Lyd bølger (bulk fluid) - Kompressibelt fluid

frekvens område (f):
flaggermus ~ 4k–100k Hz
barn/unge ~ 16–20k Hz
voksen ~ 16 ~ 15k Hz

Bølger → kommunikasjon - mennesker, dyr, insekter (mobil)
→ flyindustri - lydmuren!

Euler's lig. ($\mu = 0$)

Momentum: $\rho\left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}\right) = -\nabla p \quad \wedge \quad \rho = \rho(\underline{x}, t)$

Kontinuitet: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0$

Perfekt gass, $p = \rho^{\gamma} \quad \wedge \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$ = raten for spesifik varme

- Adiabatisk tilnærming
  - ingen tid for likevekt av temperatur (Laplace)
  (Newton → isoterm → feil!)

Antar en liten perturbasjon i det statiske fluidet

$\Rightarrow \underline{u} = \varepsilon \underline{u}_1$, $p = p_0 + \varepsilon p_1$, $\rho = \rho_0 + \varepsilon \rho_1$ $(\underline{u}_0 = 0, p_0, \rho_0)$

Lineariserer ligningen m.h.p. ε, dropper ε^2 størrelser og mindre

$$(\rho_0 + \cancel{\varepsilon \rho_1})\left(\varepsilon \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial t} + \cancel{\varepsilon^2 \underline{u}_1 \cdot \nabla \underline{u}_1}\right) = -\varepsilon \nabla p_1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\rho_0 \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1} \qquad (1)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon \underline{u}_1 \cdot (\rho_0 + \varepsilon \rho_1)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \underline{u}_1 = 0} \qquad (2)$$

$$\nabla \cdot (1) \wedge (2) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \underline{u}_1) = \underline{\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = \nabla^2 p_1}$$

Vi ser at $p \rho^{-\gamma} = \text{konst.} = p_0 \rho_0^{-\gamma}$

$$(p_0 + \varepsilon p_1)(\rho_0 + \varepsilon \rho_1)^{-\gamma} = p_0 \rho_0^{-\gamma}$$

$$\left(1 + \frac{\varepsilon p_1}{p_0}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon \rho_1}{\rho_0}\right)^{-\gamma} = \left(1 + \frac{\varepsilon p_1}{p_0}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon \rho_1}{\rho_0} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right) = 1 \Rightarrow \frac{p_1}{p_0} = \gamma \frac{\rho_1}{\rho_0}$$

Definerer lydhastigheten, $c = \left(\frac{\gamma P_0}{\rho_0}\right)^{1/2}$ $\Rightarrow$ $P_1 = \frac{P_0}{\rho_0} \gamma \rho_1 = \underline{c^2 \rho_1}$

Vi får trykkbølgeligningen $\underline{\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}}$, generell løsning
$P_1 = f(x-ct) + g(x+ct)$
mothøyre   venstre

Lyd = trykkbølger! $c_{luft} = 340\,m/s$ $(20°C)$
$c_{vann} \approx 1200\,m/s$

$P_1 = \underbrace{P_m}_{\text{maks perturbasjon}} \cos(k(x-ct)) \Rightarrow$ Ikke-dispersiv bølge, $c \neq f(k)$; endrer ikke form ved forplantning.
Kommunikasjon? $c = f(k)$?

<u>Når gjelder de lineære ligningene?</u>

Fra ligningene $\rightarrow$ $\rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial P_1}{\partial x}$ $\Rightarrow$ $u_1 = u_m \cdot \cos(k(x-ct))$
$= \underbrace{\left(\frac{P_m}{\rho_0 c}\right)}_{\text{maks hastighet}} \cdot \cos(k(x-ct))$

Linearisering = $\frac{\partial u}{\partial t} \gg u \frac{\partial u}{\partial x}$

$\cancel{k} u_m \cdot c \cdot \sin(\cancel{k}(x-ct)) \gg \underbrace{u_m \cos(k(x-ct))}_{\mathcal{O}(1)} \cancel{u_m k} \sin(\cancel{k}(x-ct))$

$\Rightarrow \underbrace{\frac{u_m}{c}}_{Ma = \text{Mach tallet}} \ll 1$ Strømhastigheten << lydhastigheten

Lydhastigheten funksjon av de kompressible egenskapene til mediumet/fluidet!

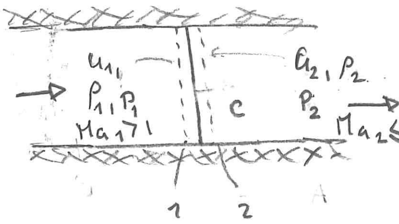
$Ma < 1$ – Subsonisk (underlyd)
$Ma \approx 1$ – transsonisk
$Ma > 1$ – Supersonisk (overlyds)
$Ma \gg 1$ – Hypersonisk

Hva med bølger som har diskontinuerlige "egenskaper" – støt?
$Ma > 1 \rightarrow$ Sjokkbølger!!

Sjokkbølger – diskontinuerlig ρ, P, u !

– Analogi med biltrafikk !

Kompressibelt 'plant' sjokk



$u_2 \leq u_1$
$\rho_2 \geq \rho_1$
$P_2 \geq P_1$

Over sjokket må vi ha balanse i;

Kontinuitet; $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$ (i)

Momentum; $P_1 + \rho_1 u_1^2 = P_2 + \rho_2 u_2^2$ (ii)

Energi; $h_1 + \frac{1}{2} u_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} u_2^2$

$\wedge$ $h = c_p T = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho R} = \underline{\frac{\gamma P}{(\gamma-1)\rho}}$ (perfekt gass)

(varmekapasitet: c_p)

$$\frac{\gamma P_1}{(\gamma-1)\rho_1} + \frac{1}{2} u_1^2 = \frac{\gamma P_2}{(\gamma-1)\rho_2} + \frac{1}{2} u_2^2$$

$$\frac{c_1^2}{\gamma-1} + \frac{1}{2} u_1^2 = \frac{c_2^2}{\gamma-1} + \frac{1}{2} u_2^2 \quad \text{(iii)}$$

Termodynamikkens 2. lov.
Entropien øker $\rightarrow \sim \log(P\rho^{-\gamma})$

$\Rightarrow \underline{\frac{P_1}{P_2} < \frac{\rho_1^\gamma}{\rho_2^\gamma}}$

(i) – (iii) $\rightarrow$ 3 lig. + 3 ukjente (antar u_1 kjent)

Med litt algebra
: Rankine – Hugoniot relasjonene

(Regneoppgave)

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(Ma_1^2 - 1)$$

$$Ma_2 = \frac{(\gamma-1) Ma_1^2 + 2}{2\gamma Ma_1^2 + 1 - \gamma}$$

(Bernoulli funker ikke i sjokket, dissip. T↑)

$+ \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = f(\gamma, Ma_1)$

$\frac{T_2}{T_1} = f(\gamma, Ma_1)$

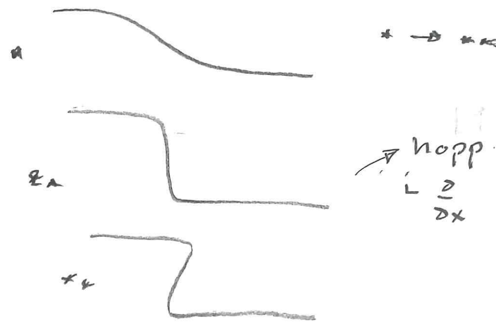
For plane sjokk har vi

I) strømningen inn er <u>supersonisk</u>

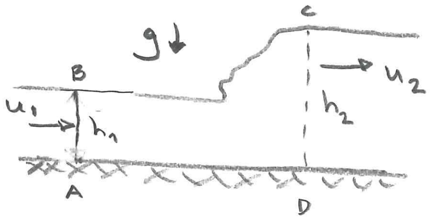
II) strømningen ut er <u>subsonisk</u>

III) P, ρ <u>øker</u> gjennom sjokket fra 1 til 2

Sjokk ved overflater – hydraulisk hopp
(inkompressibelt)



tynn væskefilm → vannstråle på en vegg



• statisk sjokk

(i) Konservering av masse

(ii) ingen momentum tap

(iii) energi tap (dissipasjon)

$$Q = \text{Konst} = h_1 u_1 = h_2 u_2 \qquad (1)$$

momentum fluksen = konst

$$\int_0^{h_1} P_1 \, dy + \int_0^{h_1} \rho u_1^2 \, dy = \int_0^{h_2} P_2 \, dy + \int_0^{h_2} \rho u_2^2 \, dy \qquad \text{(impuls-lig.)}$$

(trykk kraft på flaten, hydrostatisk $P = \rho g (h - y)$)

$$\int_0^{h_1} \rho g (h_1 - y) \, dy + \underbrace{\rho u_1^2 \cdot h_1}_{\rho Q u_1} = \int_0^{h_2} \rho g (h_2 - y) \, dy + \underbrace{\rho u_2^2 h_2}_{\rho Q h_2}$$

$$\frac{g h_1^2}{2} + Q u_1 = \frac{g h_2^2}{2} + Q u_2 \qquad (2)$$

$u_1 = Q/h_1$, $u_2 = Q/h_2$ $\Rightarrow$ $\frac{g}{2}(h_1^2 - h_2^2) = Q^2 \left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1} \right)$

$$\Rightarrow \quad \frac{g}{2}(h_1 + h_2)\cancel{(h_1 - h_2)} = Q^2 \left(\frac{\cancel{h_1 - h_2}}{h_2 h_1} \right)$$

$$\frac{1}{h_1^2} \cdot \Big| \quad \frac{h_2}{h_1^2}(h_1 + h_2) = \frac{2Q^2}{g h_1^3} = 2 F_{r_1}^2$$

$\wedge$ F_{r_1} = Froude nr $= \frac{u_1}{\sqrt{g h_1}} = \frac{Q}{(g h_1^3)^{1/2}}$

$$\frac{h_2}{h_1} + \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 - 2 F_{r_1}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + 8 F_{r_1}} \right)$$

Superkritisk strømning → $F_{r_1} > 1$, $h_2/h_1 > 0$ hopp i film høyde over sjokket

$h_2/h_1 < 1$ for $F_{r_1} < 1$ gyldig?

Energien

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \left(\frac{\rho u_2^2}{2} + g h_2 \right) - \left(\frac{\rho u_1^2}{2} + g h_1 \right) \approx \frac{-g (h_2 - h_1)^3}{4 h_1 h_2}$$

$h_2 < h_1 \Rightarrow \Delta E > 0$
bryter med termodyn. 2 lov!