18/12/2015 ①

Inkompressibel,
Inviskøs, stasjonær strømning; Euler lig. → Bernoulli's theo.
(generelt $\nabla \times \underline{u} \neq 0$)

Virvelligningen; $\nabla \cdot \underline{u} = 0$ i

Euler's ligning $\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u}\cdot\nabla)\underline{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \chi$ ii

$(\underline{u}\cdot\nabla)\underline{u} = \nabla\left(\frac{u^2}{2}\right) + \underbrace{(\nabla\times\underline{u})}_{\underline{\omega}}\times\underline{u}$

Vi tar curlen; i ∧ ii $\nabla\times\left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \cancel{\nabla\left(\frac{u^2}{2}\right)} + \underline{\omega}\times\underline{u}\right) = \nabla\times\left(-\cancel{\frac{\nabla p}{\rho}} - \cancel{\nabla\chi}\right)$

Husker at $\nabla\times(\nabla(\,))\equiv 0$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \nabla\times(\underline{\omega}\times\underline{u}) = 0$ → dersom $\underline{\omega} = 0$ ved gitt tid $\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} = 0$ dvs virvling kan ikke skapes! → virvelfri strømning. → En løsning, lineær.

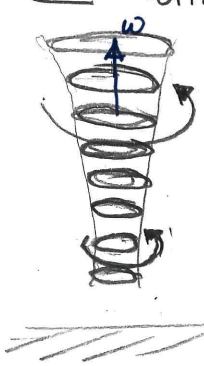
Vi har; $\nabla\times(\underline{\omega}\times\underline{u}) = \underline{(\underline{u}\cdot\nabla)\underline{\omega}} - \underline{(\underline{\omega}\cdot\nabla)\underline{u}} + \underline{\omega}\underbrace{\cancel{(\nabla\cdot\underline{u})}}_{0 \text{ inkomp.}} - \underline{u}\,\cancel{(\nabla\cdot\underline{\omega})}$
(A6, Acheson) $\nabla\cdot(\nabla\times(\,))\equiv 0$

⇒ Virvelligningen; $\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + (\underline{u}\cdot\nabla)\underline{\omega} = \underbrace{(\underline{\omega}\cdot\nabla)\underline{u}}_{\text{tøyning/tilting}} \;(+\mu\nabla^2\underline{\omega})$, $\nabla\cdot\underline{u} = 0$

viskøs effekt → diffusjon av virvling

Trykket eliminert!

Eks. Tornado (vortex tube)



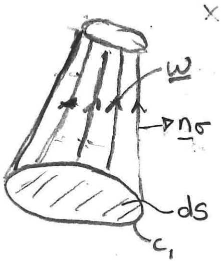
langt fra bakken $\mu\nabla^2\underline{\omega} \sim 0$, virvlings linjene ligger i z-retningen

$\underline{\omega} = \omega\underline{e}_z$

virvel ligningen; z - $\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\underline{u}\cdot\nabla)\omega = \omega\frac{\partial w}{\partial z}$

$\frac{\partial w}{\partial z} > 0$ → tøyning fluid → $\omega\uparrow$ virvlingen øker!
(termisk oppdrift)

Virvlings tube;



lukket kurve som inneholder virvlingslinjer
$x(s), y(s), z(s)$ ved gitt t;

$$\boxed{\frac{dx/ds}{\omega_x} = \frac{dy/ds}{\omega_y} = \frac{dz/ds}{\omega_z}}$$

Dersom $\underline{u} = (u, v, 0)$ → 2D strømning konservativ kraft
⇒ $\underline{\omega} \perp \underline{u}$, $\underline{\omega} = (0, 0, \omega)$

Virvlingen bevart! ; $\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + (\underline{u}\cdot\nabla)\omega = 0$

Virvlingstuben langs z aksen, ingen tøyning av virvlingen

Helmholz (1858) virvlingstheorem

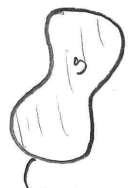
1) virvlingslinjer starter / stopper ikke → skaper løkker eller knyttes til en vegg
   – $\nabla \cdot \underline{\omega} = 0$ (lik magnetiske feltlinjer $\underline{B}$)

2) virvlingslinjer forflyttes med fluidet (markerer fluid partikler i $C(t) \xrightarrow{\text{samme i}} C(t+\delta t)$)
   – $\int_{\sigma} \underline{\omega} \cdot \underline{n}_{\sigma} \, d\sigma = 0$ ∧ $\underline{n}_{\sigma}$ = normalen til virvlingstuben ∧ 2D: $\frac{D\omega}{Dt} = 0$

3) styrken til virvlingstuben konstant langs lengden (og i tid) $\Gamma = \int_S \underline{\omega} \, d\underline{s}$ = konst.
   – Bevaring av rotasjons momentum, inviskøst → normal trykk kraft på alle overflater, ingen deformasjon.
   Sylinder → moment av inertia $= mr^2$

   Konservasjon av r.m.; $(m_1 R_1^2)\,\omega_1 = (m_2 R_2^2)\,\omega_2$ $m_1 = m_2$ (inkompressibelt)
   $\Rightarrow A_1 \omega_1 = A_2 \omega_2$ $R^2 \sim$ areal

Kelvin's sirkulasjons theorem – generell beskrivelse


$C(t)$

$C(t)$ – fluid partikkler "farget"

Endringen i sirkulasjon Γ rundt $C(t)$?

$$\Gamma = \int_S \underline{\omega} \, d\underline{s} = \int_{C(t)} \underline{u} \, d\underline{x}$$

Stoke's sats

$$\underbrace{\frac{D\Gamma}{Dt}}_{} = \frac{D}{Dt} \int_{C(t)} \underline{u} \, d\underline{x} = \int_{C(t)} \frac{D\underline{u}}{Dt} \, d\underline{x} + \int_{C(t)} \underline{u} \cdot \frac{D(d\underline{x})}{Dt}$$

$\frac{D}{Dt}$ → material konturen $C(t)$

$$= \underbrace{\int_{C(t)} -\nabla(p + \chi) \, d\underline{x}}_{\text{Euler}} + \int_{C(t)} \underline{u} \cdot d\underline{u}$$

$$= \int_{C(t)} -\nabla(p + \chi) \, d\underline{x} + \int_{C(t)} \tfrac{1}{2} \, d(u^2)$$

$$= -[p + \chi] + [\tfrac{1}{2} u^2]_c = 0 \quad (p, u, \chi \rightarrow$$

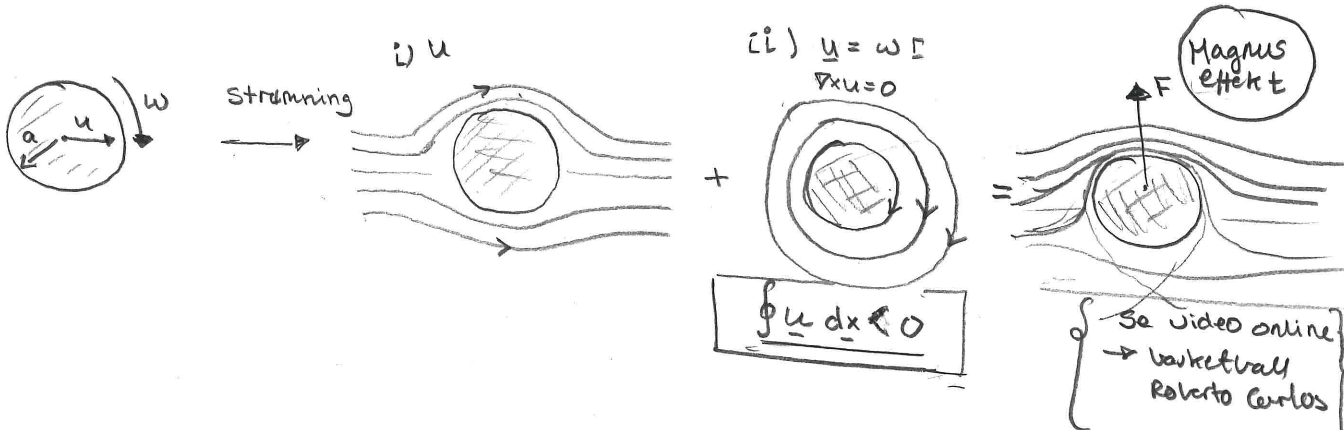
Kelvin's theorem $\boxed{\frac{D\Gamma}{Dt} = 0}$

- Sirkulasjonen bevart i Euler strømning
- Gyldig også for Barotropisk fluid $\rho(p)$ → Gjevik.
- Viskøse, ikke konservative krefter (coriolis), $\rho \neq f(p)$ kan skape / ødelegge sirkulasjon!

Sirkulasjon, oppdrift, virvling ?

Inkompressibel ^ rotasjonsfri 1) $\nabla \cdot \underline{u} = 0$
2) $\underline{\omega} = \nabla \times \underline{u} = 0$ } lineær, unik løsning → sum av flere løsninger (superposisjon)

Roterende fotball



Potensial strømning (inkomp., rot. fritt, inviskøst $\mu = 0$)

Siden $\nabla \times \underline{u} = 0$ → Fristende å definere $\underline{u} = \nabla \phi$ med hastighetspotensialet $\phi = \phi(x, y, z, t)$

$\nabla \times (\nabla \phi) \equiv 0$, $u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$ (2D)

Massebevarelse ; $\nabla \cdot \underline{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ⟹ Definerer strømfunksjonen ψ slik at $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$

$$\nabla \cdot u = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0$$

Vi ser at $(u \cdot \nabla)\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$ ⟹ ψ = konstant langs strømlinjer!

$$\nabla \cdot \underline{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \nabla \times \underline{u} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$$

Cauchy - Riemann relasjonene ;

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

} Kompleks variabel teori!

→ $(u \cdot \nabla)\psi = 0$, $\phi \perp \psi$, ϕ = equipotensial linjer