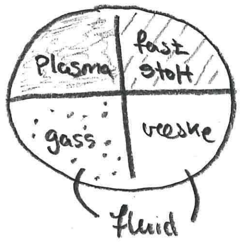
Fluid beskrivelse - kontinuum, definisjoner

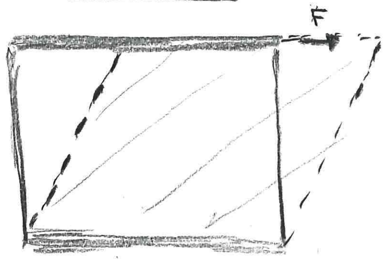
Material tilstander ;



Matematiske beskrivelsen av et <u>fast stoff</u> og et <u>fluid</u> er nesten lik!

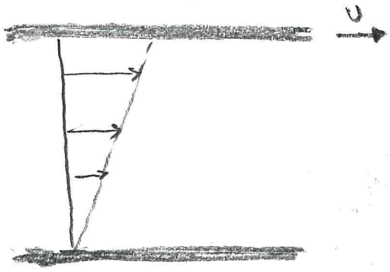
Ved skjærspenning ;

<u>Fast stoff</u>



Permanent deformasjon, IFI70

Fluid



væsken settes i bevegelse (dynamikk)

I det mest generelle tilfellet, beskrives fluidets dynamikk (kontinuum) av mekanikkens basis/konserverings-lover ;

1) Masse /kontinuitet
2) Momentum → Newton's 2. lov, $\underline{F} = m\underline{a}$
3) Energi

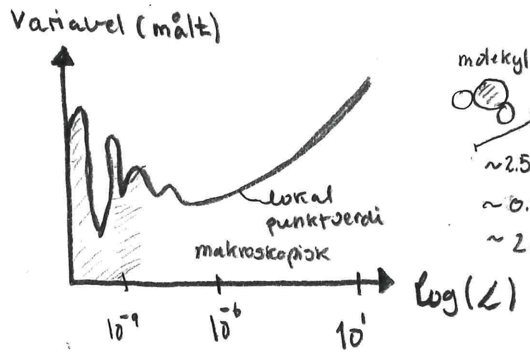
} Utvikle og løse disse ligningene for å forstå fluid fysikken!

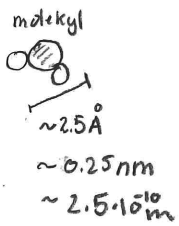
Når er kontinuums beskrivelsen gyldig?

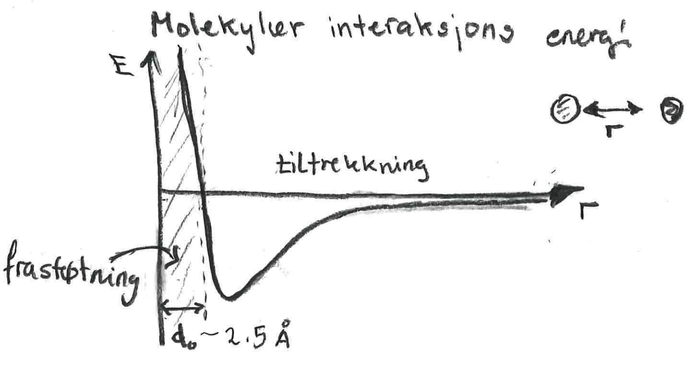
→ tidsmiddlet/gjennomsnittlig beskrivelse av <u>kontinuerlige material parametre og variabler</u>

Individuelle effekter av molekyler er negligerbare.

→ Størrelsen på det betraktede systemet $L \gg$ molekylære lengdeskalaer







Molekylære kollisjoner skaper dynamikk og nanoskala effekter!

Gjennomsnittlig distanse λ et molekyl forflyttes mellom kollisjoner

gass ; $\lambda_g \sim 10^{-7}$ m

væske ; $\lambda_v \sim 10^{-8}$ m

Betingelse for kontinuums gyldighet;

$\lambda << L \Rightarrow \frac{\lambda}{L} << 1 \quad \wedge \quad \frac{\lambda}{L} = kn$ = knudsen nummer

Eks.

Svømmende bakterium

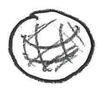
$L \approx 10^{-7}$ m , $\frac{\lambda_v}{L} \sim 0.1$

fluktuasjoner? $E \gg k_B T$?

Blod celle

$L \approx 10^{-5}$ m , $\frac{\lambda_v}{L} \sim 10^{-3}$

Fotball



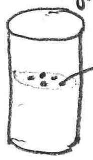
$L \approx 0.5$ m , $\frac{\lambda_g}{L} \sim 10^{-7}$

Kontinuum beskrivelsen oftest gyldig $\Rightarrow$ Fluid dynamikkens variabler definert i alle punkter

Gjennomsnittlig molekyler dynamikk $\Rightarrow$ kontinuums parametrer.

Eks : Diffusjon (Einstein, 1905)

vannglass



Pollen frø

Kollisjoner mellom vann molekyler og pollenfrø på overflaten $\rightarrow$ forflyttning

molekylært $\rightarrow$ kollisjoner

makroskopisk $\rightarrow$ diffusjon , $D = \frac{k_B T}{6\pi\mu R}$

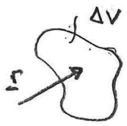
$[D] = m/s^2$

$\wedge$ $[\mu]$ = fluidets viskositet = $N \cdot s/m^2$

$[R]$ = størrelsen på pollenfrø = m

$[k_B T]$ = termisk energi = J

Masse :



massetettheten , $\bar{\rho} = \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad \wedge \quad [\rho] = kg/m^3$

$$\boxed{\text{Kontinuum; } \rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}} \rightarrow \text{konstant}$$

Fluid parametrer

$[\rho] = \frac{kg}{m^3}$ = massetetthet / densitet = $\frac{\text{masse}}{\text{volum}}$

$[\mu] = Pa \cdot s$ = (dynamisk) viskositet = $\frac{\text{trykk}}{\text{areal}}$ per tid
= fluidets "tykkelse" / motstand til bevegelse

$[\nu] = [\frac{\mu}{\rho}] = m/s^2$ = kinematisk viskositet = diffusjon
= momentum diffusjon

$[\gamma] = \frac{N}{m}$ = overflatespenning mellom fluider som ikke blandes = $\frac{\text{kraft}}{\text{lengde}}$

Fluid variabler (feltbeskrivele)

$[\underline{u}] = [[u, v, w]] = \frac{m}{s}$ = hastighetsvektor ← $u = u(x,y,z,t)$ – x, $v = v(x,y,z,t)$ – y, $w = w(x,y,z,t)$ – z

(u – x, v – y, w – z)

notasjon
vektor = $(\underline{\ })$
tensor = $(\underline{\underline{\ }})$

$[P] = Pa$ = trykket – $P = P(x,y,z,t)$

$[T] = K$ = temperatur – $T = T(x,y,z,t)$

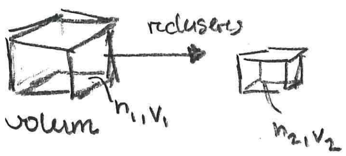
$[\rho] = kg/m^3$ = densitet – $\rho = \rho(x,y,z,t)$

ρ både variabel og parameter ?

Inkompressibilitet fluid

Endring i densitet ved endring i trykket er neglisjerbart

Eks



n = antall molekyler
V = Volum

$\Rightarrow \frac{n_1}{V_1} = \frac{n_2}{V_2}$

Betyr ikke at ρ = konstant !

Kompressibelt fluid

Dersom volumet komprimeres med en kraft (P·A) vil antall molekyler øke per volum $\rightarrow \frac{n_1}{V_1} \neq \frac{n_2}{V_2}$

Mål på kompressibilitet, $\frac{\partial \rho}{\partial P} = c^2$ = lydhastigheten   luft = 340 m/s, vann = 1480 m/s

Dersom hastigheten $u \gtrsim c \rightarrow$ kompressible effekter. Mach tallet = $Ma = \frac{u}{c}$

$Ma \gtrsim 1$ - behøves tilstandsligning dvs. relasjon mellom $\{P, \rho, T\}$

Ideell gass lov (enkleste tilstandsligning)

Termisk energi ~ kinetisk energi

$k_B T \sim m v^2$ (Bolzmann)   m = massen

Kraften ~ antall molekylære kollisjoner

$P \sim n m v^2$ n = antall molekyler per V

$$\boxed{P(\rho, T) = n k_B T = \rho R T}$$

$\rho = nm$,

R = gass konstant

(Generell) Matematisk beskrivelse av fluidets dynamikk – inkompressibelt fluid
– isoterm, T = konst

Navier - Stoke's ligninger

Kontinuitet;
$$\nabla \cdot \underline{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Momentum;
$$\underbrace{\rho \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \right)}_{\text{treghet / inertia}} = \underbrace{-\nabla P}_{\text{trykk gradient}} + \underbrace{\mu \nabla^2 \underline{u}}_{\text{viskøse krefter}} + \underbrace{\underline{f_e}}_{\text{eksterne krefter}} = \nabla \cdot \underline{\underline{T}}$$

Stress tensor

$\underline{u} = \underline{u}(x, y, z, t)$
$P = P(x, y, z, t)$

x - $$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

y - $$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

z - $$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

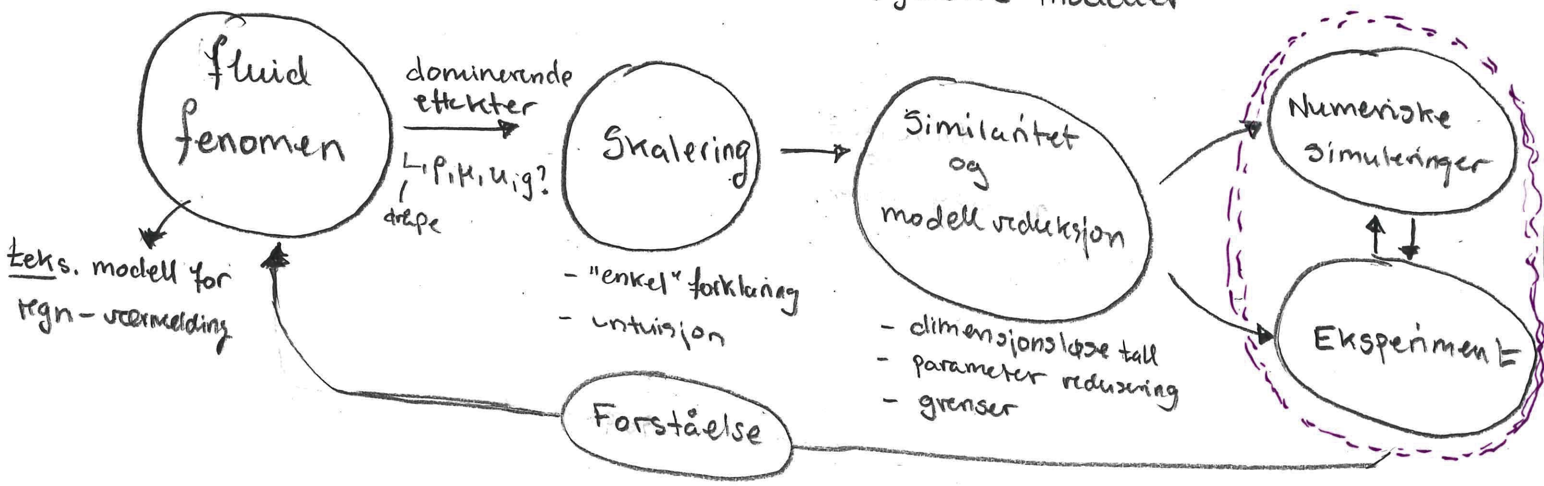
Komplisert ligningssett! – ulinjært
– tidsavhengig (t)   – 3 dim.: rommet $\{x, y, z\}$

Kan vi forenkle beskrivelsen? Hvordan?

- Bruke semestret til å utlede ligningene og se på grenser som hjelper forenkle beskrivelsen → matematiske verktøy → intuisjon om fluid fysikken!

Skalering - intuisjon og forenklinger

Essensielt verktøy for konstruksjon av fysiske modeller



Dimensjons analyse - Buckingham's Π-teorem

Ide - Systematisk reduksjon av parameter området ved å anta Skalerings similaritet i form av monomial potenslov → $f = a^i b^k \ldots$

→ Systemet beskrives av dimensjonsløse tall (Π-tall), Selv om systemet endres (størrelse, hastighet osv) og Π-tallene er uendret er fluid dynamikken uendret

Π-teoremet - variabelen $\frac{dP}{dx} = f(a_1, a_2, a_3 \ldots)$ kan beskrives ved hjelp av Π-grupper som er den relative balansen av fysiske effekter.

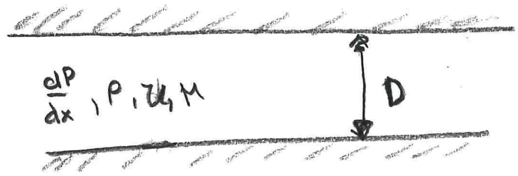
Antallet Π-grupper bestemmes ved;

Totalet antallet parameter/variabler − fysiske dimensjoner = antallet

$$n - m = k$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dx} = a_1^i a_2^k a_3^x \, \Phi(\Pi_1, \ldots, \Pi_{n-m})$$

Eks; Trykkfall i rørstrømning $\frac{dP}{dx}$



u = gjennomsnitts hastighet

Parametrer/variabler

Dimensjoner (M = masse, T = tid, L = lengde)

1) $\frac{dP}{dx} = \frac{Pa}{m} = \frac{kg\,m}{s^2}\frac{1}{m^3} = ML^{-2}T^{-2}$

2) $\mu = Pa \cdot s = \frac{kg\,m}{s^2}\frac{\cdot s}{m^2} = ML^{-1}T^{-1}$

3) $D = m = L$

4) $\rho = kg/m^3 = ML^{-3}$

5) $u = m/s = MT^{-1}$

→ Dimensjons matrise! (se notat)

Variabler, $n=5$

Dimensjoner, $m=3$

π-grupper, $K = n-3 = \underline{2}$

Bruker 3-repeterende variabler (ikke måles!) for å finne potensene. α, β, γ

Rep. variabler; V, D, ρ (må inneholde M, L, T → kan ikke kombineres sammen og bli dim. løst.)

LT^{-1}, L, ML^{-3}

$$\Pi_1 = \frac{dP}{dx} u^{\alpha} D^{\beta} \rho^{\gamma} = ML^{-2}T^{-2}(LT^{-1})^{\alpha} L^{\beta} (ML^{-3})^{\gamma} = M^0 L^0 T^0$$ (dimensjonsløst)

M; $1 + \gamma = 0 \rightarrow \underline{\gamma = -1}$

L; $-2 + \beta - 3\gamma + \alpha = 0 \rightarrow \underline{\beta = 1}$

T; $-2 - \alpha = 0 \rightarrow \underline{\alpha = -2}$

$$\Pi_1 = \frac{dP}{dx} u^{-2} D^{1} \rho^{-1} = \frac{\frac{dP}{dx} \cdot D}{\rho u^2}$$

Finn selv $\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho u D} = Re^{-1} = (\text{Reynolds tallet})^{-1} = \frac{\text{viskøse krefter}}{\text{treghet}}$

Noter;

R = Acheson

Re = Gjevik

Dimensjonsanalysen gir trykk fallet;

$$\frac{dP}{dx} \cdot \frac{D}{\rho u^2} = f(\Pi_2) = f(R_e^{-1})$$

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\rho u^2}{D} f(R_e^{-1})$$

→ Redusert til 1 parameter Re

→ test eksperiment ∧ simuleringer!

→ løsning uten ligninger!

Fluid dynamikk > 50 π-tall! (slide), eks. Kn, Ma, Re, Ca, We.

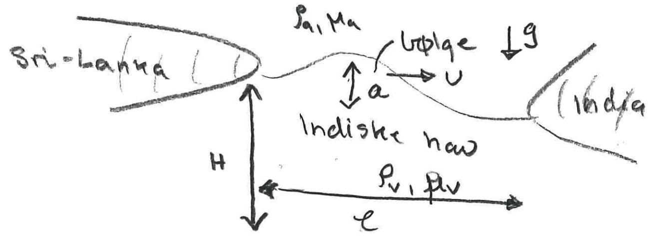
Knudsen nr. $= Kn = \frac{\lambda}{L} = \frac{\text{frie veilengde}}{\text{lengde}}$; Reynolds nr. $= Re = \frac{\text{treghet}}{\text{viskose krefter}}$,

Mach nr. $= Ma = \frac{u}{c} = \frac{\text{hastighet}}{\text{lyd hastighet}}$; Kapillær nr. $= Ca = \frac{\mu U}{\gamma} = \frac{\text{viskose kraft}}{\text{overflatespenning}}$,

Weber nr. $= We = \frac{\rho U^2 L}{\gamma} = Re \cdot Ca = \frac{\text{treghet}}{\text{overflate spenning}}$

Skalering - beregningsverktøy

Eks. 1 Tsunami varslingssystem → responstid? Sri-Lanka, India, 2004.



Når treffer Tsunamien India?

Parametre

$u, a, \lambda, H, L, \rho_a, \rho_v, g$

$[T^{-1}L], [L], [L], [L], [L], [ML^{-3}], [ML^{-3}], [LT^{-2}]$

$m = 8$, $n = 3$, $k = 8 - 3 = 5$ π-tall

$\frac{u^2}{gL}$, $\frac{a}{L}$, $\frac{\rho_a}{\rho_w}$, $\frac{\lambda}{L}$, $\frac{H}{L}$

$\frac{u^2}{gL}$ ↓ tidskala; $\frac{a}{L} \ll 1$; $\frac{\rho_a}{\rho_w} \ll 1$; $\frac{\lambda}{L}$ ↓ lang bølgelengde, dvs. liten amplitude; $\frac{H}{L} \ll 1$

Balanserer kinetiske og potensielle energien i en vannsøyle med høyden H

$$\rho u^2 = \rho g H \quad \Rightarrow \quad \underline{u \approx \sqrt{gH}}$$

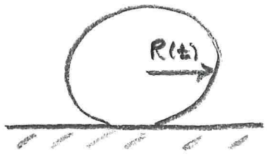
Omtrentlig tid for bølgeankomst;

$$T \approx \frac{L}{u} \approx \frac{L}{\sqrt{gH}} \approx \frac{4 \cdot 10^6 \, m}{(10 \, m/s^2 \cdot 5 \cdot 10^3 \, m)^{1/2}} \approx 2000 s \approx 40 \text{ min!}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} g \sim 10 \, m/s^2 \\ L \sim 4 \cdot 10^6 \, m \\ H \sim 5 \cdot 10^3 \, m \end{array}}$$

Eks. 2. Eksplosjonsradius til atombomben (G.I. Taylor, von Neumann)

Antagelser:
- konstant densitet
- Ingen kjemisk reaksjon
- $R(t) \gg r_0$, nukleasjonen av eksplosjonen



$v(t) = \frac{dR}{dt} = \dot{R}$

Behøver; 1) masse-, 2) momentum- og 3) energi- bevarelse

E = energien lagret i bomben

$$E \approx m v^2 \approx \rho R^3 \dot{R}^2 \sim \frac{\rho R^5}{t^2} \Rightarrow R(t) \sim \underbrace{\left(\frac{E t^2}{\rho}\right)^{1/5} \cdot C_1}_{}$$

C_1: konst $\sim \mathcal{O}(1)$

Taylor hadde; ρ, manglet E (klassifisert), $R(t)$

Mack publiserte bilder i NYT $\rightarrow R(t)$ og dermed kunne E beregnes!

Grenser $\rightarrow$ spesielle fluidstrømmer

Navier-Stokes;

$$\rho\left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u}\cdot\nabla\underline{u}\right) = -\nabla p + \mu\nabla^2\underline{u} + \underline{f}_e$$

$$\underbrace{\sim \frac{\rho U^2}{L}}_{\text{ikke linjer}} \qquad \underbrace{\sim \frac{\mu U}{L^2}}_{\text{2. ordens}}$$

Skalering

$u \sim U$

$[x, y, z] \sim L$

$t \sim L/U$

med; $\underline{u} = U\hat{u}$

$t = \frac{L}{U}\hat{t}$

$p = \rho U^2 \hat{p}$

(viskøst) $p = \frac{\mu U}{L}\hat{p}$

$Re \ll 1$

Skalerte variabler $\Rightarrow$

$$\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \hat{u}\cdot\nabla\hat{u}\right) = -\nabla\hat{p} + \underbrace{\left(\frac{\mu}{\rho U L}\right)}_{Re}\nabla^2\underline{u} + \Pi_e \underline{f}_e$$

Kontinuitet: $\nabla\cdot\hat{u} = 0$.

$\Rightarrow$ Kan bruke skalering til å redusere matematisk kompleksitet!

Reduksjon av ligningene;

Bulk Strømning

① **Hydrostatikk**
Stagnant $\rightarrow \underline{u} = 0 \Rightarrow$ mekanisk likevekt, $\boxed{\nabla p = \underline{f}_e}$

② **Inviskøst**, $\mu = 0$ (friksjonsfri strømning) $\Rightarrow Re = \frac{\rho U L}{\mu} = \infty$

Euler ligningene; (redusert orden)

$$\boxed{\begin{array}{l} \nabla \cdot \underline{u} \\ \rho\left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u}\nabla\underline{u}\right) = -\nabla p \end{array}}$$

tidsavhengig, ikke linjære

③ **Viskøse strømninger** $\mu > 0$,
1D, stasjonært $\left(\frac{\partial u}{\partial t} = 0\right)$, grensesjikt

④ **Veldig viskøse strømninger** $Re \rightarrow 0$,
Stoke's ligninger

$$\boxed{\begin{array}{l} \nabla p = \mu \nabla^2 \underline{u} \\ \nabla \cdot \underline{u} = 0 \end{array}}$$

tidsuavhengig! lineær

overflater

⑤ **Geometri og overflater** (væske filmer)
Lange bølger og liten amplitude

* $Re \rightarrow 0$, lubrikasjon

** $Re \rightarrow \infty$, havbølger.

Gjennom ①-⑤ forstå generelle fluid dynamikken
\+ redusere ligningene slik at de kan løses ved hjelp av matematiske verktøy

= intuisjon om fluid fysikk.