24. februar 2024

MEK1100

Obligatorisk oppgave 1 versjon A av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 14. mars 2024, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Merk at man har **ett forsøk** på å få oppgaven godkjent. Dette betyr at det ikke lenger gis andregangsforsøk.

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) senest samme dag som innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Krav til innlevering og godkjenning

Hvert punkt gir makismalt 10 poeng. I alt kan du oppnå 130 poeng. Vi krever minimum 70 prosent, eller 91 poeng for å få godkjent. Dersom dette ikke er innfridd ved innlevering, men besvarelsen vurderes som et seriøst forsøk, kan det gis anledning til ny innlevering.

Oppgave 1. Skalering

En ball kastes ut fra origo over en flat horisontal bakke. x-aksen er horisontal langs bakken og y-aksen peker vertikalt oppover. Ballen kastes ut med fart v_0 ved tiden $t = 0$. Kastet kan innstilles med utkastvinkel θ i forhold til den horisontale x-aksen. Ballen vil følge en bane gitt ved

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 t \cos\theta \\ y(t) &= v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

a) Finn tiden t_m når ballen faller ned på bakken ($y = 0$) og posisjonen $x(t_m) = x_m$ hvor dette skjer.

b) Innfør dimensjonsløse variable (x^*, y^*, t^*) for x, y, t når du skalerer med x_m for lengde og t_m for tid. Forklar hvorfor det ikke er behov for å skalere vinkelen θ.

c) Tegn baner (x^*, y^*) for tre utkastvinkler θ_n for $n = 1, 2, 3$. Velg $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{4}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$ og $\frac{\pi}{4} < \theta_3 < \frac{\pi}{2}$. Tegn de tre banene i samme koordinatsystem, og angi hvilken bane som svarer til hvilken utkastvinkel. Forklar hvorfor disse diagrammene kan brukes til å finne ballens baner for forskjellige verdier av utgangsfart v_0 og forskjellige verdier av g.

Oppgave 2. Strømlinjer til et todimensjonal hastighetsfelt

Vi skal nå se på hastighetsfeltet

$$\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j} = xy\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$$

a) Finn strømlinjene.

HINT 1: Du må løse ei differensiallikning som viser seg å være separabel, det vil si at den kan skrives om på formen $f(x)dx = g(y)dy$.

HINT 2: Fanger du opp at x-aksen også er løsning av den opprinnelige differensiallikninga?

b) Tegn strømlinjene for hånd og sett på piler for å indikere retningen på strømmen.
Et stagnasjonspunkt er et punkt hvor hastighetsfeltet er lik null. Finn alle stagnasjonspunktene og identifiser hvor i plottet disse ligger. Det er vanlig å tegne individuelle stagnasjonspunkter som tjukke kulepunkter $\bullet$.

c) Vis at det ikke finnes en strømfunksjon ψ.

HINT: En strømfunksjon $\psi(x, y)$ for et todimensjonalt felt $\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j}$ i xy-planet har egenskapen $v_x = -\partial\psi/\partial y$ og $v_y = \partial\psi/\partial x$. Dersom en slik strømfunksjon eksisterer så er strømlinjene gitt ved ekviskalarkurvene til strømfunksjonen, $\psi(x, y) =$ konstant.

Dersom et vektorfelt er todimensjonalt i xy-planet, $\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j}$ og divergensfritt, $\partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y = 0$, så eksisterer det en strømfunksjon som angitt ovenfor. Dersom et vektorfelt har divergens forskjellig fra null, så eksisterer det ikke en strømfunksjon for feltet.

For å vise at et felt ikke har en strømfunksjon, kan man enten vise at forsøk på å regne den ut ender i en selvimotsigelse, eller man kan vise at divergensen til feltet er ulik null.

Oppgave 3. Et annet todimensjonalt strømfelt

Et hastighetsfelt i xy-planet er gitt ved $\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j}$ der

$$v_x = \cos(x)\sin(y), \quad v_y = -\sin(x)\cos(y). \tag{1}$$

a) Finn divergensen $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y$ og virvlingen $\nabla \times \boldsymbol{v} = (\partial v_y/\partial x - \partial v_x/\partial y)\,\boldsymbol{k}$ av hastighetsfeltet.

b) Tegn opp strømvektorer langs x- og y-aksen.

c) Finn sirkulasjonen om randa til kvadratet definert ved $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ og $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$.

d) Forklar hvorfor det eksisterer en strømfunksjon for feltet gitt i likning (1), se hintet gitt i forrige oppgave. Vis at strømfunksjonen kan skrives

$$\psi = \cos(x)\cos(y). \tag{2}$$

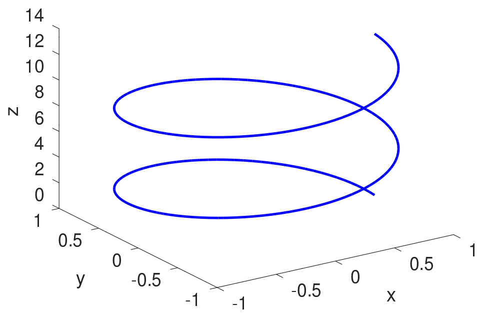
e) Bruk Taylorutvikling av andre orden til å finne tilnærmede strømlinjer nær origo.

Oppgave 4. Kurveintegral

a) Figuren nedenfor illustrerer en spiral som tvinner seg oppover i z-retning. Spiralen kan parametriseres ved

$$\boldsymbol{r}(\theta) = \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j} + \theta\boldsymbol{k}$$

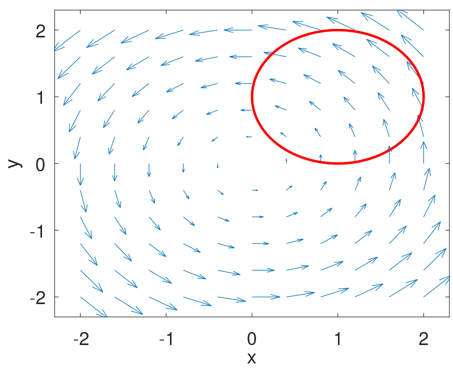
for $0 \leq \theta \leq 4\pi$.



Regn ut buelengden til spiralen. Hint: Det kan gjøres ved kurveintegralet

$$\int |\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$$

b) Figuren nedenfor illustrerer feltet til en karusell $\boldsymbol{v} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$, samt en rød sirkel med radius 1 rundt punktet $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$.



Regn ut sirkulasjonen rundt den røde sirkelen.