16/12/2015

Konserverings lover

→ generelt problem finne $\frac{d}{dt}\int_{V(t)} F\, dV$

F kan være skalar, vektor, tensor

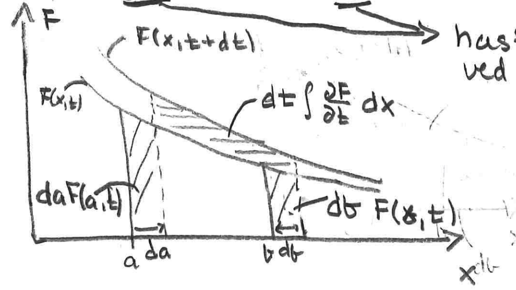
Material form 1d;

Leibniz theorem; (intro. kalkulus)

$$\frac{d}{dt}\int_{x=a(t)}^{x=b(t)} F(x,t)\,dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial t}\,dx + \frac{db}{dt}F(b,t) - \frac{da}{dt}F(a,t)$$

$\frac{db}{dt}$, $\frac{da}{dt}$ → hastigheten ved grensene

geometrisk tolkning;



For et generelt materiellt volum V(t) (fluid element)

→ Reynolds transport theorem;

$$d\underline{A} = \underline{n}\, dA$$

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} F\,dV = \int_{V(t)} \frac{\partial F}{\partial t}\,dV + \int_{A(t)} F\,\underline{u}\cdot d\underline{A} = \int_{V(t)} \frac{\partial F}{\partial t}\,dV + \int_{V(t)} \nabla\cdot(F\underline{u})\,dV$$

$$= \int_{V(t)} \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \nabla\cdot(F\underline{u})\right)}_{\text{lokal}} dV$$

lokal ↓↑ global

- dersom V = konst., u = 0 $\frac{d}{dt}\int F\,dV = \int \frac{\partial F}{\partial t}\,dV$
- $\underline{u}$ = fluid hastigheten = hastigheten ved grensene

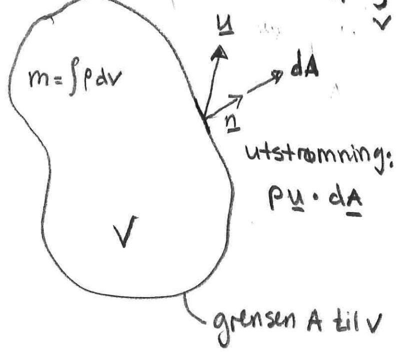
Masse konservering;

↳ akseleratorie referansepunkt (Eulersk beskrivelse)

→ Integralsatser så utlede differensial form konstant volum!

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\,dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dV = -\int \rho\underline{u}\cdot d\underline{A} = -\int \rho\underline{u}\cdot\underline{n}\,dA$$

ρ = densitet



$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dV = -\int_V \nabla\cdot(\rho\underline{u})\,dV \quad \text{(divergens theo.)}$$

Holder for alle volum størrelser dvs

Kontinuitets ligningen; $\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\underline{u}) = 0}$

Vi kan omskrive ligningen → $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \underline{u} + \underline{u} \cdot \nabla \rho = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = -\nabla \cdot u}$$ — lokal volum endring

$$\sim \frac{1}{V}\frac{DV}{Dt}$$

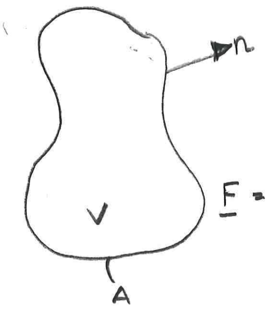
Inkompressibelt fluid, ρ = konst. → $\boxed{\nabla \cdot \underline{u} = 0}$ — setter begrensning på strømningen dvs. kan ikke bare ha strømning inn/ut ved et hver punkt.

Momentum konservasjon

Euler's ligning
- inviskost (ingen friksjon, $\mu = 0$)
- inkompressibelt

von Neumann → "Dry water"

$(\rho = m/V)$



Kontinuum → kraften på volumet $\underline{F} = m\underline{a}$

Fluid momentumet gitt

$$\underline{F} = \frac{d}{dt}\int_V \rho \underline{u}\, dV = \int \frac{\partial \rho u}{\partial t} dV + \underbrace{\int (\rho \underline{u})\underline{u}\cdot\underline{n}\, dA}_{\text{mom. fluxen gjennom grensen } A}$$

$$= \int \left(\frac{\partial(\rho \underline{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}\underline{u})\right) dV = \int \left[\left(\rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \rho \underline{u}\cdot\nabla\underline{u}\right) + u\underbrace{\cancel{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\underline{u})\right)}}_{0}\right] dV$$

kont. lig.

Trykket — $p = p(x,y,z,t)$ gir normalkraft $-\underline{n}$ på grensen til V

$p\underline{n}\, dA$ — kraften på fluidet i retningen til normalvektoren $\underline{n}$

kraften på V; $\underline{F} = -\int p\underline{n}\, dA = -\int \nabla p\, dV$

Kraftbalanse for alle V gir Euler's ligning;

1) Momentum: $\boxed{\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + (\underline{u}\cdot\nabla)u\right) = -\nabla p} + f_p + f_\mu$

f_μ = kraft viskøs friksjon (inviskost → $f_\mu \equiv 0$)

f_p = ekstern kraft t.eks. gravitasjon

2) Masse: $\boxed{\nabla \cdot \underline{u} = 0}$

Antar f_p = konservativ kraft

$\Rightarrow f_p = -\rho \nabla \chi$ — χ = energi potensial

t.eks. gravitasjon $\chi = -gz$

1) ∧ 2)
- Ikke linjer
- Galileian invariant (ikke avhengig av $\underline{u}$ explicit) $\underline{u} \to \underline{u} + c$, $\frac{d(\underline{u}+c)}{dt} = \frac{du}{dt}$!

Holder ikke alltid for fluid strømning. t.eks Darcy; $\underline{u} = -k\nabla p$, $\nabla\cdot\underline{u} = 0$ ⇒ eksplicit avhengig $\underline{u}$ solid referanse ramme

$z \uparrow \quad \downarrow g$ $\qquad \underline{\chi = -\rho g z}$ $\rightarrow$ konservativ kraft

Euler; $\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla(P + \chi)$; omformulerer ligningen ved å bruke vektor relasjonen;

$\underline{(\underline{u}\cdot\nabla)\underline{u} = \frac{1}{2}\nabla(u^2) + (\nabla\times\underline{u})\times\underline{u}}$ (Acheson A.9)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla(u^2) + \underbrace{(\nabla\times\underline{u})}_{\omega = \text{virvlingen}}\times\underline{u} = -\nabla\left(\frac{P}{\rho} + \chi\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \underline{\omega}\times\underline{u} = -\nabla\left(\frac{P}{\rho} + \chi + \frac{1}{2}u^2\right)$$

For tidsuavhengig strømning $\left(\begin{matrix}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \\ u \neq 0\end{matrix}\right)$ og dot produktet gir

$$\underbrace{\underline{u}\cdot(\underline{\omega}\times\underline{u})}_{0} = -\underline{u}\cdot\nabla\underbrace{\left(\frac{P}{\rho} + \chi + \frac{1}{2}u^2\right)}_{H} = -\underline{u}\nabla H = 0$$

$\rightarrow$ ∇H må være normal til strømlinje hastigheten $\underline{u} = \frac{dx}{ds}$

Vi har

$$\boxed{H = \frac{P}{\rho} + \chi + \frac{u^2}{2} = \text{konstant (langs strømlinjer)}}$$

Bernoullie's theorem!

$\rightarrow$ H og energien er konstant langs strømlinjer.

H er derimot ikke konstant over alt med en verdi som varierer mellom de forskjellige strømlinjene.

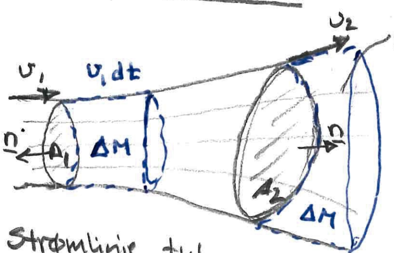
Dersom strømningen er; inkompressibel $(\nabla\cdot\underline{u} = 0)$, inviskos $(\mu = 0)$, rotasjonsfri $(\nabla\times\underline{u} = \underline{\omega} = 0)$

$\Rightarrow \nabla H = 0$, H = konstant (over hele feltet)

(= trykkligning / Energi høyde)

Bernoullie $\rightarrow$ intuisjon om strømning uten å vite alle detaljer.

Alternativ tolkning



Strømlinje tube

$\Rightarrow$ Massebevarelse

$\Delta M = \rho u_1 A_1 \Delta t = \rho u_2 A_2 \Delta t \Rightarrow A_1 = \frac{u_2 \rho_2}{u_1 \rho_1} A_2$

Arbeidet av trykket = Energi endring $\qquad E = \frac{1}{2}u^2 + \phi + \mathcal{U}$ (intern energi lik for ① og ② inkompressibel)

$W_2 - W_1 = -P_2 u_2 dt \cdot A_2 - (-P_1 u_1 dt A_1) = (E_2 - E_1)\Delta M$

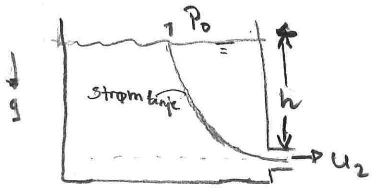
$$\frac{P_1 \cancel{\Delta M}}{\rho} - \frac{P_2 \cancel{\Delta M}}{\rho} \qquad \left(\frac{1}{2}u_2^2 + \phi_2 - \left(\frac{1}{2}u_1^2 + \phi_1\right)\right)\cancel{\Delta M}$$

Kompressibelt (se Gjevik)

$$\underline{\frac{P_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} + \phi_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} + \phi_2}$$ (gyldig langs strømlinje)

Bernoullie – bruk (og noen misforståelser!)

Utstrømming: hva er hastigheten u_2?



- inkompressibelt, inviskøst

Bernoulli's ligning

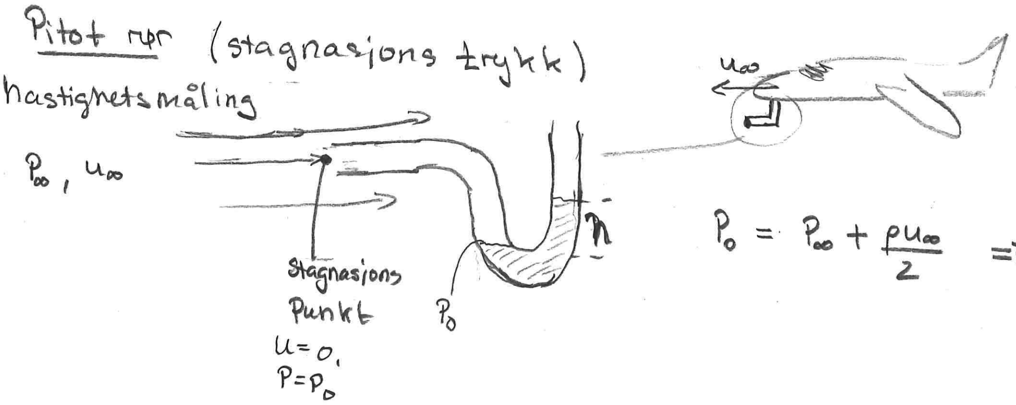
$$P_1 = P_2 - \rho g h + \frac{\rho u_2^2}{2} \qquad \wedge\ P_1 = P_2$$

$$\underline{u_2 = \sqrt{2gh}}$$ (Torricelli's lov) [masseflux = $q = u_2 A_2$]

Måleinstrument

i) Pitot rør (stagnasjons trykk)

- hastighetsmåling



$$P_0 = P_\infty + \frac{\rho u_\infty}{2} \Rightarrow u_\infty = \sqrt{\frac{2(P_0 - P_\infty)}{\rho}} = \underline{\sqrt{2gh}}$$

ii) Venturi meter

- Volumetrisk strømning

Bernoullie;

$$P_P + \rho\frac{u_P^2}{2} = P_G + \rho\frac{u_G^2}{2}$$

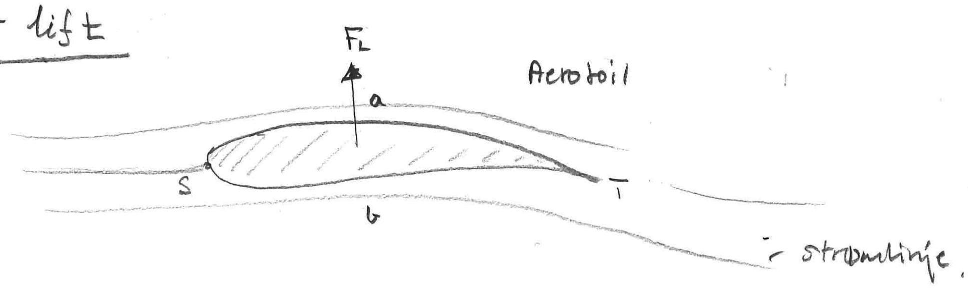
$$P_P - P_G = \cancel{\rho} g h = \cancel{\rho}\frac{u_G}{2}(1-c)$$

Masse bevarelse; $Q = A_P u_P = A_Q u_Q \Rightarrow u_P = u_Q \underbrace{\frac{A_Q}{A_P}}_{\text{(kontraksjons koeffisient } = c)} = u_Q c$

$$\Rightarrow \underline{gh = \frac{Q_G^2}{A_G^2}(1-c)}$$

Demonstrasjons Modul – Coanda effekten

Coanda effekten – lift



Lift kraften F_L?

Populær feiltolkning; Distansen S-T større på oversiden antar to fluid partikkler ved S møtes ved T

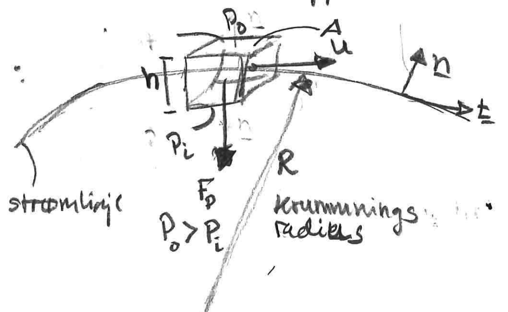
$\rightarrow u_b < u_a \rightarrow$ Bernoullie $\rightarrow P_b > P_a$ $\uparrow F_L$

- Distanse-argument $(S-T)_a > (S-T)_b$
  Hva med et seil eller ark $\rightarrow (S-T)_a = (S-T)_b$. Åpenbart feil! Vi får lift.
- "Lik-tid" argumentet
  Hvorfor må partikkelen møtes ved T? Vanskelig å bevise... Eksperiment streak-line demonstrerer at dette ikke stemmer.

Bernoullie $\rightarrow$ trykk langs strømlinjen er konstant. Sier ingenting om trykkforskjeller på tvers av strømlinjer!!

Coanda effekten – strømlinjer "fastholdende" langs krummede overflater (viskøs effekt)
(Henri Coanda – Rumensk oppfinner $\rightarrow$ brant opp jetfly oppvisning Paris

En forklaring:



$P_0 = P_i + dP$

$$F_p = m\underline{a} = A\frac{dP}{dn}\cdot h\rho \quad \text{(trykk kraften)}$$

Fluid partikkelen har en centripital kraft

$$F_c = m\frac{U^2}{R} = \rho A h\frac{U^2}{R}$$

$$F_c = F_p \Rightarrow \frac{dP}{dn} = \rho\frac{U^2}{R}$$

– lift avhenger av kurvatur.
– $R \rightarrow \infty$, flatt overflate $\neq$ lift

Euler's ligning? – steady-state, – ingen gravitasjon – inviskøst.

$$\rho(\underline{u}\cdot\nabla)\underline{u} = \nabla P$$

$\underline{u} = u(s)\underline{t}$

$\Rightarrow (\underline{u}\cdot\nabla) = u\frac{\partial}{\partial s}$

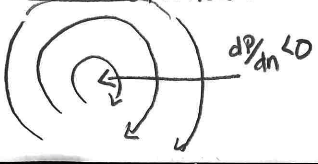
$$\rho u\frac{\partial}{\partial s}(u\underline{t}) = \rho u^2\frac{\partial \underline{t}}{\partial s} + \underline{t}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\rho u^2}{2}\right) = -\nabla P \quad \wedge \quad \frac{\partial \underline{t}}{\partial s} = -\kappa\cdot\underline{n}$$

1/radius kurvaturen

$$= -\rho u^2\kappa\underline{n} + \underline{t}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\rho u^2}{2}\right) = -\underline{t}\frac{\partial P}{\partial s} - \underline{n}\frac{\partial P}{\partial n}$$

$\underline{t}$-retning; $\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\rho u^2}{2} + P\right) = 0$ (Bernoullie)

Virvling/tornado



$\underline{n}$-retning; $\rho u^2\kappa = \frac{\partial P}{\partial n}$

– trykket øker fra center av kurvaturen
$\Rightarrow$ sug mot tornado senter
– hastigheten øker mot senter