettersom det opplagt ikke er fornuftig å plotte 38994 piler i samme plott vil det lønne seg å velge kun et utvalg av disse.

I denne oppgaven skal vi betrakte tre mindre områder i hastighetsfeltet. Vi lager derfor tre rektangler definert ved indeksene til hjørnene (ix, iy)[1,2]:
Rektangel 1 (35, 160) og (70, 170)
Rektangel 2 (35, 85) og (70, 100)
Rektangel 3 (35, 50) og (70, 60)

○ Marker rektanglene med linjer i figuren. Bruk forskjellige farger for hver side i rektanglene: rødt nede (side 1), grønt på høyre side (side 2), blått oppe (side 3) og svart på venstre side (side 4).

○ Sørg for å tegne inn posisjonen til skilleflaten i samme plott (se punkt b). Pass på at to av rektanglene skal ligge i gassfasen og ett av rektanglene ligge i væskefasen.

d)

○ Regn ut divergensen til $u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j}$ og forklar hvorfor dette ikke er lik divergensen til $\boldsymbol{v}$.

○ Lag konturplott av divergensen slik at strukturen kommer tydelig fram i både gass- og væskefasen.

○ Tegn inn skilleflaten (se punkt b) og rektanglene (se punkt c) i samme plott.

○ Vi kan med god nøyaktighet anta at både gassen og væska er inkompressible fordi strømingen er betydelig langsommere enn lydhastigheten i luft og i vann. Forklar hvilken konsekvens dette har for divergensen til $\boldsymbol{v}$ og hva vi i så fall kan si om hastighetskomponenten w som vi ikke har målt.

e)

○ Regn ut den komponenten av virvlinga til $\boldsymbol{v}$ som står normalt på xy-planet.

○ Lag konturplott av denne virvlingskomponenten.

[1] Her er indeksene skrevet som en vanlig matematisk tekst, med x før y. Hvordan dette skrives på datamaskin er forklart i Appendiks B

[2] Disse indeksverdiene gjelder for Matlab/Octave, for Python må de reduseres med én.

○ Tegn inn skilleflaten (se punkt b) og rektanglene (se punkt c) i samme plott.

○ Plot strømlinjer for både gass- og væskefasen og tegn inn skilleflaten (se punkt b) i samme plott. Beskriv strømningen for både gassfasen og væskefasen. Legg spesielt merke til strømningen ved veggen.

f)

Nå skal vi anvende Stokes eller Greens sats på rektanglene.

○ Regn ut sirkulasjonen direkte som kurveintegral rundt rektanglene.

○ Regn ut sirkulasjonen indirekte som flateintegral over rektanglene.

○ Diskuter om du får samme resultat med kurve- og flateintegral. Husk at hastighetsfeltet er en måling som kan inneholde feil og at du har begrenset oppløsning i griddet.

○ Diskuter forskjellen mellom de tre rektanglene. For å få en bedre forståelse av sirkulasjonen angir du verdien til kurveintegralene langs hver side av rektanglene. Passer disse resultatene med hva du hadde forventet når du ser på hastighetsfeltet i området?

g)

Nå skal vi anvende Gauss sats på rektanglene. I utgangspunktet skulle man tro det var problematisk å bruke Gauss sats når vi ikke kjenner hastighetskomponenten w. Vi kan imidlertid med god tilnærming anta at strømningen i dette eksperimentet er inkompressibel fordi hastighetene vi måler er betydelig mindre enn lydhastigheten. Følgelig kan vi forutsette at $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ for det fulle hastighetsfeltet $\boldsymbol{v} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + w\boldsymbol{k}$.

○ Regn ut den integrerte fluksen av hastighetsvektoren $u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j}$ ut av sidene av rektanglene orientert langs xy-planet. Gjør dette direkte som kurveintegral rundt rektanglene.

○ Diskuter hvilken implikasjon disse svarene har for den integrerte fluksen over rektanglene orientert i z-retning.

○ For å få en bedre forståelse av fluksen skal du angi verdien til kurveintegralene langs hver side av rektanglene. Passer disse resultatene med hva du hadde forventet når du ser på hastighetsfeltet i området?

A: Hvordan lese MAT-filer i Matlab, Octave og Python

Dataene leses inn i Matlab/Octave med kommandoen `load('data.mat')`. Våre variabler er da tilgjenglige som `x, y, u, v, xit, yit`.

Den enkleste måten å lese inn dataene i Python er:

```
import scipy.io as sio
# Dette virker med versjon 7 MAT-filer
data = sio.loadmat('data.mat')
x = data.get('x')
y = data.get('y')
u = data.get('u')
v = data.get('v')
xit = data.get('xit')
yit = data.get('yit')
```

Det finnes også andre måter å lese inn dataene i Python, men da gjelder ikke nødvendigvis følgende kommentarer om indeksering.

B: Indeksering av matriser

La oss betrakte den vertikale hastighetskomponenten som er avhengig av horisontal posisjon x og vertikal posisjon y. I vanlig matematisk tekst hadde vi skrevet $v(x, y)$ for å angi verdien til v for en gitt posisjon (x, y).

Vi ønsker å implementere dette på datamaskinen slik at `v` er en matrise som inneholder diskrete verdier til v i et rutenett med `nx` punkter i x-retning og `ny` punkter i y-retning. La `ix` være en indeks som løper over de `nx` punktene i x-retning, og la `iy` være en indeks som løper over de `ny` punktene i y-retning.

For å finne ut hvor stor matrisen `v` er kan vi bruke Matlab/Octave-kommandoen `size` eller Python-kommandoen `shape`. Det viser seg i så fall at Matlab/Octave, og Python med `scipy.io`-måten, vil gi `ny`-verdien først, og deretter `nx`-verdien.

For å indeksere matrisen `v` skriver vi i Matlab/Octave `v(iy,ix)`, og i Python med `scipy.io`-måten `v[iy,ix]`.

C: Noen funksjoner for Python (P) og MATLAB (M):

`contourf (P)`, contourf (M) — tegner konturlinjene og fyller ut med farger mellom konturlinjene

`colorbar (P)`, colorbar (M) - viser hvilke verdier som svarer til hver farge

`quiver (P)`, quiver (M) - lager vektor pilplot

`streamplot (P)`, streamline (M) - kan brukes for å tegne strømlinjer til et vektorfelt