UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK3230 — Fluidmekanikk
Eksamensdag:	Mandag 16. Desember, 2019
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Rottmanns formelsamling Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Navier-Stokes' momentumligninger

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{g}$$

∇-operatoren (kartesiske koordinater):

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} \\
\nabla\cdot\mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\nabla\times\mathbf{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

∇-operatoren (sylindriske koordinater):

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z \\
\nabla\cdot\mathbf{A} &= \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\nabla\times\mathbf{A} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\mathbf{e}_r - \left(\frac{\partial A_z}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\mathbf{e}_z
\end{aligned}$$

(Fortsettes på side 2.)

Vektoridentiteter:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} &= (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla(\frac{1}{2}u^2) \\
\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) &= (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F})
\end{aligned}
$$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 1 Korte oppgaver

Disse oppgavene krever ikke lange utledninger ved regning og vi forventer korte svar som maksimalt fyller en halv side per deloppgave.

1a Virvling: 10/100

En forsker presenterer sine todimensjonale resultater fra en numerisk simulering av en friksjonsfri inkompressibel strømning basert på Eulerligningene der virvling både forsvinner og oppstår. Utled virvelligningen for strømningen og forklar hvorfor simuleringen ikke er en korrekt representasjon av fluidmekanikken.

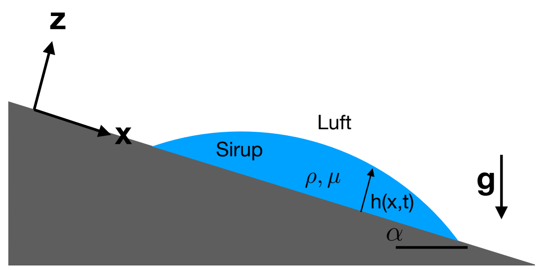
1b Skaleringsanalyse: 10/100

Vinnertiden for OL-gull i roing skalerer med antall roere i båten. Bestem relasjonen mellom den stasjonære hastigheten v til båtene og antallet n roere i robåtene ved hjelp av skaleringsanalyse. Anta 1.) formen på båtene under vann er geometrisk like, så vekten som forflytter vannet er proporsjonal med $\sim l^3$ der l er båtens lengde. 2) båtenes vekt per roer er konstant (k). 3) hver roer bidrar med en effekt P og har en vekt W. 4) framdriften av båtene er begrenset av motstandskraften fra draget $F \sim C_D \rho v^2 A$ der ρ er vannets massetetthet, F er kraften som beveger båten fremover, C_D drag konstanten og A er arealet av båten i kontakt med vann.

1c Tyngdebølge: 10/100

Vi har en todimensjonal inkompressibel potensialstrømning i en overflatebølge ved endelig dyp $y = -H$ som kan beskrives av hastighetspotensialet ϕ, med overflaten η som har små utslag om $y = 0$. Sett opp feltligningen som beskriver strømningen, grensebetingelsene ved havbunnen $y = -H$ og de lineariserte randverdibetingelsene for overflaten.

(Fortsettes på side 4.)



Figur 1: Skisse av sirupsdråpen som sklir ned et hellende plan, der $h(x,t)$ definerer høyden på dråpen og sirupens massetetthet er ρ og viskositet μ. g er tyngdeakselerasjonen.

Oppgave 2 En stor sirupsdråpe som sprer seg på et hellende plan

En stor sirupsdråpe sklir/sprer seg på et hellende plan med en forholdsvis stor vinkel α. Den todimensjonale strømningen i filmen kan beskrives av lubrikasjonsligningene

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + g\sin\alpha \\ 0 &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g\cos\alpha \end{aligned} \tag{1}$$

hvor p er trykket og u er hastigheten langs x-aksen. g er tyngdeakselerasjonen, ν er sirupens kinematiske viskositet og ρ massetettheten. $x = x_N(t)$ er fronten til dråpen. Sirupens massetetthet og viskositet er mye større enn luftens.

2a Poeng: 10/100

Hvilke betingelser må oppfylles for at disse ligningene skal gi en korrekt representasjon av fluidstrømningen? Hva er grensebetingelsene til strømningen? Bestem trykket p.

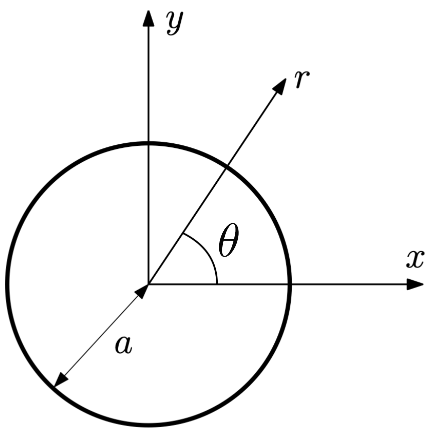
2b Poeng: 10/100

Utled ligningen for dråpen/væskefilmen $h(x,t)$ ved å bruke den kinematiske grensebetingelsen ved overflaten. (Hint: Neglisjer leddet $g\cos\alpha\frac{\partial h}{\partial x}$ i momentumligningen i x-retning, siden denne termen vil være veldig liten.)

2c Poeng: 10/100

Bruk skaleringsanalyse for å finne utbredelsen av dråpens front som en funksjon av tiden $x_N(t)$ (similaritetsløsningen).

(Fortsettes på side 5.)



Figur 2: Friksjonsfri og virvelfri strømning rundt en sylinder med radius $r = a$ og senter i $(x, y) = (0, 0)$.

Oppgave 3 Virvlingsfri og friksjonsfri todimensjonal strømning

En virvlingsfri og friksjonsfri todimensjonal strømning rundt en sylinder med radius $r = a$ kan beskrives av hastighetspotensialet, her oppgitt i sylindriske koordinater,

$$\phi = U\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos(\theta). \tag{2}$$

3a Poeng: 10/100

Finn hastighetene $u_r\mathbf{e_r}$ og $u_\theta\mathbf{e}_\theta$. Vis at denne strømningen er uniform ved $r = \infty$.

3b Poeng: 10/100

Hvilke grensebetingelser er riktige å bruke på sylinderveggen for denne strømningen? Vis at grensebetingelsene er oppfylt.

3c Poeng: 10/100

Finn strømfunksjonen ψ og det komplekse hastighetspotensialet $w(z) = \phi + i\psi$ uttrykt via den komplekse variabelen $z = x + iy = re^{i\theta}$.

3d Poeng: 10/100

Bestem drag- og løft- kreftene per lengdeenhet som virker på sylinderen. (Hint: $dF_x = pa\cos(\theta)d\theta$, $dF_y = -pa\sin(\theta)d\theta$, der p er trykket.) Kommenter på svaret utifra hva vi vet om ideelle fluider.

SLUTT