Bølge bevegelse (inviskøst / friksjonsfritt, $\mu = 0$)

(i) Tyngdebølger – dypt vann → dispersive

(ii) Gruppe- og fase-hastighet

(iii) Kapillærbølger (dispersiv), gruntvannsbølger → <u>ikke</u> dispersive

fri overflater

(iv) Interne bølger, lydbølger → <u>ikke</u> dispersive

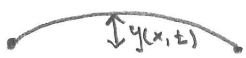
(v) Støt – kompressibelt (inviskøst), viskøse

- Bølge kan transportere momentum/energi (selv med liten massetransport)
{Lys, lyd, vann, elastiske}-bølger – involverer massetransport.

- Bølge → perturbasjon → bølge bevegelse – momentum/energi transport → tilbake stillende "treghet" → "overshoot"

Generell bølgebeskrivelse

Bølgeligningen $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$



c = bølgehastighet

$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$; T = stress, ρ = densitet

Løsning? $y = f(\underbrace{x - ct}_{\text{følger bølgen / referanse punkt}})$

Initialbetingelser + grensebetingelser

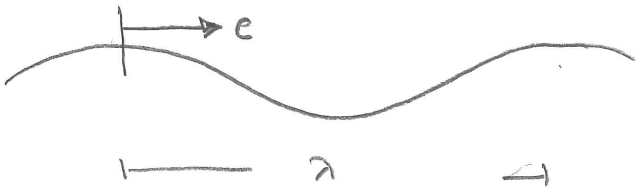
Posisjon; $y(x,0)$ $y(0,t)$

hastighet; $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0)$ + $y(L,t)$

Lineært problem, generell løsning; $y = A \cdot \cos(kx - \omega t)$

amplituden (A), bølge nummer (k), vinkel frekvens (ω)

fasen $= (kx - \omega t) = k(x - ct) =$ konst = "reisende" bølge



k = bølgenummer $[m^{-1}]$

λ = bølgelengde $= \frac{2\pi}{k}$ $[m]$

ω = vinkelfrekvens $[s^{-1}]$

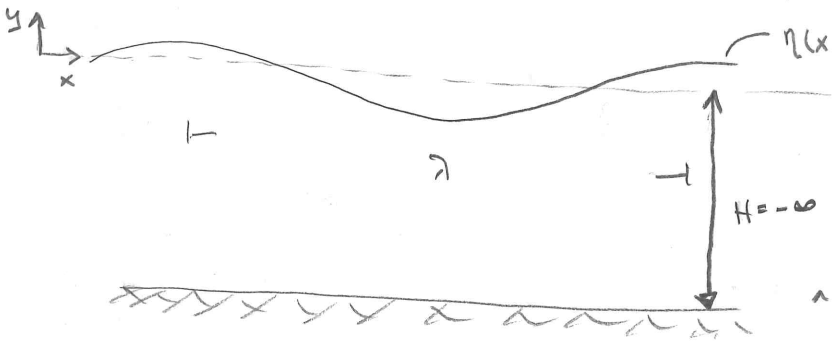
c = fasehastighet $[m/s]$

T = bølgeperiode $= \lambda/c$ $[s]$

Antar, $y = A\cos(kx - \omega t)$ i $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

$\Rightarrow \omega^2 = c^2 k^2$ gir $\omega = \pm ck \Rightarrow \underline{\pm c = \omega/k}$ (Dispersjons relasjon $c = f(k)$)

Bølger på overflater av dype vann ($\mu = 0$)



$\eta(x,t)$ = overflaten = y

$\frac{\lambda}{H} \ll 1$ (dypt vann)

$\wedge$ $\frac{\eta}{H} \ll 1$, har $H \to -\infty$

- Virvelfri to-dimensjonell friksjonsfri strømning; $\underline{u} = [u(x,y,t), v(x,y,t), 0]$

$$\underline{\omega} = \omega \underline{e_z} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \underline{0}$$

Definerer hastighetspotensialet: $\phi = \phi(x,y,t)$

$$\underline{u = \frac{\partial \phi}{\partial x}}, \quad \underline{v = \frac{\partial \phi}{\partial y}}$$

Masse bevarelse; $\nabla \cdot \underline{u} = \underline{\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0}$

Kinematisk grensebetingelse på overflaten $-\eta(x,t)$

Fluid partikkel på overflaten forlater den ikke!

Definerer (equipotensial flaten) $F(x,y,t) = y - \eta(x,t)$ der $\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \underline{u}\cdot\nabla F = 0$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\partial \eta}{\partial t} - u\frac{\partial \eta}{\partial x} + v = 0$$

$$(1) \quad \boxed{v = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u\frac{\partial \eta}{\partial x}} \quad \text{ved } y = \eta$$

material hastigheten til overflaten

flat: $\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$, $v = \frac{\partial \eta}{\partial t}$

stasj.: $\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$, $v = u\frac{\partial \eta}{\partial x}$

η = strømlinje

Momentum ligningene $(\mu = 0)$

Euler's ligning; $\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u}\cdot\nabla\underline{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g$

$$\left(= -\nabla\chi = -\frac{\partial}{\partial y}(gy)\right)$$

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \nabla\left(\tfrac{1}{2}u^2\right) + \underbrace{\cancel{(\nabla\times\underline{u})}}_{\text{virvelfritt}}\times\underline{u} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho} + \chi\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi) + \nabla\left(\tfrac{1}{2}(\nabla\phi)^2\right) = -\nabla\left(\frac{p}{\rho} + \chi\right)$$

Integrerer $\rightarrow$

- Eulers trykk lig.
- tidsavhengig Bernoulli

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{p}{\rho} + \chi = G(t)$$

Dynamiske / trykk grensebetingelsen ved η

$p(\eta, t) = p_0$ = atmosfeerisk trykk

$= 0$ (Konstant) $\Rightarrow$

absorberer $G(t)$ i ϕ $\quad (2) \quad \boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2\right) + g\eta = 0}$ ved $y = \eta$

$\phi = \phi + \int_0^t G(t)\,dt \;\wedge\; \nabla\phi = \underline{u}$ = uendret

Bølger med liten amplitude (lineær) teori?

$\Rightarrow$ $\eta(x,t)$, og u, v er små $\Rightarrow$ $u\frac{\partial \eta}{\partial x} \ll 1$

($\frac{\partial \eta}{\partial x}$ liten gradient)

(1) $v(x,\eta,t) = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t}\Big|_{y=\eta}$ $\rightarrow$ Taylor ekspansjon av v rundt $y=0$

$$\underline{v(x,\eta,t) = v(x,0,t)} + \underbrace{\eta \frac{\partial v(x,0,t)}{\partial y}}_{\ll} + O(\eta^2)$$

Kinematisk (linearisert) grensebetingelse; $\underline{\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t}}$, $y=0$ (1*)

Trykk grensebetingelse; $\underline{\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0}$, $y=0$ (2*) (samme prosedyre)
(linearisert)

(Lineariserte)
Dyptvannsbølger: $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$ (I)

Grensebetingelser: $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$, (bunnen) $y = -\infty$

$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$, $y=0$

$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -g\eta$, $y=0$

Ser etter bølgeløsning med: $\underline{\eta = A\cos(kx - \omega t)}$

Vi ser at $\phi = \int \frac{\partial \eta}{\partial t}\, dy = f(y)\sin(kx - \omega t)$

Insatt i (I) får vi; $\underline{f'' - k^2 f = 0}$ (kjent ODE)

generelle løsningen til f gitt av

$\underline{f = Ce^{ky} + De^{-ky}}$, med $k>0$ må $D=0$ siden $\lim_{y\to-\infty} f = 0$

Vi får da $\phi = c \cdot e^{ky} \cdot \sin(kx - \omega t)$ ∧ $f = ce^{ky}$, $\eta = A\cos(kx - \omega t)$

Bruker grensebetingelsene ved $y = 0$;

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{y=0} = -g\eta \rightarrow -C\omega \cancel{\cos(kx-\omega t)} = -A\cancel{\cos(kx-\omega t)} \cdot g$$

$$\underline{\omega C = Ag}$$

$$\left.\frac{\partial \eta}{\partial t}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{y=0} \rightarrow A\omega \cancel{\sin(kx-\omega t)} = Ck \cdot \cancel{\sin(kx-\omega t)}$$

$$\underline{A\omega = Ck}$$

Vi får;

$$\underline{\phi = \frac{A\omega}{k} e^{ky} \cdot \sin(kx - \omega t)}$$

Dispersjonsrelasjonen; $\boxed{\omega^2 = kg}$ fase hastigheten $\boxed{c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}}$

Bølgen er dispersiv dvs. hastigheten $c_p(k)$.
c_p funksjon av bølgelengden (størrelsen)

Liten amplitude?

(1) $\frac{\partial \eta}{\partial t} + u\frac{\partial \eta}{\partial x} = v\Big|_{y=0+\eta}$, Skalering gir $\frac{\partial \eta}{\partial t} \sim A \cdot \omega$

$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \sim A\omega \cdot (e^{ky} \cdot \sin(\ )) \sim A\omega$

$\sim A\omega \gg A\omega \frac{\partial \eta}{\partial x}$

$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \sim A\omega$

$\Rightarrow \underline{\frac{\partial \eta}{\partial x} \ll 1}$, liten gradient!

(2) $$\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)}_{\sim A^2\omega^2 = A^2 kg} + \underbrace{gk}_{gA} = 0$$

$\sim A^2\omega^2 = A^2 kg \ll gA$

$A \ll 1/k \Rightarrow A \ll 2\pi\lambda$, liten amplitude!

$$\underline{\frac{A}{2\pi\lambda} \ll 1}$$

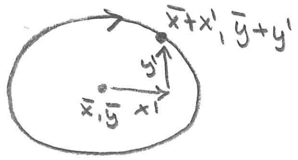
(Resultatet konsistent med forenklingene vi antok ved start)

Partikkel baner

Hastigheten finner vi via $u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = A\omega e^{ky} \cos(kx - \omega t)$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = A\omega e^{ky} \sin(ky - \omega t)$$

Partikkel banen om gjennomsnitts punktet $\bar{x}, \bar{y}$ med liten avik x', y'



$$\left.\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= A\omega e^{k\bar{y}} \cos(k\bar{x} - \omega t) \\ \frac{dy'}{dt} &= A\omega e^{k\bar{y}} \sin(k\bar{y} - \omega t) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{Integrasjon ;} \\ &x' = -A e^{k\bar{y}} \sin(k\bar{x} - \omega t) \\ &y' = \underbrace{A e^{k\bar{y}}}_{\text{radius}} \cos(k\bar{x} - \omega t) \end{aligned}$$

$\rightarrow$ sirkulære partikkelbaner med radius som reduseres $e^{k\bar{y}}$ ned i dypet

Trykk effekt i bølgen

Trykkmåler ved gitt dyp $\rightarrow$ perturbasjon / målbart?

$p' = p + \rho g y$ (perturbasjons trykket)

Bernoullie $\rightarrow$ $p' = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\rho A \omega^2}{k} e^{ky} \cdot \cos(kx - \omega t) = \underline{\rho g A \cdot e^{ky} \cdot \cos(kx - \omega t)}$

($\omega^2 = kg$)
disp. relasjon

Trykket avtar eksponensielt

Målbart? avhenger av dybden sensoren plasseres (og dypet H)

Hva med effekter av a) overflate spenningen?

b) dybden H?

a)

Kapillærbølger

Antar: små deformasjoner av overflaten, $\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \ll 1$.

$\Rightarrow$ lineariserte kurvaturen, $\underline{\kappa = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}}$

Mekanisk likevekt (Laplace lov)

$$\underline{p - p_0 = -\gamma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}}$$

Insatt i

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{\rho}(p - p_0) = 0$$

$$\underline{\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta - \frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0}$$ ved $y = 0$, $\eta = A\cos(kx - \omega t)$

Samme prosedyre som tyngdebølger, bytt $g \rightarrow g + \frac{\gamma}{\rho}k^2$

Vi får da; $\omega^2 = gk + \frac{\gamma k^3}{\rho}$

$$\underline{c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho}}}$$ tyngde-kapillær bølge

Hva dominerer gravitasjon vs. kappilæritet

$$\frac{g/k}{\gamma k/\rho} = \overbrace{\frac{\rho g}{\gamma k^2}}^{\text{Bond nr.!}} \ll 1 \rightarrow \text{kappilært}$$

$$\gg 1 \rightarrow \text{gravitasjon}$$

vann ($\gamma \approx 70 \cdot 10^{-3}$ N/m, $\rho = 10^3$ kg/m^3, $g \approx 10$ m/s^2) $\lambda = 2\pi/k$

$\rho g/\gamma k^2 = 1 \Rightarrow k = \sqrt{\rho g/\gamma} = 3{,}7\ \text{cm}^{-1} \Rightarrow \lambda_c \sim 1.7$ cm

$\lambda \ll \lambda_c \rightarrow$ kapillært

$\lambda \gg \lambda_c \rightarrow$ gravitasjon

b) Effekt av dypet

ved $y = -H$, $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$ → Samme prosedyre som tyngdebølger, ukesoppgave 3.1.

Vi får at $\omega^2 = g\kappa \tanh(\kappa \cdot H)$ ∧ $\tanh(x)$ = tangens hyperbolikus = $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (Rotmann)

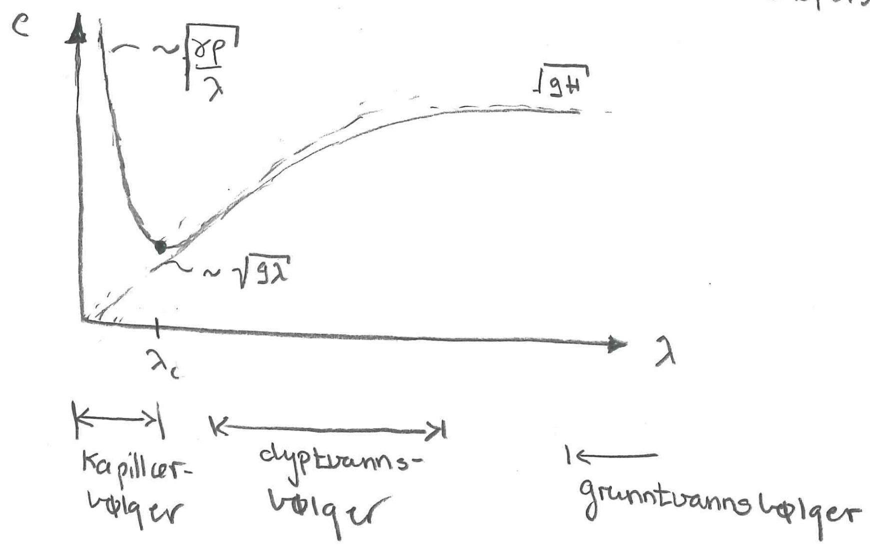
$c^2 = \frac{g}{k} \tanh(kH)$ ∧ $kH = \frac{2\pi H}{\lambda}$

ser at

$kh = \frac{2\pi H}{\lambda} >> 1$ → $c = \sqrt{g/k}$ (dyptvannsbølger)

$H/\lambda << 1$ → $\tanh(kh) \sim kH$ ⇒ $c = \sqrt{gH}$ (gruntvannsbølger ikke dispersive!)

Konsekvenser?

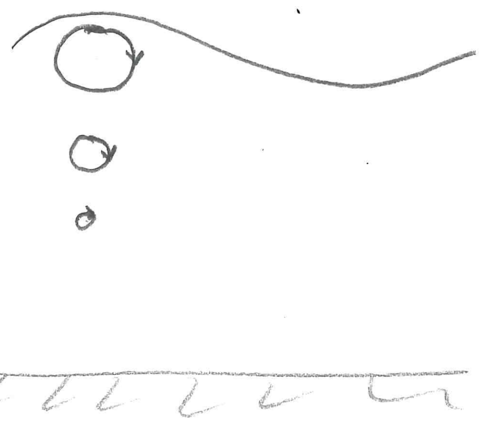


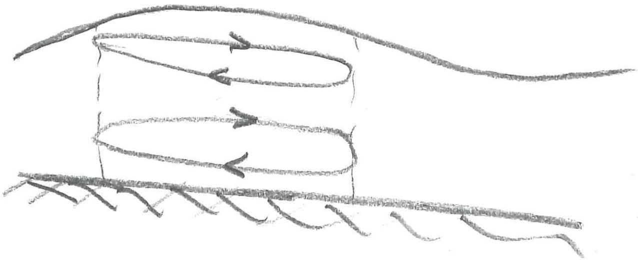
- Partikkel forflytning i bølgene

Eks. Fig 3.9

Dypt vann $\lambda/H >> 1$

gruntvann





Bølge dispersjon og gruppehastighet

c = Fasehastigheten $= \frac{\omega}{k}$. Hva om bølgene ikke er monokromatisk ? ($k \neq$ konstant) ?

Eks. Slippe en stein i et tjørn! Bølgetog, $\omega = \omega(k)$

(i) Bølgegrupper som forflyttes med hastighet $c_g = \frac{d\omega}{dk}$

(ii) Energien transporteres i bølgegruppa ved hastighet c_g

(iii) For å kontinuerlig observere bølger med $\lambda = 2\pi/k$, forflyttes med hastighet c_g

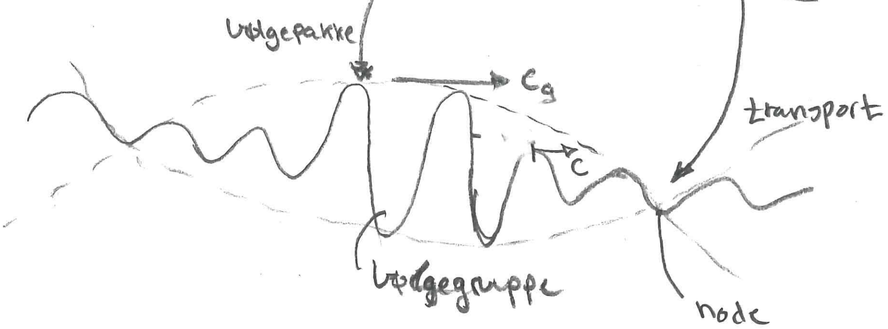
(i) To bølger med $k_1 \sim k_2$ og $\omega_1 \sim \omega_2 \rightarrow \eta = a(\cos(k_1 x - \omega_1 t) + \cos(k_2 x - \omega_2 t))$

$$\eta = a \cdot (\cos(k_1 x - \omega t) + \cos(k_2 x - \omega_2 t))$$

$$= 2a \cos[\tfrac{1}{2}(k_2 - k_1)x - \tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t] \cdot \cos[\tfrac{1}{2}(k_1 + k_2)x - \tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)]$$

$$= 2a \cos(\tfrac{1}{2}(\Delta k x - \Delta\omega t)) \cdot \cos(kx - \omega t)$$

$\wedge$ $\Delta k = k_2 - k_1$, $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$



Vi ser $c_g = \lim_{\Delta k \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}$ ..

Hva er c_g til tyngde-kapillær bølge ?

$c \neq c_g$ i det generelle tilfellet om ikke $\omega = ck$

$c > c_g \rightarrow$ bølger oppstår ved noden og går "gjennom" bølgegruppen $\rightarrow$
(fremover)

$c < c_g \rightarrow$ " " " $\leftarrow$ bakover

Dyptvannsbølger, $\omega = \sqrt{gk}$, $c = \sqrt{g/k}$, $c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}\sqrt{g/k} < c$

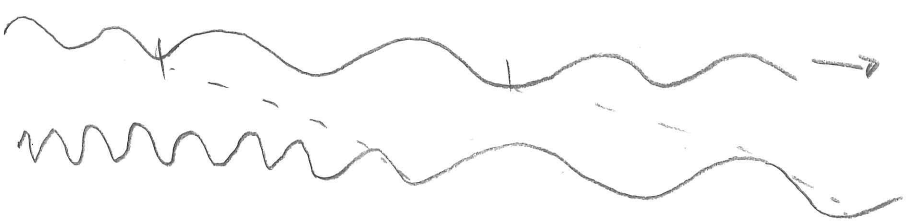
$\rightarrow$ gruppen er tregere enn individuelle bølgene

Kapillærbølger; $\omega = \sqrt{\gamma k^3/\rho}$, $c = \sqrt{\gamma k/\rho}$, $c_g = \frac{3}{2}\sqrt{\gamma k/\rho} > c$

$\rightarrow$ gruppen raskere enn individuelle bølgene

Dispersive bølger, $c \wedge c_g \neq 0$, ikke-dispersive $\frac{dc}{dk} = 0 \wedge c = c_g$

Bølgetog



t_1

$t_2 > t_1$

Generel beskrivelse, $\eta(x,t) = A(x,t)\, e^{i\theta(x,t)}$

..(reelle delen)

med $\theta(x,t)$ = fasefunksjonen
= bølge oscillasjonen.
$A(x,t)$ = amplituden

Bølge #, $k = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ $\wedge$ frekvens $\omega = -\frac{\partial \theta}{\partial t}$

Sinusbølge $\rightarrow$ lineær i x, t, k, ω $\rightarrow$ $\theta = kx - \omega t$. Generelt $k = k(t) \wedge \omega = \omega(t)$

dispersjons relasjonen

Ser umiddelbart at $\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \underbrace{\frac{d\omega}{dk}}_{c_g}\frac{\partial k}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial k}{\partial t} + c_g(k)\frac{\partial k}{\partial x}}_{\text{Partikkel derivert av k}} = 0 \Rightarrow$$

$k(x,t)$ = konst. dersom $u = c_g(k)$

løsning $k = f(x - c_g(k)t)$