9. april 2024

MEK1100

Obligatorisk oppgave 2 versjon A av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 18. april 2024, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Merk at man har **ett forsøk** på å få oppgaven godkjent. Dette betyr at det ikke lenger gis andregangsforsøk.

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) senest samme dag som innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

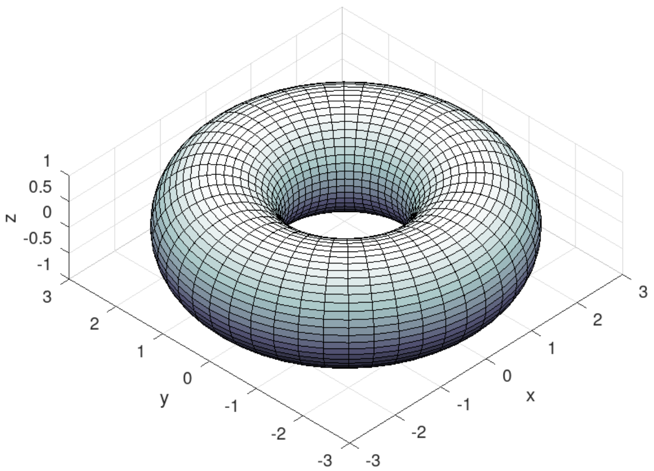
Oppgave 1. En torus er den geometriske formen til en smultring eller en bagel. Her har du noe å tenke på til neste gang du spiser en sånn.

Vi representerer vår torus på parameterform med koordinatene (r, ϕ, θ)

$$
\begin{aligned}
x(r, \phi, \theta) &= (b + r\cos\theta)\cos\phi \\
y(r, \phi, \theta) &= (b + r\cos\theta)\sin\phi \\
z(r, \phi, \theta) &= r\sin\theta
\end{aligned}
$$

hvor $0 \leqslant r \leqslant a$ og $0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$ og $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ og $0 < a < b$.

Her ser vi flaten som framkommer ved å sette $r = a = 1$ og $b = 2$:



a) Finn volumelementet, $\mathrm{d}\tau$, uttrykt ved de tre toruskoordinatene (r, ϕ, θ).

b) Regn ut volumet av torusen ved å integrere over (r, ϕ, θ).

Legger du merke til at volumet kan uttrykkes som produktet av en omkrets og et tverrsnitt?

c) Finn flateelementet med tilhørende normalvektor, $\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$, for flaten gitt ved $r = a$, uttrykt ved de to resterende toruskoordinatene (ϕ, θ).

d) Regn ut arealet til torusflaten gitt ved $r = a$ ved å integrere over (ϕ, θ).

Legger du merke til at arealet kan uttrykkes som produktet av to omkretser?

e) Undersøk om toruskoordinatene (r, ϕ, θ) er ortogonale.

f) Undersøk om toruskoordinatene (r, ϕ, θ) utgjør et høyrehåndsystem.

g) Vi skal anvende Gauss integralsats på vår torus. Gauss sats sier

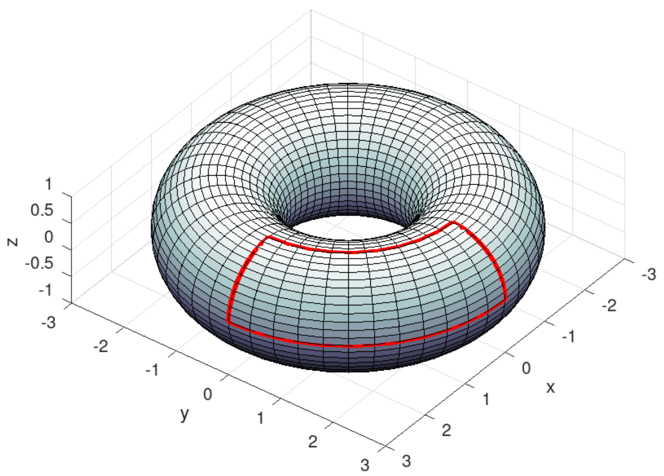
$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\tau = \int_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma$$

La V være hele torusen med $0 \leqslant r \leqslant a$ og la S være overflaten for $r = a$.

La vektorfeltet være $\boldsymbol{v} = z\boldsymbol{k}$.

Regn ut venstre og høyre side av Gauss sats hver for seg, og vis at de gir samme svar.

h) Vi skal anvende Stokes integralsats på vår torus, eller egentlig bare på den delen torusen som er avgrenset av den røde kurven:



Den røde kurven γ er gitt ved $r = a$ med følgende fire deler:

1: $\theta = 0$ og $0 \leqslant \phi \leqslant \pi/2$

2: $\theta = \pi/2$ og $0 \leqslant \phi \leqslant \pi/2$

3: $\phi = 0$ og $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$

4: $\phi = \pi/2$ og $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$

Stokes sats sier

$$\oint_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_S \nabla \times \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma$$

Her er S den delen av torusen sin overflate som er avgrenset av kurven γ.

La vektorfeltet være $\boldsymbol{v} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$.

Regn ut venstre og høyre side av Stokes sats hver for seg, og vis at de gir samme svar.