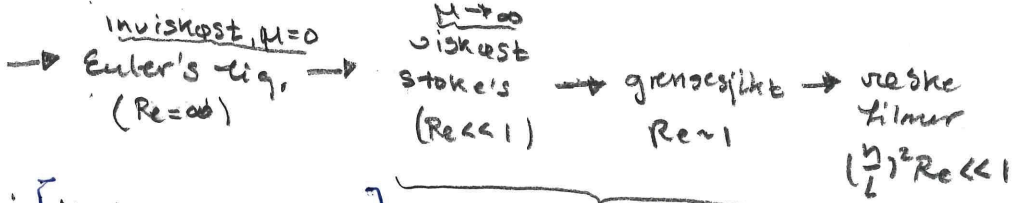
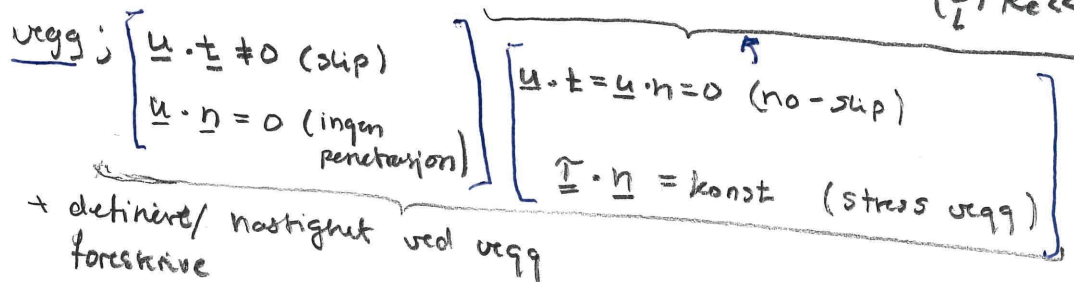


Overflatedynamikk

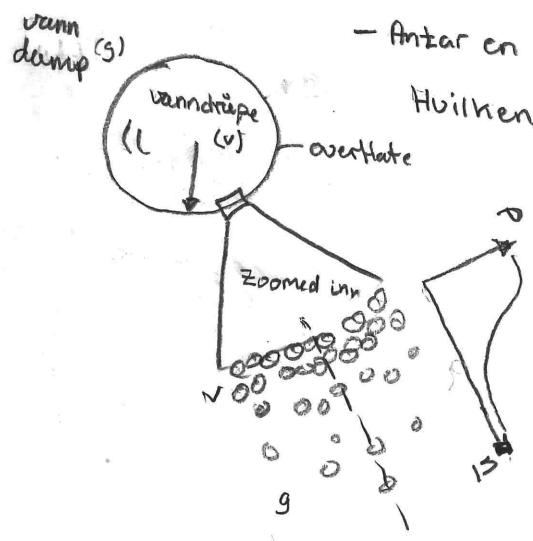
Bulk strømning



↓
grenseltingelser



Overflatespenning

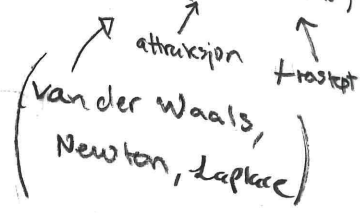


- Antar en dråpe med radius $R \rightarrow$ gitt volum $V \sim R^3$
Hvilken form tar dråpen?

Molekylært bilde:

Ved overflaten er $\nabla P \neq 0$, definert som max (∇P).
 \Rightarrow overflatespenning generert av molekylær attraksjon
 Vann molekylar "mister" partner for å danne bond ved gass siden \rightarrow netto kraft normalt $-\underline{n}$ på overflaten

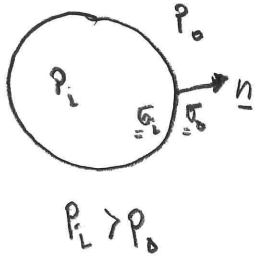
Beskrives ved molekylært potensial; $\Phi(r) = A/r^6 - r^{-12} B$
 \Rightarrow energi per flateenhet



Kontinuum;

sprang i P ved overflaten med en energikostnad
 gitt av overflaten \equiv kapillar energi

i dråpen



sprang i stress ved overflaten

$[\underline{n}; \underline{\sigma} \cdot \underline{n}] = \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} |, \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} |, \neq 0 \Rightarrow \Delta P \neq 0$ sprang i P på tvers av overflaten

\rightarrow direkte ingen strøpning!

Trykk differansen $\Delta P = f(r, \kappa) = -\gamma \kappa$

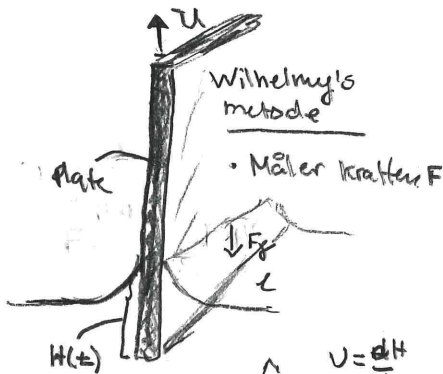
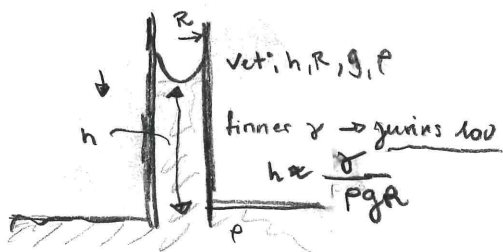
→ kurvaturen til overflaten

$[\gamma] = N/m = \text{overflatespennings koeff.}$

$[\kappa] = 1/m = \text{kurvaturen.}$

Huordan måle γ ?

kapillert rør



Effekt $\sim F \cdot v = \frac{d}{dt} (\gamma \cdot A) = \gamma \frac{dA}{dt}$

$\gamma \sim F/c$

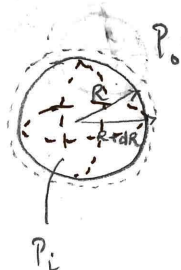
• måler F , har c .

kapillær bølger



- Genererer kapillær bølger
- Måler frekvens, bølglengde (ω) (λ) (neste uke!)

Young-Laplace lov - trykk sprang



$P_i > P_o$

Arbeidet av trykk + overflatespenning

$W = -P_i V + P_o V + \gamma \cdot A$

Endring i arbeid ved utvidelsen dR i likevekt $\Rightarrow dW = 0 \wedge dR \neq 0$

$dW = -P_i dV + P_o dV - \gamma dA = 0$

$P_i - P_o = \gamma \frac{dA}{dV} = \gamma \left(\frac{8\pi R}{4\pi R^2} \right) = \frac{2\gamma}{R} = \Delta P = \frac{\gamma \cdot L}{\text{lov}}$

$[P] = -\gamma \kappa$
↑ trykk spranget

Sphær (3D); $\frac{1}{2R} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \text{gjennomsnittskurvatur}$

2D; $\frac{1}{R} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\infty} \right) = \kappa$

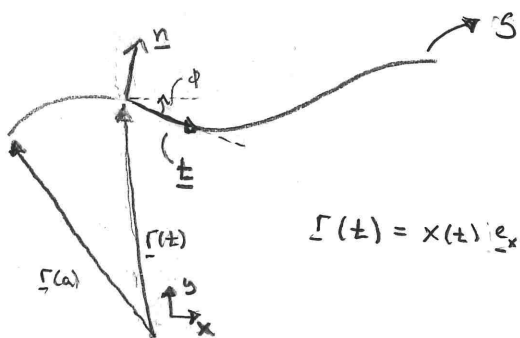
Skalering: Dråpe med radius R .

$\frac{\text{gravitasjons kraft}}{\text{overflate kraft}} = \frac{\Delta \rho g R^3}{\left(\frac{\gamma}{R} \right) R^2} = \frac{\Delta \rho g R^3}{\gamma} = Bo = \text{Bond tallet}$

$Bo \ll 1 \rightarrow$ optiske dråper
Kapillær lengde $\Rightarrow Bo = 1 = \frac{\Delta \rho g e^2}{\gamma}$
 $e = \left(\frac{\gamma}{\Delta \rho g} \right)^{1/2}$

$\frac{\text{viskøs kraft}}{\text{overflate kraft}} = \frac{(\mu \frac{v}{R}) \cdot R^2}{\left(\frac{\gamma}{R} \right) R^2} = \frac{\mu v}{\gamma} = Ca = \text{Kapillær tallet}$

Matematisk beskrivelse av overflaten (Kurvaturen)



$$r(t) = x(t)e_x + y(t)e_y$$

partikkelen som beveger seg langs S har en hastighet $\frac{\partial r}{\partial t} = \dot{x}e_x + \dot{y}e_y = \underline{u}$

→ Kurvens tangent, $\underline{t} = \frac{\underline{u}}{|\underline{u}|}$ $\hat{t} = \cos\phi e_x + \sin\phi e_y$ (geometri)

Endringen av \underline{t} langs S; $\frac{d\underline{t}}{ds} = \frac{d\phi}{ds} = \frac{d\underline{t}}{d\phi} = \frac{d\phi}{ds} \cdot (-\sin\phi e_x + \cos\phi e_y)$

kurvaturen, $\kappa \equiv \left| \frac{d\phi}{ds} \right|$

generelle uttrykk for kurvaturen; $\kappa = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$ (skalar - ingen retning)
 → sett inn $x=x$
 $y=f(x)$

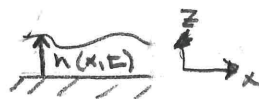
Atar funksjonen;

$F = F(x, z, t) = z - h(x, t)$ $h = h(x, t) =$ filmens høying senking over x-aksen (3D-x-y planet)

$F = \text{konstant}$ (equipotensial overflate) → kons. potensial

$F=0, h(x, t)=z$

Væske film



Overflate normalen;

$$\underline{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{[-\frac{\partial h}{\partial x}, 1]}{\sqrt{(\frac{\partial h}{\partial x})^2 + 1}}$$

$$\sqrt{(\frac{\partial h}{\partial x})^2 + 1}$$

dersom $h(x, t)$ har liten gradient
 dvs $\frac{\partial h}{\partial x} < 1, (\frac{\partial h}{\partial x})^2 \ll 1$

→ Lengden på vektoren

linearisert overflate normal

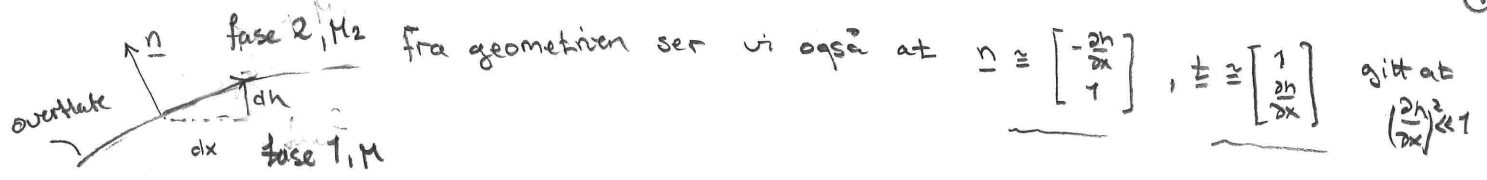
$$\Rightarrow \underline{n} = \left[-\frac{\partial h}{\partial x}, 1 \right]$$

$$(3D; \underline{n} = \left[-\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, 1 \right])$$

Lineariserte kurvatur

$$\kappa = \nabla \cdot \underline{n} = -\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (\kappa = \nabla^2 h - 3D)$$

dersom $\frac{\partial h}{\partial x}$ ikke er liten, $\kappa_m = \frac{-\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}}{(1 + (\frac{\partial h}{\partial x})^2)^{3/2}}$



Stresset på overflaten; $u = u(y)$, $v = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ved $h(x)$

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \begin{bmatrix} -p & \mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ \mu \frac{\partial u}{\partial y} & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\partial h}{\partial x} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma(h_x) \\ -p + \sigma(h_x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{konstant} \\ -\gamma h_{xx} + p_0 \end{bmatrix}$$

Skjærspenning ^{tangensielt} på overflaten må være kontinuerlig;

$$\Rightarrow \mu_2 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_h = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_h \quad \text{dersom } \mu \gg \mu_2 \Rightarrow \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_h = 0$$

Normalt på overflaten har vi trykket (for liten gradient h_x)

$$p = -\gamma h_{xx} + p_0$$

→ dersom $\gamma h_{xx} \rightarrow 0$, $p = p_0$

(setter $p_0 = 0$ for nå)

Generelt har vi $[\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}] = -\gamma \kappa \cdot \underline{\underline{n}}$

trykk sprunget; $p_0 - p_i = -\gamma h_{xx}$

Overflate kinematikk:

Fluid partikkelen holder seg på overflaten $F = z - h(x, t)$

Siden $F = \text{konst}$, → material overflate og $\frac{dF}{dt} = 0!$

(Kjernerregelen)

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial t} - u \frac{\partial h}{\partial x} - v \Big|_h = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{v \Big|_h = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}}$$

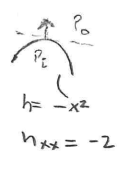
kinematiske grensebetingelsen

vi ser at dersom overflaten er;

1.) horisontal, $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$; $v = \frac{\partial h}{\partial t}$

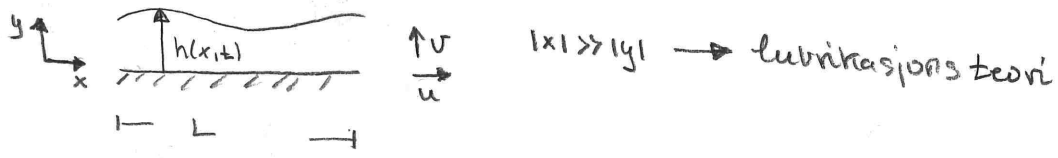
→ "partikkel" hastighet

2.) stasjonær, $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$; $v = u \frac{\partial h}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{v}{u} = \frac{\partial h}{\partial x}$ → overflaten følger en strekulinje!



Grensebetingelser :
 • no-slip ved vegg, $u=0$
 • kinematisk grensebetingelse ved overflaten
 • stress betingelse

Dynamiske overflate fenomener - tynn viskøs film



$$\rho \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \right) = -\nabla P + \mu \nabla^2 \underline{u}$$

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla P &= \mu \nabla^2 \underline{u} \\ \nabla \cdot \underline{u} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= 0 \Rightarrow P = P(x, t) \\ \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Integrerer kontinuitetsligningen over film høyden

$$\int_0^{h(x,t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h(x,t)} u dy - u \frac{\partial h}{\partial x} + v \Big|_0^h = 0$$

Heibniz-int.

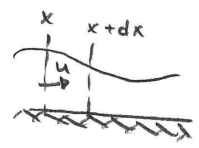
Heibniz theorem

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{a(z)}^{b(z)} f(x, z) dx = \int_{a(z)}^{b(z)} \frac{\partial f}{\partial z} dx + f(b(z), z) \frac{\partial b}{\partial z} - f(a(z), z) \frac{\partial a}{\partial z}$$

① Grensebetingelser :
 $z=0; v=0$ (no-slip)
 $z=h; v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}$ (kinematisk g.b.)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^h u dy \right) = 0$$

lokal endring i høyde massefluks i filmen (q)



② $z=0; u=0$ (no-slip)
 $z=h; \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ (ingen skjerspenning)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \rightarrow \text{Int.} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \cdot y + c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{-\partial P}{\partial x} \frac{h}{\mu}$$

$$u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \left(\frac{y^2}{2} - yh \right) + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

fluksen er : $q = \int_0^h u dy = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \left[\frac{y^3}{6} - \frac{y^2 h}{2} \right]_0^h$


$$q = -\frac{1}{3\mu} \frac{\partial P}{\partial x} h^3$$

(lik fluksen faste vegger, men $h \neq \text{konst.}$)

q innsatt i massebevarelsesligningen gir: $\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{3\mu} \frac{\partial}{\partial x} (h^3 \frac{\partial p}{\partial x}) = 0$

N.s. ligninger \rightarrow 1, ikke-lineær, tidsavhengig skalar ligning!

Film med overflatespenning: $P = -\gamma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\gamma}{3\mu} \frac{\partial}{\partial x} (h^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}) = 0$
 Eks: - dråpe spredning
 - film instab.

Gravitasjon: $\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho g \sin \alpha + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$
 (alt. $P = \text{konst.}$ $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \cos \alpha$)
 $f_c = [-\rho g \sin \alpha - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0]$

 $\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} h^2 \frac{\partial h}{\partial x} = 0$
 (Acheson, Kap. 7) • gravitasjons strømmer (is strømning, granulært medium)

Huordan løse filmligningene?

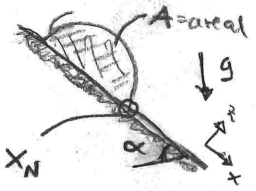
- (a) Similaritetsløsning
- (b) (Method of) characteristics
- (c) Linearisering - dispersjons relasjon
- (d) Skalering
- (e) numerisk løsning

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho g \sin \alpha}{3\mu} h^3 \right) = 0$$

(d) gravitasjons-strømning - skalering (H. Huppert (Cambridge), 1986)

$$\frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} h^2 \frac{\partial h}{\partial x} \sim \frac{h}{t} \sim \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} \frac{h^3}{x} \Rightarrow h \sim \left(\frac{\mu}{\rho g \sin \alpha} \frac{x}{t} \right)^{1/2} \Rightarrow \text{eksakt løsning} \rightarrow \text{sjekk!}$$

Plasserer en fluidblokk på et hellende plan




Følger punktet til neset $x_N = x_N(t)$ i tid \rightarrow spredning

$$\int_0^{x_N(t)} h dx = \int_0^{x(t)} \left(\frac{\mu}{\rho g \sin \alpha} \frac{x}{t} \right)^{1/2} dx = \frac{2}{3} \left(\frac{\mu}{\rho g \sin \alpha} \frac{1}{t} \right)^{1/2} x^{3/2} = A = \text{konst.}$$

$$x_N(t) \sim \left(\frac{9 \rho g \sin \alpha A^2}{4 \mu} \right)^{1/3} \cdot t^{1/3} \quad \left(\text{spredning av gravitasjons blokk} \right)$$

$\Rightarrow h = f \left(x - \underbrace{\frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} h^2}_{\text{hastighet}} t \right) \rightarrow$ method of characteristics \rightarrow implisitt løsnemet \rightarrow stable



① Overflatespenning - spredning av en dråpe



skalering $\rightarrow \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\gamma}{3\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right)$
 $\frac{h}{t} \sim \frac{\gamma h^4}{3\mu x^4} \Rightarrow h \sim \left(\frac{3\mu x^4}{\gamma t} \right)^{1/3}$

(1) Dråpe volum (areal) : $A = \int_0^{x_N} h dx = \left(\frac{3\mu}{\gamma} \right)^{1/3} t^{-1/3} \frac{3}{7} x_N^{7/3} \Rightarrow x_N \sim \left(\frac{A^3 \gamma}{\mu} t \right)^{1/7}$ (2D)

3D: $V = \int_0^{R(t)} 2\pi r \cdot h dr \sim R^2 \cdot h$

$V \sim R^2 \cdot \left(\frac{\mu R^4}{\gamma t} \right)^{1/3} \Rightarrow R(t) = \left(\frac{V^3 \gamma}{\mu} t \right)^{1/10}$

(Tanner's law)

Sjekk med eksponent!

Hva med overflatedynamikk som bølger?

Bølgetvilling i viskøse tynne filmer?

Film i gravitasjon \rightarrow linearisering $h = h_0 + \epsilon h'$

$h' = h'(x, t)$

$\epsilon \ll 1, h_0 = \text{konst.}$

$\frac{\partial h'}{\partial t} + \underbrace{\frac{\gamma h_0^2}{3\mu} \frac{\partial^3 h'}{\partial x^3}}_{\frac{dx}{dt} = u} = 0$

(ser bort i fra alle termer ϵ^2 og mindre)

$\frac{\partial h'}{\partial t} + u \frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \Rightarrow$ løsning $h'(x, t) = h(x - ut)$



Overflatespenning \rightarrow linearisert ; $\frac{\partial h'}{\partial t} + \frac{\gamma}{3\mu} h_0^3 \frac{\partial^4 h'}{\partial x^4} = 0$

Antar h' tar form som en forflyttende bølge;

$h' = a \cdot e^{i(kx + \omega t)} = a (\cos(kx + \omega t) + i \sin(kx + \omega t))$ $\cdot K = \frac{2\pi}{\lambda}$ (bølge nr.)

innsett får vi ; $i\omega \cdot a e^{i(kx + \omega t)} + \left(\frac{\gamma h_0^3}{3\mu} \right) (ik)^4 \cdot a e^{i(kx + \omega t)} = 0$ $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (frekvens)

$i^2 = -1$

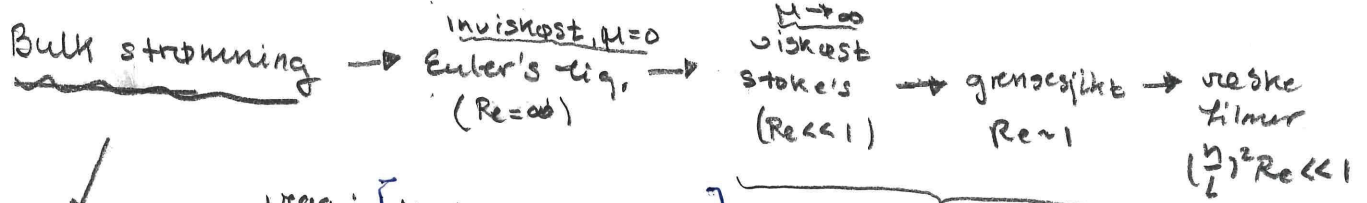
$\omega = \frac{\gamma h_0^3}{3\mu} \cdot k^4$

Vi ser at

$h' = a e^{ikx} \cdot e^{-\frac{\gamma h_0^3}{3\mu} k^4 t}$

- bølgen dempes med tid!
- korte bølgelengder/dempes veldig fort! $\lambda \ll \omega$
- Perturbasjoner

Overflatedynamikk

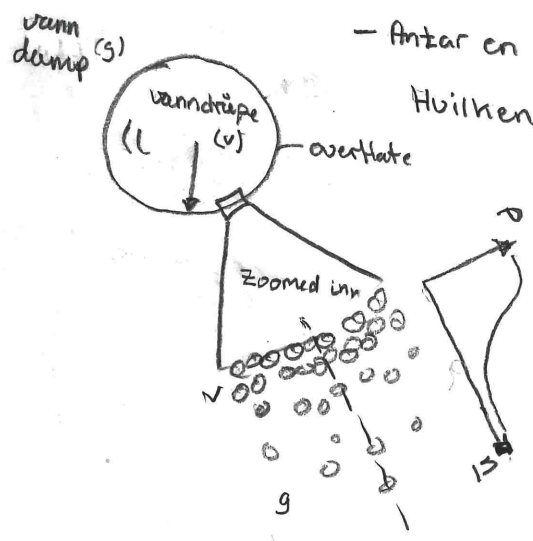


↓
grenseltingelser

vegg; $\left[\begin{array}{l} \underline{u} \cdot \underline{t} \neq 0 \text{ (slip)} \\ \underline{u} \cdot \underline{n} = 0 \text{ (ingen penetrasjon)} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} \underline{u} \cdot \underline{t} = \underline{u} \cdot \underline{n} = 0 \text{ (no-slip)} \\ \underline{\tau} \cdot \underline{n} = \text{konst (stress vegg)} \end{array} \right]$

+ definert/nøstighet ved vegg foreskrive

Overflatespenning

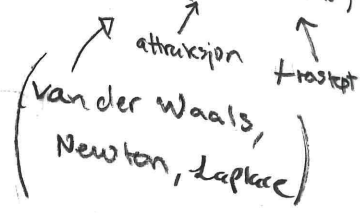


- Antar en drøpe med radius $R \rightarrow$ gitt volum $V \sim R^3$
Hvilken form tar drøpen?

Molekylært bilde:

Ved overflaten er $\nabla P \neq 0$, definert som max (∇P).
 \rightarrow overflatespenning generert av molekylær attraksjon
Vann molekylar "mister" partner for å danne bond ved gass siden \rightarrow netto kraft normalt $-\underline{n}$ på overflaten

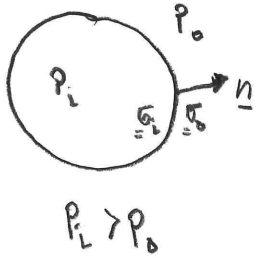
Beskrives ved molekylært potensial; $\Phi(r) = A/r^6 - r^{-12} B$
 \Rightarrow energi per flatenhet



Kontinuum;

sprang i P ved overflaten med en energikostnad
gitt av overflaten \equiv kapillar energi

I drøpen



sprang i stress ved overflaten

$[\underline{n} : \underline{\sigma} \cdot \underline{n}] = \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} |_{\text{in}} - \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} |_{\text{out}} \neq 0 \Rightarrow \Delta P \neq 0$ sprang i P på tvers av overflaten

\rightarrow direkte ingen strøpning!

Trykk differansen $\Delta P = f(r, \kappa) = -\gamma \kappa$

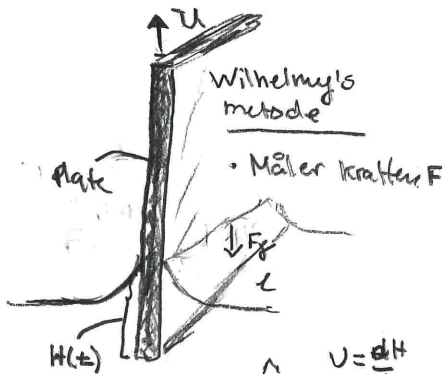
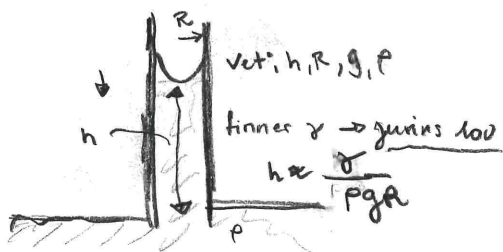
→ kurvaturen til overflaten

$[\gamma] = N/m = \text{overflatespennings koeff.}$

$[\kappa] = 1/m = \text{kurvaturen.}$

Huordan måle γ ?

kapillert rør



Effekt $\sim F \cdot v = \frac{d}{dt} (\gamma \cdot A) = \gamma \frac{dA}{dt}$

$\gamma \sim F/c$

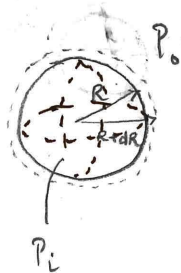
• måler F , har c .

kapillær bølger



- Genererer kapillær bølger
- Måler frekvens, bølglengde (ω) (λ) (neste uke!)

Young-Laplace lov - trykk sprang



$P_i > P_o$

Arbeidet av trykk + overflatespenning

$W = -P_i V + P_o V + \gamma \cdot A$

Endring i arbeid ved utvidelsen dR i likevekt $\Rightarrow dW = 0 \wedge dR \neq 0$

$dW = -P_i dV + P_o dV - \gamma dA = 0$

$P_i - P_o = \gamma \frac{dA}{dV} = \gamma \left(\frac{8\pi R}{4\pi R^2} \right) = \frac{2\gamma}{R} = \Delta P = \gamma \cdot \kappa$
lov

$[P] = -\gamma \kappa$
↑ trykk spranget

Sphær (3D); $\frac{1}{2R} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \text{gjennomsnittskurvatur}$

2D; $\frac{1}{R} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\infty} \right) = \kappa$

Skalering: Dripe med radius R .

$\frac{\text{gravitasjons kraft}}{\text{overflate kraft}} = \frac{\Delta \rho g R^3}{\left(\frac{\gamma}{R} \right) R^2} = \frac{\Delta \rho g R^3}{\gamma} = Bo = \text{Bond tallet}$

$Bo \ll 1 \rightarrow$ optiske driper
Kapillær lengde $\Rightarrow Bo = 1 = \frac{\Delta \rho g \ell^2}{\gamma}$
 $\ell = \left(\frac{\gamma}{\Delta \rho g} \right)^{1/2}$

$\frac{\text{viskøs kraft}}{\text{overflate kraft}} = \frac{(\mu \frac{v}{R}) \cdot R^2}{\left(\frac{\gamma}{R} \right) R^2} = \frac{\mu v}{\gamma} = Ca = \text{Kapillær tallet}$