Fasit til ukesoppgaver

Oppgaver fra Achesons bok har hint og løsninger f.o.m. side 356.

uke 2

1. $f = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho R^3}}$

2. a) $\Omega = \sqrt{\frac{g}{asin(\alpha)}}$
   b) $\tau = \frac{m}{\mu a}$

3. $R(t) = \left(\frac{Et^2}{\rho}\right)^{1/5}$

uke 3

1. <u>Gjevik 2.10.1</u>

   a) $y = \frac{y_0}{x_0}x$
   b) $y = \frac{y_0}{x_0}x$
   c) $t = \frac{1}{\alpha}ln\left(\frac{x1}{x_0}\right) = \frac{1}{\alpha}ln\left(\frac{y1}{y_0}\right)$
   d) $\alpha \neq \alpha(t) : \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \alpha^2 x\mathbf{i} + \alpha^2 y\mathbf{j}$
   $\alpha = \alpha(t) : \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = x\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t} + \alpha^2\right)\mathbf{i} + y\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t} + \alpha^2\right)\mathbf{j}$

2. <u>Gjevik 2.10.4</u>

   $\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{x}{(1+t)^2}\mathbf{i} - \frac{2y}{(1+t)^2}\mathbf{j} + \frac{3z}{(1+t)^2}\mathbf{k}$
   $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \frac{1}{(1+t)^2}(x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + 9z\mathbf{k})$
   $\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{2y}{(1+t)^2}\mathbf{j} + \frac{12z}{(1+t)^2}\mathbf{k}$

uke 4

1. <u>Bevegelsesligninger</u>

   a) Eulers ligning: $\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\mathbf{k}$ hvor $\mathbf{u}$ er hastighetsvektoren, p er trykk, ρ er tetthet, t er tid og g er gravitasjon. Kan brukes for inviskøse strømninger.
   b) Achesons bok side 8-10 + vi gikk gjennom dette i forelesing
   c) Potensialteori; $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$ og $\nabla\times\mathbf{u} = 0$ med hastighetspotensiale

$\mathbf{u} = \nabla\phi$. Ved irrotasjonel strømning trenger vi ikke å prikke Eulers ligning med $\mathbf{u}$ da H er konstant overalt.

2. Potensialteori

   a) Bruk $\nabla \cdot \mathbf{u} = \Delta\phi = 0$.
   b) Ja, Laplace operatoren er en lineær operator i.e. $\Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b$.
   c) Bruk ikke-stasjonær Bernoulli $\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + gz = G(t)$

3. Gjevik 7.12.2

   a) $\nabla \times \mathbf{u} = 0 \quad \rightarrow \quad \phi = \frac{1}{2}ax^2 - ay^2 + C_1$.
   b) $\nabla \cdot \mathbf{u} \neq 0$.
   c) $udy = vdx \quad \rightarrow \quad y = \frac{y_0 x_0}{x}$

4. Gammel eksamensoppgave

   a) $\Delta\phi = 0$
   b) Betinglese: $\nabla \cdot \mathbf{u} = \Delta\phi = 0 \quad \rightarrow \quad \psi = -2Ar^k \cos\left[k\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right] + C$
   c) Bruk grensebetingelsene $u_\varphi = 0$ ved veggen eller at veggene er strømlinjer med $\psi = const$.
   d) Bernoulli: $p = p_0 - \frac{\rho}{2}\left(Akr^{k-1}\right)^2 + \rho g z = p_0 - \frac{9}{8}\rho A^2 r + \rho g z$
   e) $\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad \rightarrow \quad A^2 = \frac{8}{9} g \cos(\varphi) = \frac{4}{9} g$ ved $\varphi = \frac{\pi}{3}$ eller $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

uke 5

1. Bernoulli (eget ark)

   1a) $\frac{\partial c}{\partial t} = 0$
   1b) $(\mathbf{u} \cdot \nabla)c = 0$
   1c) $\frac{Dc}{Dt} = 0$

   2a) Inviskøs og stasjonær strømning, inkompressibelt fluid.
   2b) Se side 8-10 i Achesons bok
   2c) $v = \frac{a}{A} v_0$ fra massebevaring
   2d) $F = p_0 A + \frac{\rho v_0^2 A}{2}\left(1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2\right)$ fra Bernoulli

   3a) Ingen løft
   3b) Opp
   3c) Ned

2. Gjevik 2.10.7

   1) $\frac{db}{dx} \lesseqgtr 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dh}{dx} \lesseqgtr 0$
   2) $\frac{db}{dx} \lesseqgtr 0 \quad \rightarrow \quad 0 \lesseqgtr \frac{dh}{dx}$
   3) Høy vannstand for $x < 0$ og lav vannstand for $x > 0$ med en kontinuerlig overgang rundt $x = 0$.

uke 6

1. Gjevik 10.6.1

   a) $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, w = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \rightarrow u \neq u(x)$
   b) $\mathbf{u} = u(z)\mathbf{i}$
   c) Dette er no-slip betingelser.
   d) $u(z) = \frac{z}{H}U_0$
   e) Stasjonær strømning: Partikkelbaner og strømlinger er identiske. $\mathbf{u} \times d\mathbf{r} = 0$. Strømlinjene er rette linjer i x-retningen.
   f) $\omega = \frac{U_0}{H}\mathbf{j}$
   g) $Q = \int_0^H u(z)dz = \frac{U_0 H}{2}$
   h) $u = \frac{\partial \psi}{\partial z} \rightarrow \psi = \int u(z)dz$
   i) Finn skjærspenningen via $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial z}$ evaluert på veggene.
   j) Friksjonsfri: $\mu = 0 \rightarrow \tau = 0$

uke 7

1. 1) Se seksjon 7.6 i Acheson (s.238-241)

uke 8

uke 9

Sirkulasjon i Hele-Shaw celle:

1. $\Gamma = 0$

1. Gjevik 2.10.7

   a) $v \cdot n = -u\frac{\partial f}{\partial x} - v\frac{\partial f}{\partial y} + w = \frac{D}{Dt}[z - f(x, y)] = 0$

1. Gjevik 7.12.2

a) $\phi = \frac{1}{2}ax^2 - y^2$, pga $\nabla \times \mathbf{u} = 0$
b) $\nabla \cdot \mathbf{u} \neq 0$
c) $\mathbf{u} \times d\mathbf{r} = 0 \qquad \rightarrow \qquad y = \sqrt{\frac{x_0}{x}}y_0$