UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK1100 — Feltteori og vektoranalyse
Eksamensdag:	Onsdag 29. mai 2024
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 6 sider.	
Vedlegg:	Formelark, 2 sider
Tillatte hjelpemidler:	K. Rottmann: Matematische Formelsamlung. Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Løsningsforslag/fasit i blått. Retting av trykkfeil i rødt.

Det er 10 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum fra 0 til 10 (10 for fullstendig svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100. Kontroller at du ikke overser noen av spørsmålene.

Oppgave 1

Vi betrakter vektorfeltet $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}$ i kartesiske koordinater. Her er $\boldsymbol{i}$ og $\boldsymbol{j}$ enhets koordinatvektorer i henholdsvis x og y retning.

a

Regn ut divergensen og virvlinga til $\boldsymbol{v}$.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial(-y)}{\partial y} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial(-y)}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right) = \boldsymbol{0}$$

b

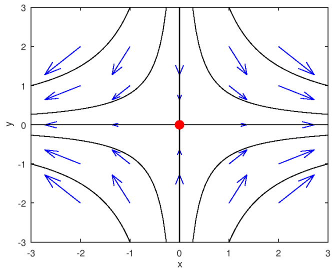
Finn strømlinjene til $\boldsymbol{v}$. Tegn et vektor-pileplott hvor strømlinjer og stagnasjonspunkter er tegnet inn.

Det eksisterer en strømfunksjon fordi feltet er divergensfritt og 2D. Vi løser

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = x \qquad og \qquad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} = -y$$

og finner $\psi = -xy + c$. Strømlinjene er gitt ved xy =konstant som er hyperbler med x- og y-aksene som asymptoter.

(Fortsettes på side 2.)



I figuren: stagnasjonspunkt i rødt (origo), strømlinjer i svart, piler i blått.

c

Regn ut sirkulasjonen rundt den lukkede kurven $x^2 + y^2 = 3$.

Kurven kan parametriseres ved $\boldsymbol{r}(\theta) = \sqrt{3}(\boldsymbol{i}\cos\theta + \boldsymbol{j}\sin\theta)$ *for* $0 \le \theta < 2\pi$. *Differensialet er* $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sqrt{3}(-\boldsymbol{i}\sin\theta + \boldsymbol{j}\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

Ved direkte utregning

$$\oint \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} \sqrt{3}(\boldsymbol{i}\cos\theta - \boldsymbol{j}\sin\theta)\cdot\sqrt{3}(-\boldsymbol{i}\sin\theta + \boldsymbol{j}\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0$$

eller ved Stokes sats

$$\oint \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int \nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}\,\mathrm{d}\sigma = 0$$

d

Regn ut den integrerte fluksen igjennom den lukkede kurven $x^2 + y^2 = 3$.

Kurven kan parametriseres ved $\boldsymbol{r}(\theta) = \sqrt{3}(\boldsymbol{i}\cos\theta + \boldsymbol{j}\sin\theta)$ *for* $0 \le \theta < 2\pi$. *Kurveelementet er* $\mathrm{d}\sigma = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \sqrt{3}\,\mathrm{d}\theta$ *og normalvektor er* $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}\cos\theta + \boldsymbol{j}\sin\theta$.

Ved direkte utregning

$$\oint \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi} \sqrt{3}(\boldsymbol{i}\cos\theta - \boldsymbol{j}\sin\theta)\cdot(\boldsymbol{i}\cos\theta + \boldsymbol{j}\sin\theta)\,\sqrt{3}\mathrm{d}\theta = 0$$

eller ved Gauss sats

$$\oint \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \int \nabla\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\tau = 0$$

hvor $\mathrm{d}\tau$ *er et flateelement innenfor kurven.*

For å forstå at det er greit å bruke Gauss sats i planet, for en sirkel som avgrenser en sirkelskive: Tenk deg at du strekker en sylinder opp i z-retning fra sirkelen i planet. Det er ikke strømning i z-retning, og ingen bidrag i z-retning gjør seg gjeldende. Dette går bra!

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 2

En sylinderformet kopp med diameter D fylles først med vann opp til en høyde h. Deretter rører vi rundt i koppen slik at hastighetsfeltet er gitt ved

$$\boldsymbol{v} = \alpha R^2 \boldsymbol{i}_\theta$$

hvor α er en konstant. Vi antar at vannet har konstant tetthet ρ og at strømningen er friksjonsfri.

I denne oppgaven bruker vi sylinderkoordinater $\{R, \theta, z\}$ med z-aksen orientert oppover midt i koppen, med R som radiell avstand fra z-aksen, og med θ som asimutal-vinkelen. Vi bruker $\boldsymbol{i}_R$, $\boldsymbol{i}_\theta$ og $\boldsymbol{k}$ for å angi enhets koordinatvektorer i henholdsvis R, θ og z retning.

a

Bestem de fysiske enhetene til konstanten α.

$$[\boldsymbol{v}] = \mathrm{m/s}, \qquad [R] = \mathrm{m} \qquad \textit{og} \qquad [\boldsymbol{i}_\theta] = 1, \qquad \textit{så} \qquad [\alpha] = \frac{1}{\mathrm{ms}}$$

b

Regn ut divergensen og virvlinga til $\boldsymbol{v}$.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\alpha R^2\right) = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \frac{1}{R}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_R & R\boldsymbol{i}_\theta & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & R(\alpha R^2) & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{R}\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial R}\left(\alpha R^3\right) = 3\alpha R\boldsymbol{k}$$

c

Diskuter om $\boldsymbol{v}$ kan skrives som gradienten til et skalarpotensial ϕ og finn i så fall skalarpotensialet.

Diskuter om $\boldsymbol{v}$ kan skrives ved hjelp av en strømfunksjon ψ og finn i så fall strømfunksjonen.

Feltet har virvling, derfor eksisterer det ikke et skalarpotensial.

Feltet er divergensfritt og 2D (i R og θ) og derfor eksisterer det en strømfunksjon som vi løser ved

$$v_R = -\frac{1}{R}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \qquad \textit{og} \qquad v_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial R} = \alpha R^2$$

og finner $\psi = \frac{1}{3}\alpha R^3 + c$.

Strømlinjene er gitt ved $R =$konstant som er sirkler rundt z-aksen.

(Fortsettes på side 4.)

d

Regn ut akselerasjonen til en fluidpartikkel som følger en strømlinje.

Ettersom feltet er stasjonært så er partikkelbanene lik strømlinjene. Dette kan man ta for gitt,

men det er ikke vanskelig å vise det slik:
Strømlinjene ved tidspunkt t_0 er løsning av $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t_0) \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$.
Partikkelbanene er løsning av $\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)\mathrm{d}t$.

For å sjekke om banene ved vilkårlig tid t er lik strømlinjene ved tid t_0 kan vi krysse med hastighetsfeltet ved tid t_0: $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t_0) \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t_0) \times \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$ og vi innser at dette er lik null dersom feltet er stasjonært $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = 0$.

Følgelig vet vi at det er partikkel-akselerasjonen vi skal regne ut

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = (\alpha R^2 \boldsymbol{i}_\theta)\cdot\nabla(\alpha R^2 \boldsymbol{i}_\theta) = (\alpha R^2)\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\theta}(\alpha R^2 \boldsymbol{i}_\theta) = \alpha R(\alpha R^2)(-\boldsymbol{i}_R) = -\alpha^2 R^3 \boldsymbol{i}_R$$

e

Over vannet er det luft med konstant trykk p_0. Bevegelsen til vannet vil medføre at vannoverflaten ikke er horisontal, men derimot er en krum flate gitt ved $z = \eta(R, \theta)$. Bestem $\eta(R, \theta)$.

Kunne vi ha brukt Bernoullis likning? Hastighetsfeltet har virvling, derfor fungerer Bernoullis likning kun langs strømlinjer, men strømlinjene er kun sirkler rundt z-aksen. Derfor vil ikke Bernoullis likning kunne si noe om hvordan ting endrer seg som funksjon av radius R. Så nei, Bernoullis likning hjelper oss ikke her!

Vi bruker heller Eulers likning

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g}$$

hvor $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{k}$ er tyngdens akselerasjon og $\nabla p = \boldsymbol{i}_R \frac{\partial p}{\partial R} + \frac{\boldsymbol{i}_\theta}{R}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \boldsymbol{k}\frac{\partial p}{\partial z}$.

Vi bruker partikkelakselerasjonen vi allerede har funnet, og splitter opp likninga i sine tre komponenter

$$\frac{\partial p}{\partial R} = \rho\alpha^2 R^3$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

og vi finner

$$p(R, \theta, z) = \frac{\rho\alpha^2}{4}R^4 - \rho g z + c$$

hvor c er en konstant.

Ved overflaten $z = \eta(R, \theta)$ er trykket lik lufttrykket $p = p_0$, om vi setter dette inn kan vi løse

$$\eta(R, \theta) = \frac{\alpha^2}{4g}R^4 + \frac{c - p_0}{\rho g}$$

(Fortsettes på side 5.)

Vi kan bestemme konstanten c ved å insistere på at det totale volumet av vann i koppen er bevart

$$\int_0^{\frac{D}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\eta(R,\theta)} R \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}R = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 h$$

$$2\pi \int_0^{\frac{D}{2}} \frac{\alpha^2}{4g} R^5 + \frac{c - p_0}{\rho g} R \, \mathrm{d}R = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 h$$

$$2\pi \left[\frac{\alpha^2}{24g}\left(\frac{D}{2}\right)^6 + \frac{c - p_0}{2\rho g}\left(\frac{D}{2}\right)^2\right] = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 h$$

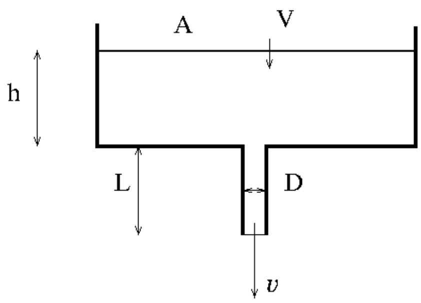
$$\frac{c - p_0}{\rho g} = h - \frac{\alpha^2}{12g}\left(\frac{D}{2}\right)^4$$

Til slutt får vi svaret

$$\eta(R,\theta) = h + \frac{\alpha^2}{4g} R^4 - \frac{\alpha^2}{12g}\left(\frac{D}{2}\right)^4$$

Oppgave 3

I kjelleren under Niels Henrik Abels hus bygger vi for tiden et rektangulært bølgebasseng med horisontal flate $A = 7\,\mathrm{m} \times 22\,\mathrm{m}$ som kan fylles med vann opp til høyde $h = 0.8\,\mathrm{m}$. Bassenget kan tømmes igjennom et vertikalt rør med diameter $D = 6\,\mathrm{cm}$ som strekker seg $L = 1\,\mathrm{m}$ ned under bunnen av bassenget. Vannet er i kontakt med luft, med konstant lufttrykk p_0, både ved den frie overflaten og ved utløpet av røret. Tyngdens akselerasjon er $g = 9.8\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ **Det skulle selvfølgelig ha stått $g = 9.8\,\mathrm{m}/\mathrm{s}^2$.**



Finn et uttrykk for hvor lang tid det tar å tømme bassenget.

Svaret skal oppgis ved hjelp av størrelsene A, D, h, L og g.
Du skal ikke regne ut tallverdi (antall timer og minutter).

Forklar nøye hvordan du kommer fram til resultatet og alle tilnærminger du gjør.

Den frie overflaten synker $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -V$.
Vannet er inkompressibelt $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$. Innsatt i Gauss sats gir dette at innkommende fluks i overflaten er lik utgående fluks i utløpet. Dersom vi kan anta at V og v er konstant i tverrsnittet har vi

$$AV = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 v$$

(Fortsettes på side 6.)

Kan vi bruke Bernoullis likning? Tettheten er konstant. Vi kan anta at vannet er nesten ideelt, friksjonen vil ikke være stor. Vi kan anta at tømmingen er nesten stasjonær, fordi overflaten vil synke langsomt. Uansett om det er virvling eller ikke, la oss følge strømlinjer som går fra overflaten til utløpet. Så det burde være rimelig å satse på at Bernoullis likning kan brukes som en god tilnærming.

La oss se på strømlinjer fra overflaten til utløpet. I begge ender av strømlinjene er trykket lik lufttrykket p_0*. Dersom vi kan anta at prosessen er stasjonær og friksjonsfri har vi Bernoullis likning*

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gh = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v^2}{2} - gL$$

Vi får

$$g(h+L) = \frac{v^2}{2}\left[1 - \left(\frac{\pi D^2}{4A}\right)^2\right]$$

men ettersom $\left(\frac{\pi D^2}{4A}\right)^2 \ll 1$ *i vårt tilfelle kan vi med god tilnærming skrive*

$$g(h+L) = \frac{v^2}{2} = \frac{V^2}{2}\left(\frac{4A}{\pi D^2}\right)^2$$

eller

$$\sqrt{g(h+L)} = -\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{4A}{\pi D^2}$$

Denne likninga er separabel. La oss separere h *og* t *og integrere fra full til tom tank*

$$-\int_h^0 \frac{\mathrm{d}h'}{\sqrt{h'+L}} = \int_0^t \sqrt{2g}\frac{\pi D^2}{4A}\,\mathrm{d}t'$$

som gir

$$t = \frac{8A(\sqrt{h+L} - \sqrt{L})}{\sqrt{2g}\pi D^2}$$

Vi har gjort to antakelser som er svært gode:

- $D^2 \ll A$
- *Vi kan i praksis se bort fra vannet som er igjen i utløpsrøret.*

Vi har gjort tre antakelser som er mer tvilsomme:

- *Bernoullis likning kan kun brukes for stasjonært hastighetsfelt, men tømmingen av karet er ikke stasjonær fordi overflaten synker.*
- *Vi har antatt konstant hastighet i tverrsnittet ved den frie overflaten og ved utløpet.*
- *Vi har antatt at det ikke er friksjon.*

Vår erfaring fra demonstrasjonsforsøket gjort i en forelesning var at disse "tvilsomme" antakelsene ga en feil på noen få prosent. Det er grunn til å tro at feilen burde bli enda mindre for tømmingen av bassenget ettersom arealet A *er mye større en tverrsnittet av utløpet.*