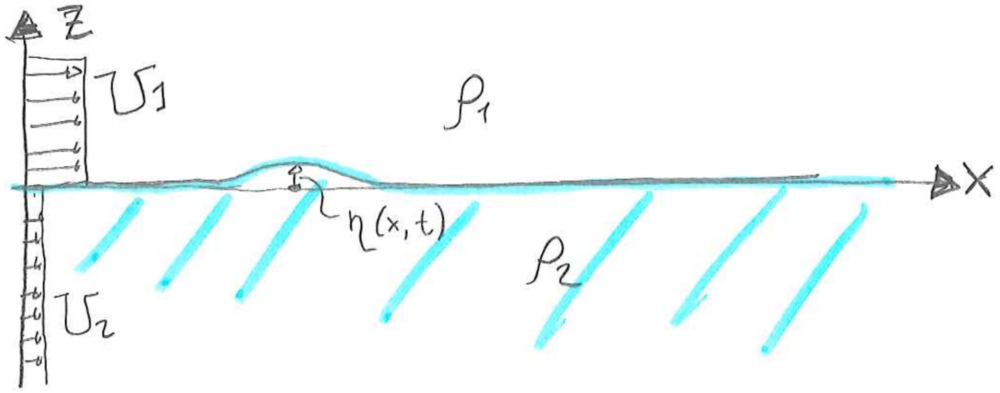
Kelvin-Helmholtz-instabilitet

Vind blåser over et blikkstille hav. Etter en stund dannes det bølger. Hvorfor?



Vi ser på en liten forstyrrelse på overflaten $\eta(x,t)$. I utgangspunktet er $\eta(x,t) = 0$ over alt, men noe skaper en mikroskopisk endring, $\eta \approx \varepsilon$. Vil denne vokse? Ja, i følge Kelvin-Helmholtz instabilitet som vi nå skal se på.

Vi starter uten virvling og antar at Kelvins sirkulasjonsteorem kan brukes (ingen viskositet) slik at vi har null virvling til en hver tid. Dermed kan vi bruke potensialteori i hvert lag

forstyrrelsen

$$\tilde{\Phi}_1 = U_1 x + \phi_1$$

$$\tilde{\Phi}_2 = U_2 x + \phi_2$$

utgangspunktet

Ligninger

- Feltligning: $\nabla^2 \tilde{\Phi}_{1,2} = 0$ og $\nabla^2 \phi_{1,2} = 0$

$\phi_1 \to 0$ når $z \to \infty$, $\phi_2 \to 0$ når $z \to -\infty$

- Kinematisk randbetingelse på $z = \eta(x,t)$:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + (U_1 + u_1)\frac{\partial \eta}{\partial x} + w_1 \frac{\partial \eta}{\partial z}$$

for lag 1, samme for lag 2. Vi lineariserer til $z=0$ og neglisjerer kvadratiske ledd:

lag 1: $$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{ved } z=0$$

lag 2: $$\frac{\partial \phi_2}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{ved } z=0$$

- Dynamisk randbetingelse ved $z = \eta(x,t)$:

Trykket i lag 1 er det samme som i lag 2 ved $z = \eta(x,t)$. Dette fordi vi antar at vi ikke har noen overflatespenning. Dynamisk Bernoulli for lag 1:

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \tilde{\Phi}_1)^2 + \frac{\tilde{p}_1}{\rho_1} + gz = C_1$$

Standard argumenter om å trekke C_1 inn i $\tilde{\Phi}_1$ og sette $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2$ gir

$$\rho_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{\rho_1}{2}\left[(U_1+u_1)^2 + w_1^2\right] + \rho_1 g \eta =$$

$$\rho_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{\rho_2}{2}\left[(U_2+u_2)^2 + w_2^2\right] + \rho_2 g \eta$$

For forstyrrelsen:

$$\frac{\rho_1}{2} U_1^2 = \frac{\rho_2}{2} U_2^2$$

Dette brukes her

lineariserer:

$$\rho_1 \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + g\eta\right]_{z=0} = \rho_2 \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + g\eta\right]_{z=0}$$

Vi antar nå $\eta = a e^{ik(x-ct)}$

Der $\omega = kc$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ← bølgelengden $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ← Perioden

med de antakelsene vi har gjort om feltligningen får vi da

$$\phi_1 = A e^{-kz} e^{ik(x-ct)}$$

$$\phi_2 = B e^{kz} e^{ik(x-ct)}$$

Begge disse går mot null når man beveger seg bort fra overflaten (opp eller ned).

Vi bruker de kinematiske grensebetingelsene for å finne A og B. Innsetting i ligningene gir

$$A = -i(U_1 - c)a$$
$$B = i(U_2 - c)a$$

Vi kan bruke dette og sette inn i den dynamiske grensebetingelsen og finne et uttrykk for c (dispersjonsrelasjonen)

$$c = \frac{\rho_2 U_2 + \rho_1 U_1}{\rho_2 + \rho_1} \pm \sqrt{\frac{g}{k}\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} - \rho_1 \rho_2 \left(\frac{U_1 - U_2}{\rho_2 + \rho_1}\right)^2}$$

Vi kan få en imaginær c og dermed potensielt et ustabilt ligningsett hvis uttrykket under rottegnet er negativt, altså hvis

$$\boxed{g(\rho_2^2 - \rho_1^2) < k \rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2}$$

Velger vi en liten bølgelengde λ får vi en stor k og dermed vil det være ustabilt hvis $U_2 \neq U_2$ med korte bølger som vokser seg uendelig høye.