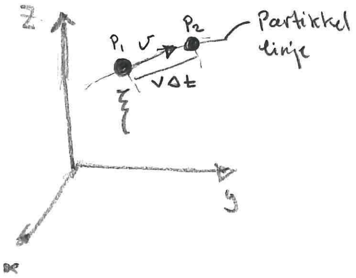
14/12/2015

Geometrien av bevegelse



etikett/label

$\underline{x} = \underline{x}(\underline{\xi}, t)$ — material koordinat

$\underline{\xi} = \underline{\xi}(\underline{x}, t)$ — rom koordinat

posisjon

$$f(\underline{x}, t) = f(\xi(x,t), t)$$

└ rom beskrivelse — fix punkt/laboratorie referanse; Euler's beskrivelse

$$f(\underline{\xi}, t) = f(\underline{x}(\underline{\xi}, t), t)$$

└ material beskrivelse — følger gitt material/fluid partikkel i rommet; Lagrange's beskrivelse

Hva er endringen hos en fluid partikkel?
(Partikkel formulering → masse, momentum, energ ligningene osv)

$$\frac{d}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_x \equiv \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_x}_{\text{endringen ved gitt rom punkt}} \; ; \quad \frac{d}{dt} \equiv \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\xi}_{\text{endring med partikkel forflyttning}} \rightarrow \text{Partikkel deriverte}$$

Hastigheten ≡ partikkel deriverte av posisjonen til partikkelen

$$\underline{u} = \frac{d\underline{x}(\underline{\xi})}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial t}(\xi_i, t), \quad i = \text{individuell partikkel markør}$$

Vi får endringen av partikkel variablen

$$\frac{df}{dt}(\underline{\xi}, t) = \frac{d}{dt} f(\underline{\xi}(\underline{x}, t), t) = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_x + \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_\xi}_{\text{Kjerneregelen}} = \frac{Df}{Dt}$$

$$\boxed{\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) f}$$

Partikkel deriverte
(total deriverte, materiell deriverte)

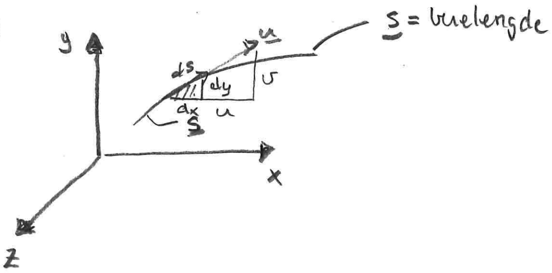
Akselerasjonen av fluid partikke (momentum):

$$\frac{D\underline{u}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \underline{u}}{\partial t}}_{\text{lokal}} + \underbrace{(\underline{u} \cdot \nabla)\underline{u}}_{\text{advektiv/konvektiv}}$$

– Partikkel deriverte kan gis av skalar, vektor, tensor kvantitet

ⓘ **Strømlinjer** (snapshot)

≡ trajektorien til hastighets feltet (ved et gitt tid)



langs en strømlinje er tangenten $\frac{d\underline{x}}{ds} = \underline{u}(\underline{x},t)$ (momentant tid ; t = fikset)

buelengden erstatter tid

geometri ⟶ $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \equiv ds$; finner strømlinjen ved å integrere.

($dvs.$ $\underline{u} \times d\underline{s} = 0$, ingen strømning på tvers av strømlinjene)

ⓘⓘ **Partikkel linjer**

≡ banen til en gitt partikkel for en gitt tidsperiode. Ved $t=0$, $x_i = \xi_i$

$\frac{dx_i}{dt} = \underline{u}$ med start verdi $t=0$, $x_i = \xi_i$ ← integrasjon gir partikkel banen i tid

Ved steady / stasjonær strømning ($\underline{U} \neq \underline{u}(\underline{x})$, $u_i = u_i(x_i)$) strømlinjen = partikkel banen

ⓘⓘⓘ **Streak lines** (følger markør i tid og rom)

Forstå alle påvirkningene ved et punkt!

$\underline{X}(\underline{\xi}(\underline{Y},\underline{s}),t)$

Posisjon tid

t. eks. Plan strømning , $u = \frac{x}{1+t}$, $v = y$, $w = 0$

S.L. ⓘ $u = \frac{dx}{ds} = \frac{x}{1+t}$, $v = \frac{dy}{ds} = y$ (t = konstant)

$x = p_1 e^{s/1+t}$, $y = p_2 e^{s}$, $z = p_3$ ved Punkt p_1, p_2, p_3

P.L. ⓘⓘ $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{1+t} \Rightarrow x_i(\xi, 0) = \xi_i \Rightarrow x = a_1(1+t)$

$\frac{dy}{dt} = y$ $\quad y = a_2 e^{t}$

$z = a_3$

ⓘⓘⓘ Partikkel ved tid s, plass $\underline{Y}$, $\underline{r}(\underline{Y},s)$
bestemme hvor den kommer fra.

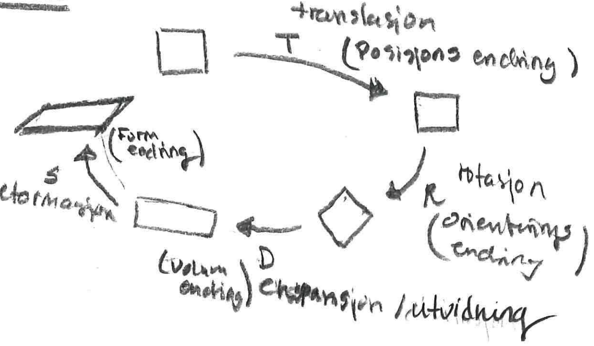
$r_x = \frac{y_1}{1+s}$, $r_y = y_2 e^{-s}$, $r_z = z$ streak lines ⟹ $x = r_x(1+t) = y_1 \frac{1+t}{1+s}$
$y = r_y e^{t} = y_2 e^{t-s}$
$z = z$
} kombinerer alle effekter.

Langs strømlinjer (tidsuavhengig strømning $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$) får vi at endringen i f er

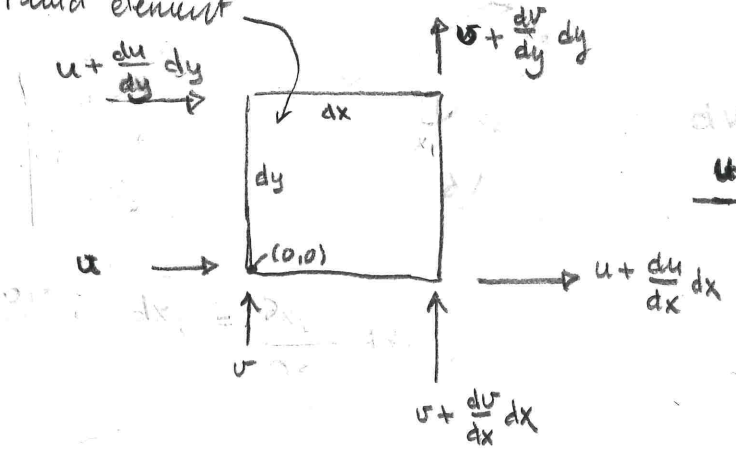
$$(\underline{u} \cdot \nabla) f = (|u| \underline{e}_s \nabla f) = |u| \frac{\partial f}{\partial s} = 0 \qquad \underline{u} = |u| \underline{e}_s$$

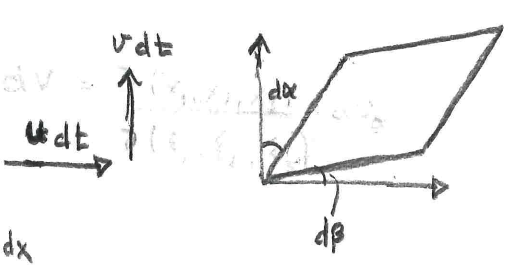
Generelle bevegelsen av fluid element

= Translesjon + Rot. + Dil. + shear



Fluid element





Liten rotasjon (dα, dβ små) og dt;

$$d\alpha \approx \tan d\alpha \sim \frac{u(x, y+dy) - u(x,y)}{dy/dt} \sim \frac{du}{dy} dt$$

$$d\beta \approx \tan(d\beta) \sim \frac{v(x+dx, y) - v(x,y)}{dx/dt} \sim \frac{dv}{dx} dt$$

(Taylor serie)

Deformasjons rate (shear rate) = endring i form

= avik fra ⊥

= $d\alpha + d\beta$

$$\Rightarrow d\alpha = \frac{du}{dy} dt \quad , \quad d\beta = \frac{dv}{dx} dt$$

$$\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt} = \underline{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2\gamma} \quad \text{(deformasjons rate)}$$

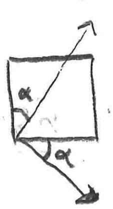
Rotasjons rate ? — Positiv mot klokken ↺
(– gjennomsnittlig)

$$\frac{d\beta - d\alpha}{2\,dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \underline{\Omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \underline{u} = \frac{1}{2} \underline{\omega} \quad \text{(vinkelhastighet} = \tfrac{1}{2}\ \text{virvling)}$$

Eks;
$$\left.\begin{array}{l} u = -\alpha x \\ v = \alpha y \\ w = 0 \end{array}\right\} \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \underline{0} \;\longrightarrow\; \Omega = -2\alpha$$

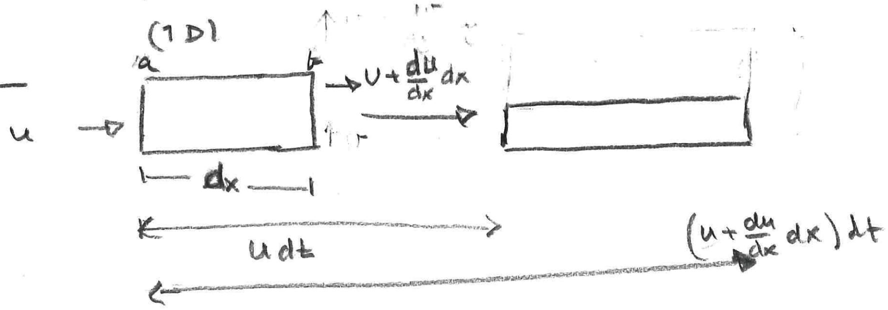
(ingen deformasjon)

(roterende)
→ fast legeme



④

Utvidning



Linje endringen $\rightarrow$ $$\frac{\Delta A}{A\,dt} = \frac{1}{dt}\,\frac{a'b' - ab}{A} = \frac{1}{dt}\,\frac{1}{dx}\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx\,dt - dx\right) = \underline{\frac{\partial u}{\partial x}} = \underbrace{\frac{1}{dx}\,\frac{D\,dx}{Dt}}_{\text{Partikkel deriverte.}}$$

Utvidningen for et volum $\rightarrow$ $$\frac{1}{dV}\,\frac{D\,dV}{Dt} = \frac{1}{dx}\,\frac{D(dx)}{Dt} + \frac{1}{dy}\,\frac{D(dy)}{Dt} + \frac{1}{dz}\,\frac{D(dz)}{Dt}$$

$$\frac{1}{dV}\,\frac{D\,dV}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \underline{\nabla\cdot\underline{u}}$$

Gradienten av hastighetsfeltet - $\nabla\underline{u}$

$$\nabla\underline{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2}\left[\nabla\underline{u} + (\nabla\underline{u})^T\right]}_{\text{strain rate tensor}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[\nabla u - (\nabla u)^T\right]}_{\text{rotasjons tensor}}$$

$$= \underline{\underline{\gamma} + \underline{\underline{\Omega}}}$$

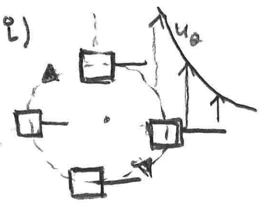
$tr(\nabla\underline{u}) = \nabla\cdot\underline{u}$

$$\underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2}\,\underline{\omega}\times d\underline{x} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ tolkning ved $\underline{x}$ fra rotasjonsaksen roterer en faststoff kropp $\underline{\Omega}\times\underline{x}$ og termen representerer relative rotasjonen av et element med vinkelhastighet ω.

Hvordan tenke på virvling? virvling ≡ rotasjonen av fluid element (orientering endring)
≡ vinkelhastigheten (lokalt)

Eks: i)

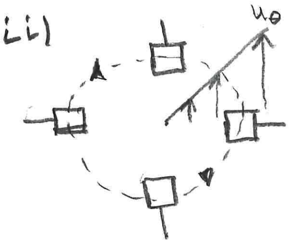


$u_\theta = \frac{K_1}{r}$

$u_r = 0$

- Sirkulære strømlinjer
- ingen rotasjon $\underline{\omega} = 0$

ii)



$u_\theta = K_2 r$

$u_r = 0$

- Sirkulære strømlinjer
- rotasjon

$$\omega_z = (\nabla \times \underline{u})_z = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta)\right) - \underbrace{\cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}}}_{0} \rightarrow \begin{array}{l} \text{i)}\ \omega_z = 0 \\ \text{ii)}\ \omega_z = 2K_2 \end{array}$$

Azimuthal hastighet ikke tilstrekkelig for å få virvling!
Istede → rotasjon av fluid element

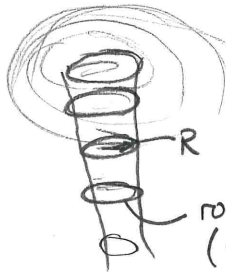
Rankine vortex – ideell

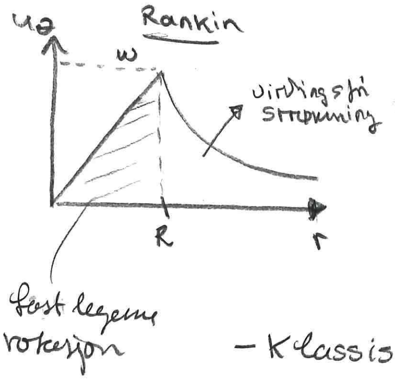
Forenklet modell av vortex i badekar tornado osv.

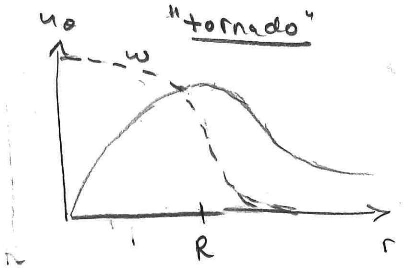
Sette sammen (i) + (ii) = Rankine vortex
$K_1 = \Omega$, $K_2 = \Omega R^2$; sylindriske koordinater

$$u_\theta = \begin{cases} \Omega r & \wedge\ r < R \quad (ii) \\ \frac{\Omega R^2}{r} & \wedge\ r > R \quad (i) \end{cases}$$

$u_r = u_z = 0$







Virkeligheten;
→ liten virvlingskjerne ↑$\underline{\omega}$
→ utenfor kjernen er strømningen virvlingsfri $\underline{\omega} = \nabla \times \underline{u} = 0$

kjernen → 0, $\omega_z \neq 0$ kun i kjernepunkt

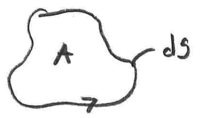
– Klassisk løsning på Euler strømning!

Beskrivelse av fluid element;

Lokale størrelser; $\underline{u}$ Posisjon, $\underline{\omega} \equiv \nabla \times \underline{u}$ orientering, $\nabla \cdot \underline{u}$ størrelse, $\underline{\gamma}$ form

Globale størrelser;

sirkulasjon $= \int \nabla \times \underline{u}\, dA = \oint \underline{u}\, d\underline{s}$



Konserverings lover!