Strømning med friksjon – effekten av viskositet (mot Navier Stokes ligning)

Fluidets motstand til deformasjon måles som viskositet, $\mu = Pa \cdot s = \left[\frac{M}{TL}\right]$

Newtonsk / inkompressibel væske er stresset (kraft/areal); $\underline{\underline{\tau}} = \mu \nabla \underline{u}$ (linear respons)

– vann, oljer, blod (dersom kontinuerlig bevegelse), luft ($\frac{u}{c} \ll 1$, Ma)

Mange væsker er ikke Newtonske – maling, ketchup, tannkrem, spytt (polymerer)

Kompleks stress tensor → reaksjonen av tøying av molekyler (Rheologi) (ikke linear respons)

Forenklet utvikling av Navier Stokes ligninger (inkompressibelt, ρ = konst)

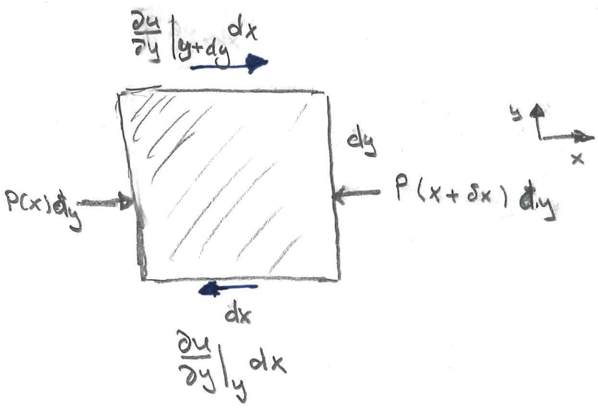
1 dimensjonal strømning, $\underline{u} = [u, 0, 0]$

Euler's ligning ($\mu \equiv 0$); $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

Kreftene på et fluidelement;

$P(x)\,dy - P(x+dx)\,dy$

$= -\frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy$ $\quad \{dx, dy\} \to 0$



Skjær kraften

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y+dy} \cdot dx - \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y} dx = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dx\,dy$$

1d strømning med $\mu > 0$;

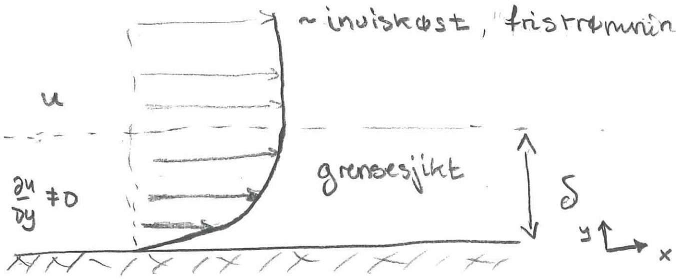
$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$ – viskøs effekt

Ved å ta curlen $\nabla \times$ får vi ligningen for virvling

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \omega = \nu \nabla^2 \omega$$ – momentum diffusjon

$[\nu] = m/s^2$ = kinematisk viskositet

Strømning over flat vegg



På veggen ($y=0$)

Euler; $u \neq 0$, $v = 0$
(slip)

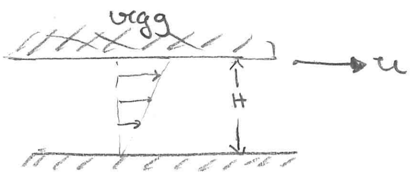
Viskøs strømning; (på veggen) No-slip! $\underline{u} \equiv 0$, $u = v = w = 0$ → ingen relativ hastighet mellom fluidet og veggen ved $y=0$!

spesiellt unntak; dersom kanalbredden L ~ molekylær lengde/ λ mean free path rarified gas, $\underline{u} \neq 0$, men viskøse krefter fortsatt viktige!

$\boxed{\frac{\lambda}{L} = kn = \text{knudsen tallet}}$ $\frac{\lambda}{L} \sim 1$

Hvordan måle viskositeten μ i et fluid?

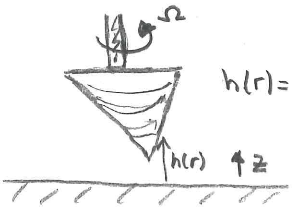
Kraften på veggen; I) Couette strømning



$u(y) = \frac{y}{H} \cdot u$

$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mu u}{H}$

II) Couette; "cone-plate"

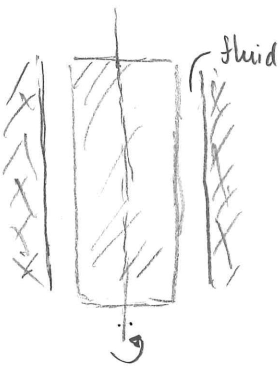


$h(r) = \alpha z$

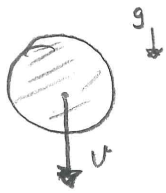
måler τ_v (vegg skjær)

finner μ

III) sylinder



IV) synkende kule



Re<<1

Høy viskositet

$\Delta \rho g R^3 = C_1 \tau R^2$

$\approx C_1 \frac{\mu U}{R} R^2$

$\approx c_1 \mu R$

$\underbrace{F_{Drag} = 6\pi \mu U R}_{\text{Stokes drag}}$

μ for noen kjente fluider;

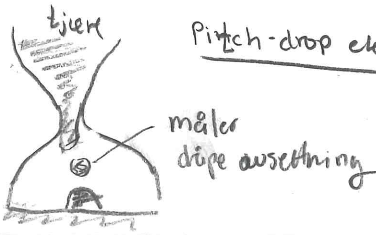
luft $= 2 \cdot 10^{-5}$ Pa·s

vann $= 10^{-3}$ Pa·s

honning ≈ 1 Pa·s

tjære $\approx 10^{8}$ Pa·s → verdens lengste eksperiment
83 år → 8 dråper!

Pitch-drop eksperiment



Viskøse stress tensoren, Newtonsk fluid ; $\underline{\underline{\tau}} = \overset{\text{skjærviskositet}}{\mu} (\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T - \frac{2}{3} \nabla \cdot \underline{u}) + \overset{\text{bulk/utvidnings viskositet}}{\eta} (\nabla \cdot \underline{u}) \underline{\underline{I}}$

Inkompressibelt ; $\underline{\underline{\tau}} = \mu (\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T)$

Navier Stoke's ligninger (Newtonsk fluid, inkomp.)

[Interessert i utvikling av $\underline{\underline{\tau}}$; MEK 3220
Acheson kap. 7]

$\nabla \cdot \underline{u} = 0$ (kontinuitet)

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \right) = \nabla \cdot \overbrace{\left(-P \underline{\underline{I}} + \mu (\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T) \right)}^{\text{totale stress tens}}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \right) = -\nabla P + \mu \nabla^2 \underline{u}$$

$\underline{f}_e = 0$ (ingen eksterne krefter)

4 ligninger
4 variabler ; u, v, w, P
4 dimensjoner ; x, y, z, t
→ grensebetingelser
+ initial verdi

Skalering ; $\sim \frac{\rho U^2}{L} \sim \frac{\rho U^2}{L} \sim \frac{P^*}{L} \sim \frac{\mu U}{L^2}$

$[x,y,z] \sim L$
$[t] \sim L/U$
$[\underline{u}] \sim U$
$[P] \sim P^*$

Balanserer inertia og viskøse delen ; $\frac{|\rho \underline{u} \nabla \underline{u}|}{|\mu \nabla^2 u|} \sim \frac{\rho U^2/L}{\mu U/L} = \boxed{\frac{\rho U L}{\mu} = \frac{UL}{\nu} = Re}$

Reynolds tallet.

Re karrakteriserer strømningen,

$Re \gg 1$ – turbulent / kaotisk strømning
// transisjon, f(Re, geometri)
$Re \sim 1$ – overgang mellom inertiell/treghet til viskøst
$Re \ll 1$ – kryp strømning ($Re = 0$, Stokes strømning)

} laminert → glatte strømlinjer

Typiske Re i vann ($\rho = 10^3 \, kg/m^3$, $\mu = 10^{-3} \, Pa \cdot s$)

Svømmende bakterie $L \sim 10^{-6} m \sim 1 \mu m$, $u \sim 10^{-6} m/s \sim 1 \mu m/s$ } $Re = \frac{10^3 kg/m^3 \cdot 10^{-6} m \cdot 10^{-6} m/s}{10^{-3} Pa \cdot s} = 10^{-6}$

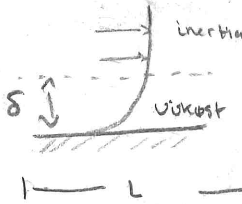
viskøst dominert (Stokes)

Laks  $L \sim 0.5 m$, $u \sim 0.5 m/s$ } $Re = 2.5 \cdot 10^5$

Inertia dominert!

Viskøse effekter kan være viktige i deler av strømningen!

t.eks nær vegg / grensesjikt. overgang mellom inertia og viskøst ved en gitt lengde δ. (grensesjikt tykkelse)



$\Rightarrow |\underline{u} \nabla \underline{u}| \sim \nu |\nabla^2 \underline{u}|$

$u^2/L \sim \nu u / \delta^2$

$$\underline{\delta \sim \left(\frac{\nu L}{U} \right)^{1/2} = \left(\frac{\nu}{UL} \right)^{1/2} \cdot L} \longrightarrow \begin{array}{l} Re \to 0, \ \delta \to \infty \\ Re \to \infty, \ \delta \to 0 \end{array}$$

N.S. ligninger
- ikke linjære
- 2-orden

Grensebetingelser ; i) Vegg Γ , no-slip - $\underline{u}|_\Gamma = 0$

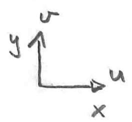
Siden $\underline{u} = \underline{f}(P)$ kan ikke $P \wedge u$ settes ved Ω samtidig
dvs. forskrives u, må P løses og vis-versa.

ii) Åpent reservoar → konstant trykk , $P|_{\Omega_i} = \text{konst}$
eller
→ gitt hastighet/in-flux , $\underline{u}|_{\Omega_i} = \text{konst.}$
eller
→ Kraft på grensen, $\underline{\underline{T}} \cdot \underline{n} = \text{Konst}$ (= 0 ingen kraft)

+ initial verdier , t = 0.

Noen enkle problemer som er en løsning på N.S. (kartesiske koord.)

2D strømning , $\underline{u} = [u, v, 0]$ ⇒ $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ (kontinuitet)



$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \end{aligned}\right\} \text{(momentum)}$$

Antar 1D - skjærstrømning ; $v = 0$, $w = 0$

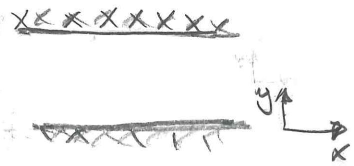
Ser at ; $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ ⇒ $P = P(x)$, $u = u(y)$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}$$

Forenkler mer med å anta steady-state , $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$

ⓐ steady state
Konstant trykk gradient → $\frac{\partial P}{\partial x} = \text{konst}$

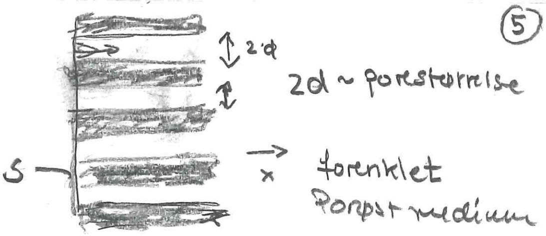
grensebetingelser ; $u(y=0) = u(H) = 0$



$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow u(y) = \frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\frac{1}{2}y^2 + c_1 y + c_2$$

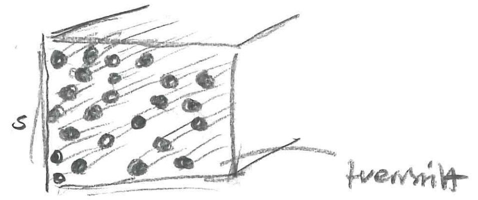
Grensebetingelsene gir : $u(y) = \frac{\partial P}{\partial x}\frac{1}{2\mu}y(y-H)$, $u_{max} = u(H/2) = -\frac{\partial P}{\partial x}\frac{H^2}{4}$

Massefluxen, $q = \int_{-H}^{H} u(y)\,dy = \frac{\partial P}{\partial x}\frac{1}{2}\left[y^3/3 - y^2/2\right]_{-H}^{H} = \frac{H^3}{12\mu}\frac{\partial P}{\partial x}$; (Husk til lub teori
H → dynamisk)



Interessant analog → strømning i porøst medium

Masse fluksen i en pore ; $q = \frac{d^3 \partial P_x}{12 \mu \partial x}$



Fluxen gjennom flaten S med N antall porer

porositeten ; $n = \frac{2dN}{S}$

$q_p = \frac{2dN \cdot d^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$, per flateenhet s $\Rightarrow \bar{U}_p = \frac{q_p}{S} = \frac{-n d^3}{S \cdot \mu} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{-K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$ (Darcy's lov)

$K = n d^3 = \frac{2 d^4 N}{S}$ = hydraulisk permeabilitet / ledningsevnen gjennom materialet.

Fransk ingeniør ~1850, gravitasjon. (Dimensjonering aquadukt syst. Dijon, 13 km rør)

$d \uparrow \; \bar{u}_p \uparrow$

$d \downarrow \; \bar{u}_p \downarrow$, $d \to 0$, $\bar{u}_p \to 0$

(6) Transient strømning (uten trykkfal ($P_x = 0$))

Stoke's 1st problem – impulsiv start på en vegg.

Diffusjon av momentum / virvling.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \, , \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$ (1D-diffusjons ligning)

i) Initial verdi ; $u(y, t=0) = 0 \quad \wedge \quad y > 0$

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ (kinematisk viskositet)

ii) Grensebetingelser ; $u(y=0, t)$, $u(y \to \infty, t) = 0 \quad \wedge \quad t > 0$

Ingen eksterne tid/lengdeskalaer. → lete etter similaritets løsning (dynamis skalering)

Transformasjonen , $t \to \alpha^2 t \wedge y \to \alpha y$ gjør ligningen uendret!

Mulig løsninger til ligningen er en kombinasjon av $y / t^{1/2}$

Tester variabel og koordinat transformasjonen ; $u = f(\eta)$, $\eta = y / (\nu t)^{1/2}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{d\eta}{dt} \frac{df}{d\eta} = \nu \left(\frac{d\eta}{dy}\right)^2 \frac{d^2 f}{d\eta^2} \quad \wedge \quad f' = \frac{df}{d\eta}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{y}{\nu t^{1/2}} \frac{1}{t} = -\frac{1}{2} \eta \cdot t^{-1}$$

$$\frac{d\eta}{dy} = \frac{1}{(\nu t)^{1/2}}$$

$$-\frac{\eta}{2 \cancel{t}} f' = \frac{\cancel{\nu}}{\cancel{\nu} \cancel{t}} f''$$

$$\frac{\eta}{2} f' + f'' = 0$$

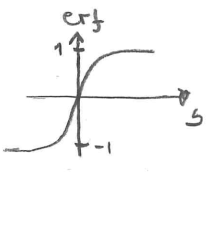
– Enkel lineær ODE , Parameter fri

grensebetingelser ;

$f(0) = u$, $f(\infty) = 0$

Integrerer $f' = B e^{-\eta^2/4}$

$$f = A + \underbrace{\int_0^\eta B e^{-s^2/4} \, ds}_{\sqrt{\pi} \, erf(s/2)} = A + \left[B \sqrt{\pi} \, erf(s) \right]_0^\eta$$



6

Hastigheten $\rightarrow$ $\underline{u(y,t) = U\left[1-\mathrm{erf}\left(y/\sqrt{\nu t}\right)\right]}$

transient løsning

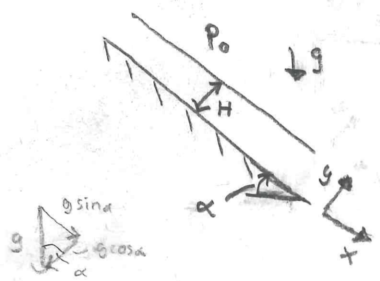
Påvirkningen fra veggen "føles" over en lengdeskala $y \sim \sqrt{\nu t}$ $t>0$, diffusjon av momentum

(Detaljer om grensesjikt i kurset: MEK 3300, viskøse strømninger og turbulens)

ⓒ Eksterne krefter (gravitasjon)

Fallende film

- 2D strømning, $\underline{u} = [u, v, 0] = [u(y), v(y), 0]$
- stasjonær, $\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = \text{konstant}$



Grensebetingelser

$\underline{y=0}$; $u = v = 0$ $\Rightarrow$ kontinuitet $\cancel{\frac{\partial u(y)}{\partial x}}^{0} + \frac{\partial v(y)}{\partial y} = 0 \Rightarrow v(y) = 0$

$\underline{\text{Overflaten, } y = H}$; Stress fri $\rightarrow \underline{\underline{T}} \cdot \underline{n} = 0$

$\Rightarrow$ Atmosfærisk trykk; $P = P_0$, Ingen skjærkrefter $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=H} = 0$

Momentum ligningene

x - $\quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g \sin\alpha$

y - $\quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g \cos\alpha \quad \Rightarrow P(y) = -\rho g \cos\alpha \cdot y + C_1$, $P(H) = P_0$

$P(y) - P_0 = \rho \cos\alpha \cdot g\,(H-y)$ $\quad \Rightarrow C_1 = \rho g \cos\alpha\, H + P_0$

hydrostatisk trykk!

Langs x - $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\rho g}{\mu} \sin\alpha$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\rho g}{\mu} \sin\alpha \cdot y + C_2 \quad \wedge \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=H} = 0 \quad \Rightarrow C_2 = \frac{\rho g \sin\alpha \cdot H}{\mu}$$

$$u = -\frac{\rho g}{\mu} \sin\alpha \left(y^2/2 - Hy\right) + C_3 \quad \wedge \quad u(0) = 0 \quad \Rightarrow C_3 = 0$$

$\underline{u = \frac{\rho g \sin\alpha \cdot y}{\mu}\left(y/2 - H\right)}$; Masse fluksen? $\underline{q = \int_0^H u\,dy = \frac{g H^3 \rho}{3\mu} \sin\alpha}$ (Husk dynamisk film)