

Stabilitet av fluid strømmer

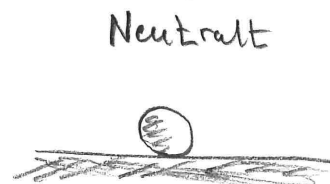
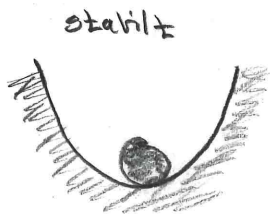
Noen instabile strømninger vi har observert:

- Transisjon til turbulens → laminær strømning → turbulens
(kontinuerlige strømninger) ("Kaotisk") (sterkt uktet) i 2D
- Orr-Sommerfeld ligninger
- Konveksjon i stekepannen → tyngde vs termisk diffusjon viskositet - Rayleigh-Bernard instabilitet
- Dråpe generering i fra kjøkkenkran → destabilisering av overflatespenning - Rayleigh-Plateau instabilitet
- Konvektive ruller i skyene → stratifisering vs. skjærspenning - Kelvin-Helmholtz instabilitet

Stabilitets analyse - respons til forstyrrelser

Perturbasjon → instabilitet → absolutt
 → stabil → ikke lineært

Kule i forskjellige geometrier:



Verktøy → lineær stabilitets teori → egenverdi problem

Generell beskrivelse av forstyrrelsen

$$u(x, t) = \hat{u}(y) e^{ikx + imz + \sigma t}$$

$\hat{u}(y)$ = kompleks amplitude
 $[k, m] = \text{reelle}, \geq 0$

Reelle delen \rightarrow fysiske kvantiteter (imaginer del forenkler algebra)
I stede for trigonometriske funksjoner

$$\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$$

$\sigma_r < 0$, stabilt

$\sigma_r = 0$, neutralt stabilt

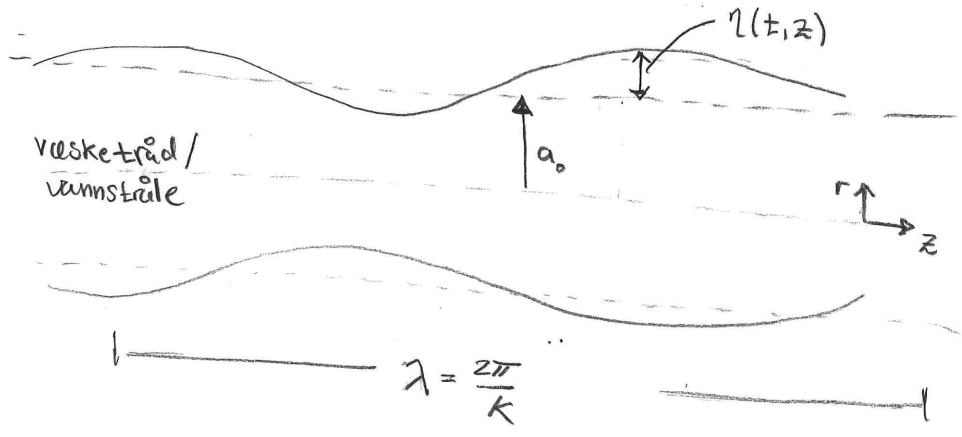
$\sigma_r > 0$, instabilt

\rightarrow Fourier komponentene / normal mode analyse

$\sigma_r = 0$, marginal stabilitet dvs. grensen mellom stabilt/instabilt
(stasjoner strømning)

Rayleigh - Plateu instabiliteten (overflatespenning)

Akse symmetri \rightarrow Sylinderiske koord.



Radiusen, $a = a_0 + \eta(t, z)$

$$\eta = \eta_0 e^{(\beta t + ikz)}$$

\uparrow
forstyrrelse

β = vekst raten

k = bølge nummer av forstyrrelsen

Antar forstyrrelse av fluid tråden

$$u_r = R(r) e^{(\beta t + ikz)}$$

$$u_z = Z(r) e^{(\beta t + ikz)}$$

$$P = \cancel{P_0} + \frac{\sigma}{a_0} + P(r) e^{(\beta t + ikz)}$$

↑
overflate
spenning

} nye variabeler
(1)

lineariserer Euler's ligninger (ser bort fra ikke-lineære effekter)
kommer

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \quad ; \quad \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (2)$$

Kontinuitet: $\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) = 0 \quad (3)$

Braker variablene i (1) i (2)

$$R(r) \cdot \beta \cdot \cancel{e^{(\beta t + ikz)}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P(r)}{\partial r} \cancel{e^{(\beta t + ikz)}} \quad (**)$$

$$; Z(r) \beta \cdot \cancel{e^{(\beta t + ikz)}} = -\frac{1}{\rho} ik P(r) \cancel{e^{(\beta t + ikz)}} \quad (**)$$

(1) i (3)

$$ik Z(r) \cancel{e^{(\beta t + ikz)}} + \frac{R(r) \cancel{e^{(\beta t + ikz)}}}{r} + \frac{\partial R(r)}{\partial r} \cancel{e^{(\beta t + ikz)}} = 0 \quad (***)$$

bytte med R(r)

$$\frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial r} (***) = \frac{\beta}{ik} \frac{\partial Z(r)}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P(r)}{\partial r}$$

insatt i (***) $R(r) \cancel{\beta} = \frac{\cancel{\beta}}{ik} \frac{\partial Z(r)}{\partial r}$

$$\frac{\partial}{\partial r} (***) = ik \frac{\partial Z(r)}{\partial r} = -\frac{\partial R(r)}{\partial r} \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} R(r) - \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2}$$

$$-k^2 R(r) = -\frac{\partial R(r)}{\partial r} \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} R(r) - \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2}$$

$$\boxed{r^2 \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{\partial R(r)}{\partial r} \cdot r - R(r) (k^2 r^2 + 1)} = 0 \rightarrow \text{modifiserte Besselt ligning.}$$

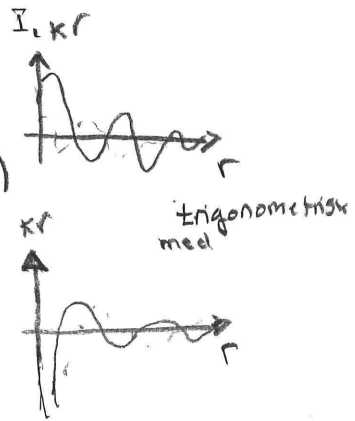
Kjent løsning på den ordinære diff. ligningen

$$R(r) = C_1 I_1(kr) + C_2 I_2(kr)$$

Bessel funksjon
Type 1

Type 2

Type 1
(sum av funksjoner)



Grensebetingelser

$$r=0, \underline{u} = \text{endelig} \wedge I_2(kr) \rightarrow -\infty, r \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \underline{C_2 = 0}$$

$$R(r) = C_1 I_1(kr)$$

Linearisert kinematisk grensebetingelse ved overflaten

$$u_r = \frac{\partial \eta}{\partial z} \Big|_{r=a_0} = \frac{\partial}{\partial z} (\eta_0 e^{(\beta t + kz)}) = \eta_0 \beta e^{(\beta t + kz)} = R(a_0) e^{(\beta t + kz)} = C_1 I_1(ka_0) e^{(\beta t + kz)}$$

$$\Rightarrow \underline{C_1 = \frac{\eta_0 \beta}{I_1(ka_0)}}$$

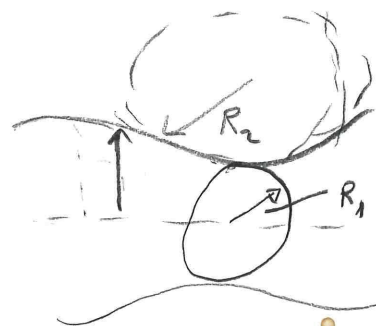
$$\wedge \underline{R(r) = \frac{\eta_0 \beta}{I_1(ka_0)} I_1(kr)}$$

Euler's ligning gir trykk-delen (langs-r) $\hat{I}_1(kr)$

$$P(r) = \int_0^r -\rho \beta R(r) dr = -\frac{\beta^2 \eta_0 \rho}{k} \frac{\int_0^r I_1(kr) d(kr)}{I_1(ka_0)}$$

$$\underline{P = P_0 + \frac{\sigma}{a_0} - \frac{\beta^2 \eta_0 \rho}{k} \hat{I}_1(kr) \cdot e^{(\beta t + kz)}}$$

Ved overflaten \rightarrow Kraft balanse, $P = P_0 + \frac{\sigma}{R_1} + \frac{\sigma}{R_2}$



$$R_1 = a_0 + \eta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R_1} = \frac{1}{a_0 + \eta} \stackrel{\text{Taylor rekke}}{\approx} \frac{1}{a_0(1 + \frac{\eta}{a_0})} \stackrel{\text{Taylor rekke}}{\approx} \frac{1}{a_0} \left(1 - \frac{\eta}{a_0} + \left(\frac{\eta}{a_0}\right)^2 \right) + \text{h.o.t.}$$

$$\approx \frac{1}{a_0} - \frac{\eta}{a_0^2} = \frac{1}{a_0} \left(1 - \frac{\eta}{a_0} e^{(\beta t + i k z)} \right)$$

Små perturbasjoner $\Rightarrow \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2 \ll 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_2} = - \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = \underline{k^2 \eta_0 e^{(\beta t + i k z)}}$$

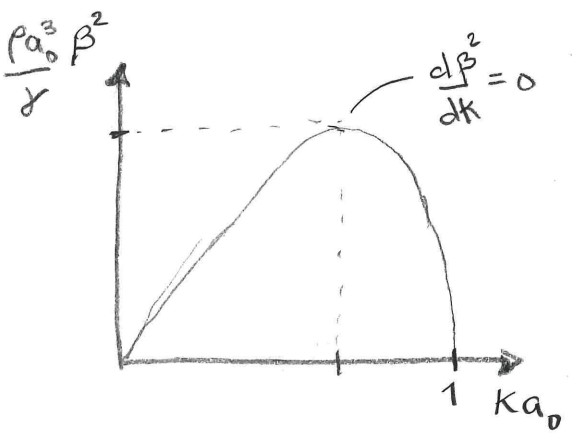
Insatt for trykk balansen ved overflaten;

$$\cancel{p_0} + \frac{\cancel{\gamma}}{a_0} - \frac{\gamma_0 \rho \beta^2}{\kappa} \cancel{I_1(k a_0)} \cdot \cancel{e^{(\beta t + i k z)}} = \cancel{p_0} + \frac{\cancel{\gamma}}{a_0} - \frac{\gamma \eta_0}{a_0^2} e^{(\beta t + i k z)} + \gamma k^2 \eta_0 e^{(\beta t + i k z)}$$

dispersions-relasjon

$$\beta^2 = \frac{\kappa}{\gamma_0 \rho I_1(k a_0)} \cdot \left(\frac{\gamma \eta_0}{a_0^2} - \gamma k^2 \eta_0 \right) = \frac{\gamma \kappa}{\rho I_1(k a_0) a_0^2} \left(1 - (a_0 k)^2 \right)$$

Forstyrrelsen vokser for $\beta^2 > 0 \Rightarrow k a_0 = \frac{2\pi a_0}{\lambda} < 1, 2\pi a_0 < \lambda$



$$\left(\frac{\rho a_0^3}{\gamma} \right) \beta^2 = \frac{\gamma_0 k (1 - (a_0 k)^2)}{I_1(k a_0)}$$

Forstyrrelsen må ha en utbredelseslengde større enn omkretsen for instabilitet

Raskeste voksende måte = $\frac{d\beta^2}{dk} = 0 \Rightarrow k a_0 \sim 0.7$
 $\lambda_{\max} \sim 9 a_0$

Når bryter fluidtråden opp i dråper? Hvor stor er dråpene?

→ Raskest voksende mode $\Rightarrow \beta_{\max}^2 \approx \frac{0.12 \gamma}{\rho_0 a_0^3} (1 - 0.47) \approx \frac{\gamma K}{2 \pi^2 (k r_0 a_0^2)}$

$\eta = \eta_0 e^{\beta t + i k z}$
 $\approx \log\left(\frac{a_0}{\eta_0}\right) \approx \beta t_B$

\uparrow
 $a_0 = a_0 + \eta$

$t_B \approx \frac{1}{\beta} \approx 3 \cdot \left(\frac{\rho_0 a_0^3}{\gamma}\right)^{1/2}$ (tid for dråpe generering)

Lengden der dråpen skapes (fra inløpet), $u_i =$ inløpshastighet

$L \approx \frac{u_i}{\beta} \approx 3 u_i \left(\frac{\rho_0 a_0^3}{\gamma}\right)^{1/2}$

Stabilitets analyse \rightarrow matematisk verktøy \rightarrow stabil vs. instabil

- Forklarer store tilstanden etter instabiliteten har utviklet seg

Fra orden til kaos

Kaos:
Irregulær struktur med store fluktasjoner

Matematisk kan selv "enkle" ligninger generere ikke-periodisk struktur

Lorenz modell (termisk modell i roterende annulus) $(\dot{\cdot}) = \frac{d}{dt}$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y-x) \\ \dot{y} &= \Gamma x - y - xz \\ \dot{z} &= -bz + xy \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \sigma, \Gamma, b &= \text{konstanter} \\ \Gamma < 0 &\Rightarrow \text{stasjonær løsning } x=y=z=0 \end{aligned}$$

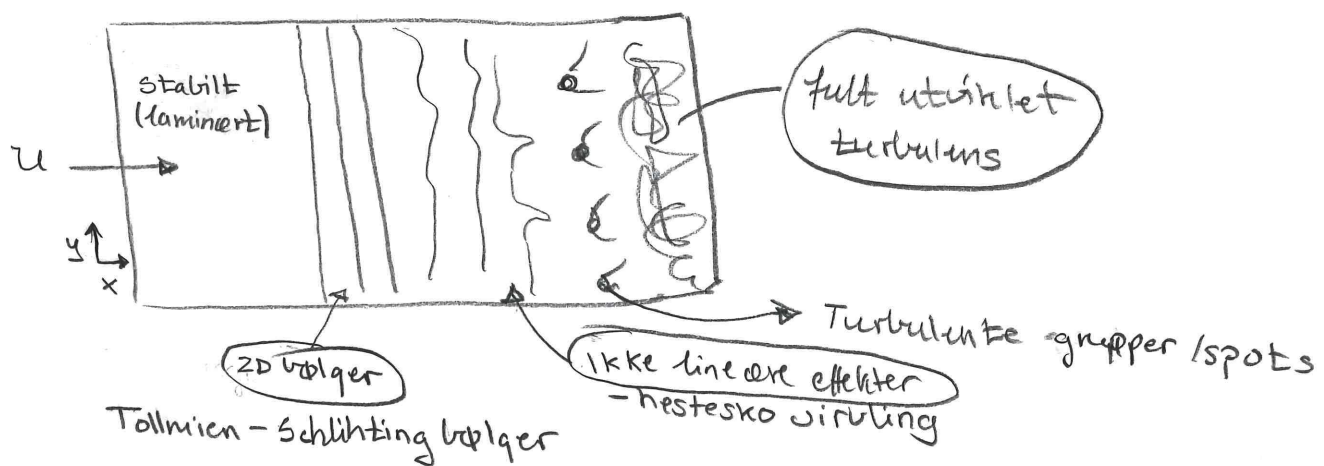
$\Gamma > 0 \rightarrow$ oscillatorisk/kaotisk løsning, \rightarrow ikke gjennkjennbar struktur.

Små endringer i initial verdier \rightarrow stor endring i resultatene!

Turbulens klassisk eksempel på "kaotisk" strømning.

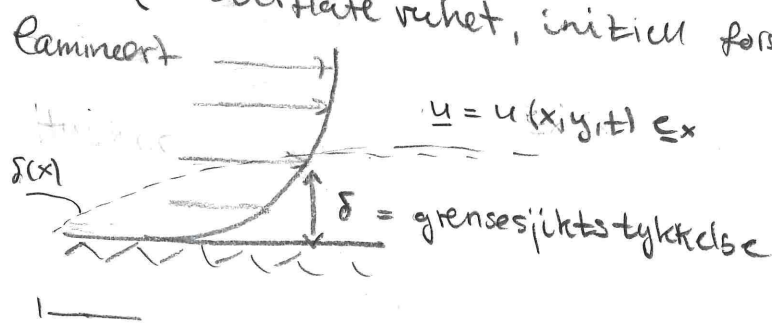
Fra ordnet/reguler tilstand til turbulens

Fluid strøm over en flat plate



- løsning på lineær stabilitets analyse (Orr-Sommerfeld's ligninger)
- raskeste voksende moden er i 2D

Overgangen til turbulens avhenger av Reynolds tallet til grensesjiktet (+ overflate ruhet, initial forstyrrelse ...)



stasjonær Navier-Stokes (ingen trykk gradient)

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\Rightarrow \rho \frac{u^2}{x} \sim \frac{\mu u}{\delta^2}$$

$$\delta \sim \left(\frac{\nu x}{u} \right)^{1/2} \rightarrow \delta \text{ øker med } x \text{ langs platen}$$

(Blasius løsning)

Overgang til turbulens når;

$$Re_\delta \approx 500 = \frac{u \delta}{\nu} = \underbrace{\left(\frac{u x}{\nu} \right)^{1/2}}_{Re}$$

$$\Rightarrow \underline{Re \sim 2.5 \cdot 10^5} \quad (\text{Effektivt Reynolds tall } \rho \delta \text{ for skala})$$



Hvor transporteres energien?

Vers fra Lewis Fry Richardson (1922)

"Big whorls have little whorls
which feed on their velocity,
And little whorls have lesser whorls,
And so on to viscosity."



Kaskade: virvling/eddies

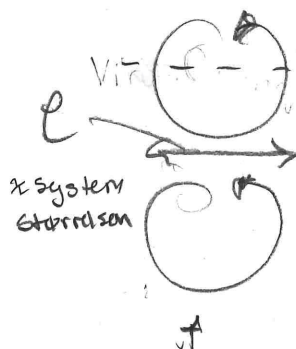
→ energi

Innen utviklet turbulens defineres ofte

hastigheten ; $u = \bar{u} + u'$

↑
Kontinuerlig middlet
hastighet

↑
hastighets
fluktasjoner



store virvlet
høy kinetisk energi

energi transport
↑
energien konsumeres/
dissiperes.

$u_c =$ endring/variasjon i hastighet

u_c endres mye over ℓ .

u_c endres lite over en tid $\ll \frac{\ell u_c}{c}$

• Energien transporteres alltid fra store til små virvler
Aldri motsatt retning/rekkesfølge.

Reynolds tallet for virvel med størrelse $\lambda \sim Re_\lambda = \frac{u_\lambda \lambda}{\nu}$

$\Rightarrow Re_\lambda \gg 1$
→ zregnet

$Re_\lambda \ll 1$
→ viskøst

gjenomsnittlig
Dissipasjonen av energi (energi / (masse · tid))

$\epsilon [m^2/s^3]$

→ store "eddies" med ρ, ℓ, u_c

Dimensjonsanalyse: $\epsilon \sim \frac{u_c^3}{\ell}$

$Re_\lambda = \frac{u_c \ell}{\nu}$

(store virvler/
eddies)

Kvalitativt kan strömningen defineras av "turbulent viskositet" ν_t

(dim. anal. d.a.) $\nu_t \sim \epsilon u_c \Rightarrow \frac{\nu_t}{\nu} \sim Re \Rightarrow \epsilon \sim \nu_t \left(\frac{u_c}{\ell}\right)^2$

ber på en liten lokal del i strömningen med virvlingstorrelse $\lambda < \ell$

Turbulente hastigheten för virvling $\lambda \gg \lambda_0$, med hastighet u_λ

(d.a.) $\Rightarrow \nu_{t,\lambda} \sim u_\lambda \lambda \Rightarrow \epsilon \sim u_\lambda \lambda \left(\frac{u_\lambda}{\lambda}\right)^2 \sim \frac{u_\lambda^3}{\lambda}$

("mellomstor" virvel)

$u_\lambda \sim (\epsilon \lambda)^{1/3}$

Hva med den lille skalan λ_0 ?

längdskala gitt av $\lambda_0 \sim \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4} = \left(\frac{\nu^3 c}{u_c^3}\right)^{1/4} \Rightarrow \lambda_0 \sim \ell / Re^{3/4}$

$Re_{\lambda_0} = \frac{u_{\lambda_0} \lambda_0}{\nu} = 1 \Rightarrow u_{\lambda_0} = \frac{\nu}{\lambda_0} = \frac{\nu}{\ell} Re^{3/4} = \frac{u_c}{Re^{1/4}}$

(dissipasjonen när viskositet = trygghet)

Kinetisk energi i virvlar (per masse)

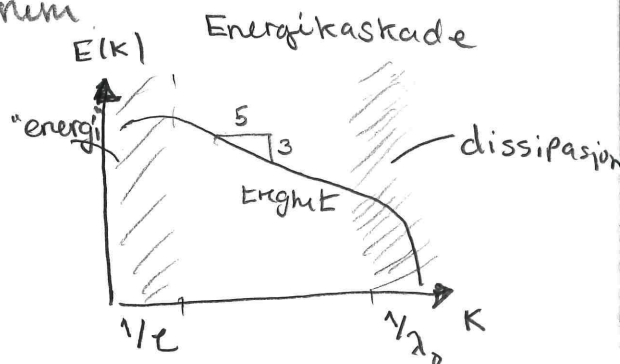
$E \sim u_\lambda^2 \lambda = \epsilon^{2/3} \lambda^{5/3} \sim \lambda^{-1/k} \quad k = \text{värdenummer}$

$\epsilon^{2/3} k^{-5/3}$ - Kolmogorov-Obukhov's energi spektrum

$\lambda \sim \ell \rightarrow$ energi området

$\lambda \approx \lambda_0 \rightarrow$ dissipations området

$\lambda_0 < \lambda < \ell \rightarrow$ trygghets området



Oppsummering Fluid dynamikk

- Dimensjonsanalyse / skalering
 - dimensjonsløse tall Π -teorem
 - estimere dynamikk / oppførsel fra ligningene (dynamisk similaritet)
- Friksjonsfri strømning - løft / løanda effekten
 - $Re = \infty$
 - Bernoulli's teorem } gyldig?
 - strøm / potensial funksjon } Potensial strømning
 - Komplekse hastighets pot. } Når gyldig?
- Veldig viskøs / strømning
 - Stokes $Re = 0$
 - rverilighet, symmetri, instantant (tidsuavhengig) } karakteristikk
 - konsekvens for summing?
 - strømfunksjon
- (Grensesjikt) Enkle viskøse profiler
 - $Re \sim 1$
 - grensesjikt (skalering)
 - hastighetsprofiler / ~~med~~ foranklinger; $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, $u \cdot \nabla u = 0$, $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$
- overflater
 - overflatespenning
 - tynne filmer, skalering, grensektingelser } geometri (dyttvanns-)
 - løpløper, grensektingelser
 - støt og kompressibilitet
- Stabilitet
 - analyse
 - transisjon