

**INNFORING
I FLUIDMEKANIKK
MEK3230/4230**

Forelesninger
av Bjørn Gjevik

Matematisk Institutt
Universitetet i Oslo
Januar 2009

Innhold

1	Fluider og felt	1
1.1	Væsker, gasser og faste stoffer. Fluider.	1
1.2	Kontinuumshypotesen	2
1.3	Volumkrefter og flatekrefter. Spenninger. Isotrop trykk. Friksjonsfrie fluider	2
1.4	En sats om normalspenningene	4
1.5	Rom og posisjon	6
1.6	Skalarfelt. Gradient til en skalar. Ekviskalarflater	6
1.7	Vektorfelt. Feltlinjer. Strømlinjer.	8
1.8	Et uttrykk for hastighetsforskjellen mellom to nærliggende punkter i feltet	9
1.9	Divergens og virvling til en vektor. Fysikalske tolkninger	11
1.10	Sirkulasjon av en vektor	13
1.11	Noen regneregler for ∇ -operatoren	14
1.12	Øvingsoppgaver	14
2	De grunnleggende likninger for likevekt og bevegelse av fluider	17
2.1	Innledning	17
2.2	Lagranges og Eulers beskrivelse	17
2.3	Forflytning, hastighet og akselerasjon for en partikkel	18
2.4	Lokal og konvektiv akselerasjon. Partikkel derivasjon	19
2.5	Kontinuitetslikningen	21
2.6	Bevegelseslikningen	23
2.7	Tilstandsvariable og tilstandslikninger. Kompressibilitet og termisk utvidelseskoeffisient. Inkompressibel væske	26
2.8	Indre energi. Den termodynamiske energilikningen. Entropi. Isentropiske tilstandsendringer	28
2.9	Grenseflatebetingelser. Kinematiske og dynamiske betingelser	31
2.10	Øvingsoppgaver	33

3	Likevekt i fluider	37
3.1	Likevektbetingelser. Barotrop tetthetsfelt. Stabil og instabil likevekt	37
3.2	Likevekt i tyngdefeltet av en homogen inkompressibel væske . . .	39
3.3	Likevekt i tyngdefeltet av en ideal gass. Trykkfordelingen ved likevekt i atmosfæren. Den barometriske høydeformel	39
3.4	Betingelser for stabil likevekt i tyngdefeltet	42
3.5	Likevekt i roterende væske	43
3.6	Oppdriftskraften. Arkimedes' lov	45
3.7	Stabilitet av skip	46
3.8	Øvingsoppgaver	48
4	Stasjonær friksjonsfri strømning	53
4.1	Stasjonær friksjonsfri strømning	53
4.2	Bernoulli's likning	53
4.3	Kontinuitetslikningen for stasjonær strømning	55
4.4	Anvendelse av Bernoullis likning	56
4.4.1	Utstrømning av væske fra en tank	56
4.4.2	Innsnevring av vertikal væskestråle	57
4.4.3	Strøm i rør med innsnevring	59
4.4.4	Strøm i kanaler med ujevn bunn	59
4.4.5	Utstrømning av gass fra en trykkflaske	61
4.5	Øvingsoppgaver	62
5	Generell definisjon av ∇-operatoren. Integralsatser	67
5.1	Generell definisjon av gradient, divergens og virvling	67
5.2	Polare koordinatsystemer	68
5.3	∇ -operatorene i polarkoordinater	70
5.4	Gauss' sats	71
5.5	Greens sats	72
5.6	Stokes' sats	73
5.7	Øvingsoppgaver	74
6	Virvling og sirkulasjon	77
6.1	Virvellikningen	77
6.2	Kelvins sats	79
7	Virvelfri strømning	83
7.1	Virvelfri strømning	83
7.2	Hastighetspotensialet. Laplace-likningen.	83
7.3	Strømfunksjonen for plan strømning	84
7.4	Løsninger av Laplace-likningen i to dimensjoner	86
7.4.1	Rettlinjet strøm	87
7.4.2	Stagnasjonstrøm	88
7.4.3	Kilde og sluk	89
7.4.4	Punktvirvel	89

7.4.5	Dipolfeltet	91
7.5	Løsning av Laplace-likningen i tre-dimensjoner. Pulserende kule .	93
7.6	Andre løsninger av Laplace-likningen	94
7.7	Numerisk løsning av Laplace-likningen	95
7.8	Trykklikningen for virvelfri bevegelse	98
7.9	Strømning omkring sylinder	99
7.10	Kule i strøm	102
7.11	Strømning om flyving	104
7.12	Øvingsoppgaver	104
8	Impuls- og energilikningen	109
8.1	Transportteoremet	109
8.2	Impulslukningen	111
8.3	Eksempler på bruk av impulslukningen	113
8.3.1	Stasjonær strøm gjennom rørbend	113
8.3.2	Strøm mot faste plater og skovler	114
8.3.3	Strøm mot bevegelig plate. Effektoverføring	115
8.3.4	Strøm gjennom rørutvidelse. Trykktap	116
8.4	Alternativ måte for å utlede impulslukningen	116
8.5	Energilukninger for mekanisk energi og total energi	117
8.6	Eksempel på anvendelse av den mekaniske energilukningen. Sving- ninger i kommuniserende rør	119
8.7	Øvingsoppgaver	120
9	Bølger i fluider	123
9.1	Bølgebevegelse.	123
9.2	Lydbølger i væsker og gasser	125
9.3	Sjokkbølger	128
9.4	Grenseflatebetingelsene ved en væskeoverflate	130
9.5	Linearisering av grenseflatebetingelsene	132
9.6	Tyngdebølger ved en væskeoverflate. Overflatebølger	132
9.7	Lineariseringsbetingelser. Ikke-lineære effekter	138
9.8	Interne (indre) tyngdebølger	139
9.9	Gruppehastighet	142
9.10	Øvingsoppgaver	143
10	Strømning med friksjon	151
10.1	Newtons friksjonslov. Navier-Stokes likning	151
10.2	Laminær rørstrøm og grensesjiktstrøm	155
10.3	Turbulent strøm	158
10.4	Eksempler på beregning av rørstrøm	161
10.5	Strøm i porøse media	163
10.6	Øvingsoppgaver	164

11 Kjølvannsstrømning. Motstand på legemer	167
11.1 Sammendrag	167
12 Appendiks	173
12.1 Trykkenheter	173

Kapittel 1

Fluidier og felt

1.1 Væsker, gasser og faste stoffer. Fluidier.

Det er vanlig å dele materien inn i tre, væsker, gasser og faste stoffer. *Væsker* og *gasser* vil være kjennetegnet ved at disse ikke har noen bestemt form, slik at formen vil være avhengig av den beholderen som væsken eller gassen er i. Et *fast stoff* har vanligvis en bestemt form, men stoffet kan deformeres når det utsettes for påvirkninger. Utenom disse iøyenfallende forskjeller er det markante forskjeller i den molekylære oppbygning for de tre stofftypene. I en gass vil det være forholdsvis langt mellom molekylene, slik at de enkelte molekyler stort sett påvirker hverandre bare gjennom kollisjoner. I en væske er bindingen mellom molekylene forholdsvis svak, mens i et fast stoff kan disse bindingene være så sterke at molekylene får en mer eller mindre fast plass, som f.eks. i krystaller.

I mange tilfeller er det vanskelig å skille mellom væsker og faste stoffer. De fleste krystallinske faste stoffer vil nemlig oppføre seg som en væske der som påvirkningene varer i tilstrekkelig lang tid. Disse stoffene vil derfor flyte langsomt som en meget seig væske og innta forskjellige former alt etter påvirkning og ytre begrensninger. For påvirkninger som varer i relativt kort tid vil imidlertid også disse stoffene oppføre seg som faste elastiske stoffer som vender tilbake til sin opprinnelige form når påvirkningene forsvinner. Eksempler på slike stoffer er bek, is, glass og visse typer silikonkitt. Enkelte væsker stivner når de får stå i ro, blir geleaktige og får egenskaper som et fast elastisk stoff. Rører man i dette stoffet, vil det pånytt bli til en væske. Tiksotrope malinger er eksempel på slike væsker.

Skillet mellom væsker og gasser er vanligvis mer veldefinert. For det første er tettheten for væsker som regel mye større enn tettheten for gasser. Dessuten er gasser lettere sammentrykkbare (har større kompressibilitet) enn væsker. Likevel vil væsker og gasser i mange henseender kunne behandles under ett når det gjelder likevekt og dynamikk.

Som fellesnavn for væsker og gasser er navnet *fluid* (fluidet i bestemt form) kommet i bruk. Ordet er avledet av det latinske ordet fluidum. De mest vanlige eksempler på fluidier er vann (væske) og luft (gass). I det følgende skal vi behandle endel fundamentale lover for likevekt og bevegelser av fluidier.

1.2 Kontinuumshypotesen

Ut fra vår dagligdagse erfaring med fluidier som vann og luft er det naturlig for oss å oppfatte disse som *kontinuerlige medier* hvor de fysiske egenskaper som tetthet, hastighet og temperatur kan bestemmes på et hvert sted i mediet. Tilsvarende oppfatning har vi også av faste stoffer. Ved denne oppfatningen underslås det imidlertid at alle stoffer er bygd opp av diskrete molekyler. I en gass ved normalt trykk og temperatur vil for eksempel det tomme rommet mellom molekylerne være av større utstrekning enn selve molekylerne. Nå vil selv et svært lite volumelement inneholde et stort antall molekyler. Under normalt trykk og temperatur vil en terning av luft hvor sidekanten er 10^{-3} cm inneholde omkring $3 \cdot 10^{10}$ molekyler. Antallet molekyler innenfor et tilsvarende volumelement av vann vil være enda større. Selv for svært små volumelementer kan en derfor bestemme veldefinerte makroskopiske egenskaper for elementet. Dersom Δm for eksempel er massen av molekylerne innenfor volumelementet med volum $\Delta \tau$, så er den midlere tetthet

$$\rho_m = \frac{\Delta m}{\Delta \tau}$$

Vi tenker oss at $\Delta \tau$ er liten, men ikke mindre enn at volumelementet inneholder et stort antall molekyler, slik at middelverdien ρ_m er veldefinert, og vi lar denne verdien representere tettheten i volumelementets midtpunkt. Ved å dele mediet i små volumelementer kan vi således få bestemt den midlere tetthet i diskrete punkter som ligger nær inntil hverandre. Ved en utjevning av de punktvis bestemte verdier for ρ_m kan man derved komme fram til et idealisert kontinuerlig medium hvor tettheten er bestemt i et hvert punkt i mediet. På en lignende måte kan man tenke seg å definere andre av mediets fysiske egenskaper i et hvert punkt i mediet.

Vi skal i det følgende oppfatte væsker og gasser som kontinuerlige fluidier hvor de fysiske egenskaper er gitt i et hvert punkt i den delen av rommet som oppfylles av væsken eller gassen. Dette er *kontinuumshypotesen*, og den vil være gyldig så lenge som vi betrakter strømningsfenomener hvor de karakteristiske hastighetsvariasjoner foregår over distanser som er mye større enn den midlere avstand mellom molekylerne.

1.3 Volumkrefter og flatekrefter. Spenninger. Isotrop trykk. Friksjonsfrie fluidier

Vi betrakter et volumelement av et fluid, og elementet antas å være lite, men likevel stort nok til å inneholde et stort antall molekyler. De enkelte molekyler beveger seg med forskjellige hastigheter, og det vil stadig pågå en utveksling av molekyler gjennom volumelementets begrensingsflate. Denne utvekslingen vil i et visst tidsrom være begrenset til en tynn sone nær begrensingsflaten, mens det langt større antall av molekylerne innen elementet vil være det samme. En kan således med en viss rett snakke om et materielt væske- eller gass-element.

Elementet vil i alminnelighet være påvirket av krefter, og vi skiller mellom to typer krefter. For det første har vi *volumkrefter* som virker på massen innen-

for begrensingsflaten. Disse kreftene virker vanligvis over lange avstander og har sin motkraft (reaction) langt utenfor elementet. Dette gjelder for eksempel tyngdekraften og magnetiske krefter om fluidet består av ladede partikler. Den totale volumkraften på elementet vil være proporsjonal med elementets volum eller masse. I tillegg virker det på elementet *flatekrefter* som skyldes vekselvirkningen eller den gjensidige påvirkning mellom molekyler utenfor og innenfor elementets begrensingsflate. Disse kreftene er lokalisert til en tynn sone nær begrensingsflaten og kan for eksempel skyldes kollisjoner mellom molekyler.

Vi tenker oss at vi merker et flateelement i elementets begrensingsflate med areal $d\sigma$. Enhetsvektoren \mathbf{n} er normalen til flateelementet, og den velges med pilretning ut fra volumelementet som vektorareal. For å få en kort skrivemåte innfører vi betegnelsen

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n}d\sigma$$

På flateelementet virker det en kraft som vi betegner $d\mathbf{k}$. Størrelsen

$$P = \frac{d\mathbf{k}}{d\sigma}$$

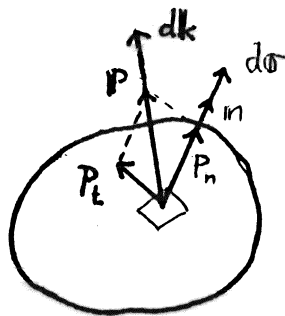
kaller vi for *spenningen* på flateelementet $d\sigma$, og spenningen har således dimensjon kraft pr. flateenhet. I alminnelighet vil spenningen være avhengig av flateelementets orientasjon. Spenningen P kan dekomponeres i en komponent P_n normalt til flaten som vi kaller *normalspenning* og en komponent P_t tangensialt til flaten som vi kaller *tangensialspenning*.

For de fleste væsker eller gasser som er i ro og i likevekt, viser det seg at spenningene i hovedsak består av normalspenninger. Dette medfører som vi skal se i neste avsnitt at størrelsen av normalspenningen må være uavhengig av flateelementets orientering. Vi sier derfor at det er et *isotrop trykk* p i mediet, og den tilsvarende kraften på flateelementet $d\sigma$ er gitt ved

$$d\mathbf{k} = -pd\boldsymbol{\sigma} \quad (1.1)$$

Det negative fortegnet i denne likningen er valgt for at et positivt trykk skal representere en kraft rettet inn mot flaten. Kraften på flaten σ finner vi ved å summere over alle flateelementene som flaten består av

$$\mathbf{k} = - \int_{\sigma} p d\boldsymbol{\sigma}$$



Figur 1.1: Kraftvirkningen på et væskeelement.

I SI-systemet er den internasjonale standardenheten for trykk og spenning Pascal (Pa) og $1Pa$ tilsvarer $1Nm^{-2}$. En rekke andre enheter er også i bruk; Bar, millibar, psi (pounds per square inch), torr og millimeter kvikksølv søyle. Millibar har vært mye brukt i meteorologiske observasjoner. Enheten psi er særlig i bruk i engelsktalende land og trykket i bildekk angies for eksempel ofte i psi enheter. Omregnings faktorene for de mest brukte trykkenhetene finnes i appendiks (12.1).

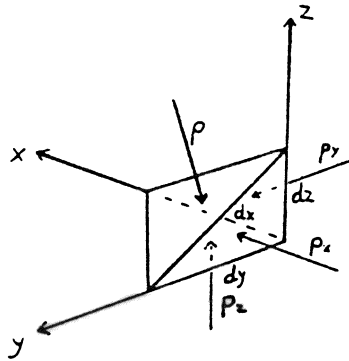
Når væsken eller gassen er i bevegelse, vil det vanligvis opptre tangensialspenninger forårsaket av friksjonen eller viskositeten i mediet. Dessuten vil viskositeten også virke på normalspenningen. Den *viskøse spenningen* vil komme i tillegg til det isotrope trykket, og spenningen som oppstår på grunn av friksjonen i væsken vil i alminnelighet være avhengig av flatelementets orientering. Viskositeten vil særlig ha stor betydning for strømning i nærheten av faste vegger hvor friksjonen hindrer væsken eller gassen å gli upåvirket langs veggen. I mange tilfeller kan vi imidlertid neglisjere viskositeten og regne spenningen i væsken eller gassen som et isotropt trykk. Dette gjelder for strømmer med tilstrekkelig stor hastighet langt borte fra faste begrensingsflater og for strømmer hvor strømhastigheten varierer tilstrekkelig langsomt fra et punkt til et annet. For de fleste strømningsfenomener av stor skala i atmosfæren og havet er dette oppfylt unntatt i tynne soner nær bakken eller nær bunnen. Også i tekniske anvendelser kan det mange ganger gi tilstrekkelig tilnærmedelse å neglisjere friksjonen. Selv om det vil være friksjon tilstede i alle væsker eller gasser, så vil det likevel være nyttig å studere friksjonsfri strømning av fluider.

Ved friksjonsfri strømning av væsker eller gasser opptre det aldri andre spenninger enn et isotropt trykk. Ofte blir betegnelsene *friksjonsfri* væske eller gass og *ideal* væske eller gass benyttet om en slik friksjonsfri strømning. Vi skal i dette kurset først behandle strømninger i friksjonsfrie væsker og gasser. Senere vil vi imidlertid ta for oss noen enkle eksempler på strømningsfenomener i fluider med friksjon.

1.4 En sats om normalspenningene

I forrige avsnitt nevnte vi at i en væske eller gass hvor det bare opptre normalspenninger, så vil spenningens størrelse være uavhengig av flatelementets orientering. Vi skal nå bevise dette, og vi velger et væskeelement av form som et rettvinklet tetraeder hvor tre av sideflatene faller i planene utspent av koordinataksene i et kartesisk koordinatsystem (se figur 1.2). På sideflaten som står normalt x -aksen, virker det en normalspenning p_x . På tilsvarende måte betegner p_y og p_z normalspenningen på sideflatene normalt y - og z -aksen. Spenningen på den fjerde sideflaten er p . Denne siden har et areal $d\sigma$, og retningstallene for flatenormalen er α, β, γ . Lengden av sidekantene av tetraedret som faller langs koordinataksene er dx, dy og dz som angitt på figuren. Vi har da at

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}dy dz &= d\sigma \cos \alpha \\ \frac{1}{2}dx dz &= d\sigma \cos \beta\end{aligned}$$



Figur 1.2: Spenningene på et væskeelement formet som et rettvinklet tetraeder.

$$\frac{1}{2}dx dy = d\sigma \cos \gamma$$

På grunn av spenningene virker det på tetraedret en kraft dk_x i x -retningen som er

$$dk_x = p_x \frac{1}{2}dy dz - p d\sigma \cos \alpha = (p_x - p)d\sigma \cos \alpha$$

På tilsvarende måte finner vi for kraften henholdsvis i y og z retning

$$dk_y = (p_y - p)d\sigma \cos \beta$$

$$dk_z = (p_z - p)d\sigma \cos \gamma$$

Skal tetraedret være i likevekt, må kreftene som virker på det være null, og det medfører at

$$p_x = p_y = p_z = p \quad (1.2)$$

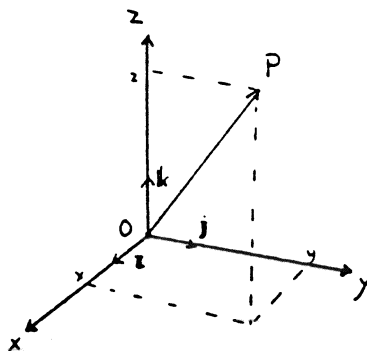
Siden dx , dy og dz er tenkt som infinitesimale små størrelser, betyr dette at spenningen i et vilkårlig punkt O i mediet er uavhengig av flatelementets orientering. Det er med andre ord et isotropt trykk i mediet.

Noen vil kanskje innvende at eventuelle volumkrefter som virker på tetraedret ikke er tatt med i likevektsbetrakningen som leder fram til (1.2). Da må vi huske at resultatanten av de totale volumkreftene som virker, vil være proporsjonal med volumet av tetraedret som er $\frac{1}{3}dx dy dz$. Siden dx , dy og dz er små størrelser, så vil volumkreftene være neglisjerbare i forhold til flatekreftene som for eksempel er proporsjonale til arealet $\frac{1}{2}dy dz$.

Til slutt vil vi nevne at (1.2) gjelder også om tetraedret er i akselerert bevegelse. Krever man at akselerasjonen for elementet skal være realistisk, d.v.s. holde seg endelig når dx , dy og dz er infinitesimale små størrelser, medfører dette at betingelsen (1.2) må være oppfylt. Dette kan begrunnes ved følgende resonnement.

For bevegelse i x -retningen må vi i henhold til Newtons andre lov ha at

$$\frac{\rho d\sigma h}{3} a_x = (p_x - p)d\sigma \cos \alpha$$



Figur 1.3: Kartesisk koordinatsystem med enhetsvektorer.

hvor ρ er den midlere tetthet for tetraedret og h er høyden av tetraedret regnet fra grunnflaten $d\sigma$ og a_x er akselerasjonen i x -retning. Av dette uttrykket følger at

$$a_x = \frac{3(p_x - p) \cos \alpha}{\rho h}$$

Dersom a_x skal holde seg endelig når $h \rightarrow 0$ må $p_x = p$. Tilsvarende argumentasjon for de to andre koordinatretningene gir $p_y = p_z = p$.

1.5 Rom og posisjon

Vi velger et origo O og betegner posisjonen for et vilkårlig punkt P i rommet med vektoren \mathbf{r} . I et kartesisk koordinatsystem har \mathbf{r} komponentene x , y og z og enhetsvektorene langs de samme tre akseretningene er henholdsvis \mathbf{i} , \mathbf{j} og \mathbf{k} som angitt i figur 1.3. Vi har da at

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Noen ganger vil vi benytte oss av skrivemåten x_i (hvor $i = 1, 2, 3$) for vektoren \mathbf{r} 's komponenter når vi arbeider med kartesiske koordinater. Det er da underforstått at x_1 tilsvarer x og x_2 tilsvarer y osv. Tilsvarende skrivemåte vil noen ganger bli benyttet for andre kartesiske vektorer.

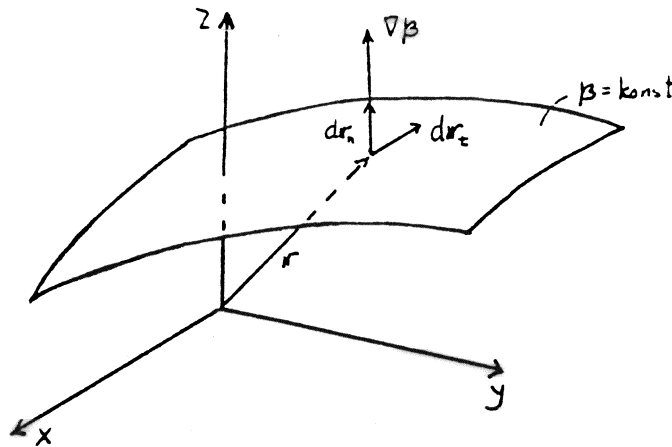
1.6 Skalarfelt. Gradient til en skalar. Ekviskalarflater

I en væske eller gass vil i alminnelighet skalare størrelser som trykk, tetthet eller temperatur være funksjoner av romkoordinatene og tiden. En skalar β som er funksjon av \mathbf{r} og t representerer et *skalarfelt* som er bestemt ved

$$\beta = \beta(\mathbf{r}, t)$$

For en fast verdi av t kan den romlige tilveksten i β når x , y og z endrer seg henholdsvis med en infinitesimal størrelse dx , dy og dz skrives

$$d\beta = \frac{\partial \beta}{\partial x} dx + \frac{\partial \beta}{\partial y} dy + \frac{\partial \beta}{\partial z} dz$$



Figur 1.4: Eksempel på en ekviskalarflate.

$d\beta$ kan derfor oppfattes som et produkt av to vektorer $\nabla\beta$ og $d\mathbf{r}$ slik at

$$d\beta = \nabla\beta \cdot d\mathbf{r} \quad (1.3)$$

Vektoren $\nabla\beta$ betegnes som *gradientvektoren* til skalaren β og i et kartesisk koordinatsystem har denne vektoren komponenter $\frac{\partial\beta}{\partial x_i}$ eller

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\mathbf{k} \quad (1.4)$$

og vektoren $d\mathbf{r}$ har komponenter dx_i . Ved et hvert tidspunkt bestemmer likningen $\beta(\mathbf{r}, t) = \text{konstant}$ et sett av *ekviskalarflater* ved forskjellige valg av konstanten. En slik flate er skissert i figur 1.4. Vi velger $d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_t$ hvor vektoren $d\mathbf{r}_t$ ligger i et tangentplan til ekviskalarflaten. Siden β er konstant på flaten, følger det fra (1.3) at

$$\nabla\beta \cdot d\mathbf{r}_t = 0$$

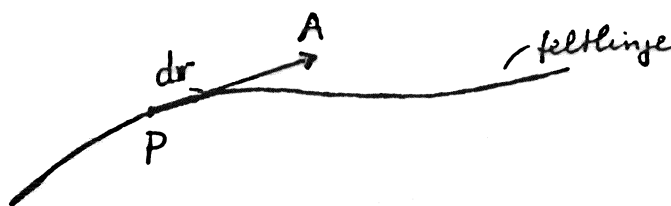
som viser at gradientvektoren $\nabla\beta$ står normal på ekviskalarflaten. Ved å velge $d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_n$ hvor $d\mathbf{r}_n$ er rettet langs normalen får vi

$$d\beta = \nabla\beta \cdot d\mathbf{r}_n$$

som viser at størrelsen av gradientvektoren er

$$|\nabla\beta| = \frac{|d\beta|}{|d\mathbf{r}_n|}$$

Dette viser at gradientvektoren er rettet mot ekviskalarflater med økende verdi av skalarstørrelsen og at $|\nabla\beta|$ er lik tilveksten pr. lengdeenhet av skalarverdien. Gradientvektoren definerer også retningen med størst tilvekst i skalarverdien.



Figur 1.5: Feltet kan fremstilles grafisk ved feltlinjer.

1.7 Vektorfelt. Feltlinjer. Strømlinjer.

Fysikalske størrelser som for eksempel hastighet, akselerasjon og krefter vil kunne beskrives med vektorer som er funksjon av romkoordinatene og tiden. En vektor \mathbf{A} som er funksjon av \mathbf{r} og t representerer et *vektorfelt*

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

Ved et bestemt tidspunkt vil feltet kunne fremstilles grafisk ved *feltlinjer*. Disse linjene har vektoren \mathbf{A} som tangent og de angir således retningen av \mathbf{A} i feltet. Dersom $d\mathbf{r}$ er et bueelement i et punkt P på en feltlinje, så er

$$\mathbf{A} \times d\mathbf{r} = 0 \quad (1.5)$$

Betegner vi \mathbf{A} 's komponenter i et kartesisk koordinatsystem med A_x , A_y og A_z henholdsvis langs x , y og z -aksen får vi fra (1.5)

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z} \quad (1.6)$$

Det er da forutsatt at A_x , A_y og A_z er forskjellige fra null. Relasjonene (1.6) gir et sett av differensiallikninger til bestemmelse av feltlinjene.

Dersom \mathbf{A} representerer hastigheten i en væske eller gass kaller vi de tilhørende feltlinjer for *strømlinjer*. For to-dimensjonale strømfelt hvor hastighetsvektoren er gitt ved $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ får vi fra (1.6)

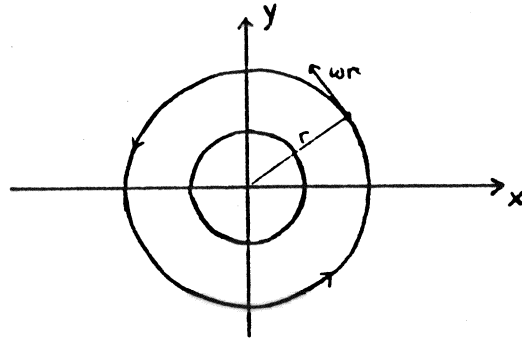
$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

som eventuelt kan omformes til

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

Dersom u og v er gitte funksjoner av x og y vil denne differensiallikningen bestemme et sett av strømlinjer $y = y(x, C)$ ved forskjellig valg av integrasjonskonstanten C . I det generelle tilfellet kan det være vanskelig å integrere denne differensiallikningen uten å måtte bruke numeriske metoder. Noen ganger er høyresiden i likningen slik at x og y avhengigheten kan skilles ut eller separeres i forskjellige funksjoner $G(x)$ og $F(y)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{G(x)}{F(y)}$$



Figur 1.6: *Feltlinjer for en væske som roterer som et stivt legeme.*

Da kan vi skrive

$$\int F(y)dy = \int G(x)dx$$

og analytiske uttrykk for strømlijene kan finnes dersom disse integralene kan regnes ut.

Ved et enkelt eksempel skal vi vise hvordan strømlijene kan bestemmes når hastighetsfeltet er kjent. For en plan bevegelse hvor hastigheten er gitt ved

$$\mathbf{v} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}$$

finner vi fra (1.6) at

$$-\frac{dx}{\omega y} = \frac{dy}{\omega x}$$

Vi multipliserer denne likningen med ωxy og får

$$-x dx = y dy$$

som kan skrives

$$d\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) = 0$$

Integrasjon av denne likningen gir

$$x^2 + y^2 = 2C$$

hvor C er en integrasjonskonstant. Strømlijene er altså konsentriske sirkler med sentrum i origo. Strømlijer og strømretning for $\omega > 0$ er skissert på figur 1.6. Hastighetsfordelingen i feltet tilsvarer at mediet roterer som stivt legeme med vinkelhastighet ω .

1.8 Et uttrykk for hastighetsforskjellen mellom to nærliggende punkter i feltet

I et kartesisk koordinatsystem betegner vi hastighetsvektoren og dens komponenter

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$$

hvor u , v og w er funksjoner av x , y , z og t . *Hastighetsforskjellen* mellom to punkter henholdsvis med posisjon $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ og \mathbf{r} er

$$d\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$$

hvor $d\mathbf{r}$ har komponenter dx , dy og dz .

Taylorutvikler vi komponentene i vektoren $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ etter potenser av x , y og z får vi

$$\begin{aligned} d\mathbf{v} = & \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \right) \mathbf{j} \\ & + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right) \mathbf{k} + O(|d\mathbf{r}|^2) \end{aligned}$$

hvor $O(|d\mathbf{r}|^2)$ er restleddene. Dersom P ligger nær O kan leddene $O(|d\mathbf{r}|^2)$ sløyfes. Matrisen

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

uttrykker den relative hastighetsforskjellen, og vektoren $d\mathbf{v}$ kan oppfattes som fremkommet ved en matrisemultiplikasjon

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

som vi skriver

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} dz = (\nabla \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{r} \quad (1.7)$$

Denne formelen gir tilveksten av vektoren \mathbf{v} mellom to punkter i avstand $d\mathbf{r}$ fra hverandre og er analog til formel (1.3) for tilveksten i et skalarfelt. Matrisen $\nabla \mathbf{v}$ kan skrives som en sum av to matriser, en symmetrisk matrise D_{sym} og en antisymmetrisk matrise D_{asym} slik at

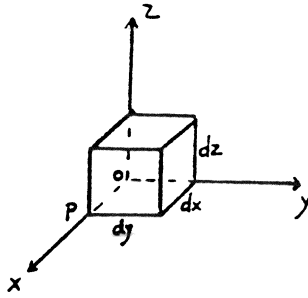
$$\nabla \mathbf{v} = D_{\text{sym}} + D_{\text{asym}} \quad (1.8)$$

hvor

$$D_{\text{sym}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

og

$$D_{\text{asym}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{pmatrix}$$



Figur 1.7: Ekspansjon av et materielt volumelement (epiped).

Hastighetsforskjellen $d\mathbf{v}$ består følgelig av to deler, en del som tilsvarer $D_{\text{sym}} \cdot d\mathbf{r}$ og en annen del som tilsvarer $D_{\text{asym}} \cdot d\mathbf{r}$. Ved utregning av produktene i likningen

$$d\mathbf{r} \cdot D_{\text{asym}} = \boldsymbol{\Omega} \times d\mathbf{r}$$

ser vi at den er oppfylt dersom

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (1.9)$$

Dette betyr at den delen av hastighetsfeltet $d\mathbf{v}$ som tilsvarer D_{asym} representerer en ren rotasjon om O med vinkelhastighet $\boldsymbol{\Omega}$. Vi skal senere gi en fysikalsk tolkning av den andre delen av feltet.

1.9 Divergens og virvling til en vektor. Fysikalske tolkninger

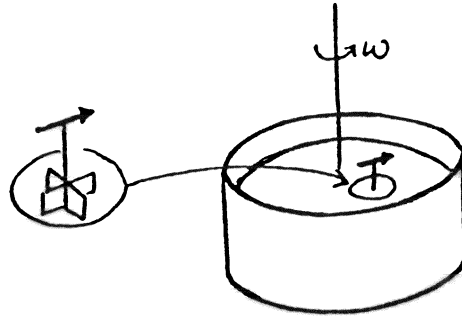
Visse differensialoperasjoner på en vektor forekommer ofte ved feltbeskrivelse. Dette gjelder i særlig grad skalarstørrelsene divergens og vektorstørrelsene virvling. Disse fremkommer blant annet ved lineære kombinasjoner av leddene i matrisen $\nabla \mathbf{v}$. *Divergensen* til en vektor \mathbf{A} betegner vi ved $\nabla \cdot \mathbf{A}$, og i kartesiske koordinater kan den skrives

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.10)$$

Divergensen til hastighetsfeltet \mathbf{v} uttrykker den relative volumendringen pr. tidsenhet av et infinitesimalt materielt volumelement. Vi betrakter et rettvinklet parallelt epiped med sidekanter dx , dy og dz og volum V som utvider seg ved ren ekspansjon. Epipedet er opprinnelig plassert med det ene hjørnet i origo. Sidekanten OP parallelt med x -aksen vil da i et tidsrom dt forlenges slik at den nye lengden blir

$$dx \left[1 + \frac{\partial u}{\partial x} dt \right]$$

hvor vi har sløffet produktleddene i dx som er antatt å være små. På tilsvarende måte finner vi lengden av sidekantene i y og z -retning og volumendringen av



Figur 1.8: Enkel innretning som viser den lokale virvlingen.

parallelepipedet blir

$$\begin{aligned} dV &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} dt\right) \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} dt\right) \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} dt\right) dx dy dz - dx dy dz \\ &\simeq \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dt dx dy dz \end{aligned}$$

Eller at

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} \quad (1.11)$$

Divergensen til hastighetsvektoren er derfor lik den relative volumendringen pr. tidsenhet. Vi legger også merke til at divergensen til hastighetsvektoren fremkommer som summen av diagonalledene i matrisen $\nabla \mathbf{v}$ og det kan vises at denne summen er invariant ved koordinattransformasjoner.

Virvlingen til en vektor \mathbf{A} betegnes med $\nabla \times \mathbf{A}$. Den er en vektor, og dens komponenter i et kartesisk koordinatsystem er gitt ved

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \mathbf{k} \quad (1.12)$$

Virvlingen til hastighetsvektoren \mathbf{v} vil vi betegne med \mathbf{c} slik at

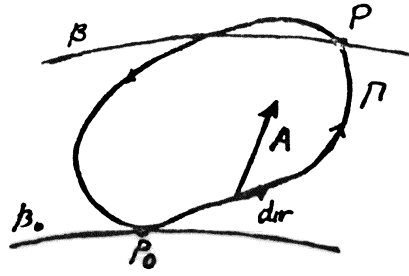
$$\mathbf{c} = \nabla \times \mathbf{v}$$

Ved å sammenlikne komponentene for vektoren \mathbf{c} med komponentene for vektoren $\boldsymbol{\Omega}$ i likning (1.9) ser vi at

$$\mathbf{c} = 2\boldsymbol{\Omega}$$

Dette innebærer at et infinitesimalt volumelement i væsken roterer som et stivt legeme med en vinkelhastighet som har samme retning som \mathbf{c} og størrelsen av vinkelhastigheten er $(\frac{1}{2}\mathbf{c})$.

Man kan benytte dette til å lage en enkel innretning som i visse tilfeller angir virvlingen. Det består av en liten skovel, og til skovelens akse er det montert en pil som vist på figur 1.8. Innretningen er laget slik at den kan flyte med skovelen neddykket og aksene i vertikal retning langs overflaten i den væsken man vil måle



Figur 1.9: Sirkulasjonen fremkommer ved integrasjon av A langs Γ .

virvlingen. Setter man for eksempel skovelen i et sirkulært kar som er fylt med væske og karet roterer langsomt med konstant vinkelhastighet ω om symmetriaksen, så vil også pilen rotere med vinkelhastighet ω . Hastighetsfeltet i væsken er i dette tilfellet med god tilnærming beskrevet med feltet vist på figur 1.6 og ved å regne tilhørende verdi av $\nabla \times \mathbf{v}$, ser en at virvlingen er 2ω .

1.10 Sirkulasjon av en vektor

En annen størrelse som er av stor betydning i analyse av vektorfelt er sirkulasjonen av en vektor. Vi betrakter en vilkårlig vektor \mathbf{A} og danner vektorproduktet

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

hvor $d\mathbf{r}$ er et bueelement av en lukket kurve Γ i feltet (se figur 1.9). Vi beregner så integralet

$$C = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.13)$$

hvor integraltegnet \oint betegner at vi har integrert en gang rundt kurven, og integrasjonsretningen defineres slik at vi omløper kurven i positiv omløpsretning. Størrelsen C kalles *sirkulasjonen* av vektoren \mathbf{A} om kurven Γ . Dersom \mathbf{A} kan skrives som gradienten til en skalar β slik at

$$\mathbf{A} = \nabla\beta$$

får vi ifølge (1.3)

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \nabla\beta \cdot d\mathbf{r} = d\beta$$

Integrerer vi $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ langs Γ fra et punkt P_0 hvor β har verdien β_0 til et vilkårlig punkt P hvor verdien av skalaren er β , får vi

$$\int_{P_0}^P \nabla\beta \cdot d\mathbf{r} = \beta - \beta_0$$

Dersom β er en entydig funksjon vil β få verdien β_0 når en kommer tilbake til punktet P_0 etter et omløp av kurven. Følgelig vil

$$C = \int_{\Gamma} \nabla\beta \cdot d\mathbf{r} = 0$$

som uttrykker at sirkulasjonen av gradienten til et entydig skalarfelt er null. Omvendt kan det vises at dersom vi vet at sirkulasjonen av en vektor om en vilkårlig lukket kurve i feltet er null, så er vektoren en gradientvektor.

1.11 Noen regneregler for ∇ -operatoren

La κ og β betegne to skalarstørrelser. Ved å benytte definisjonen (1.4) av gradientvektoren, kan det vises at

$$\nabla(\kappa + \beta) = \nabla\kappa + \nabla\beta \quad (1.14)$$

$$\nabla(\kappa\beta) = \kappa\nabla\beta + \beta\nabla\kappa \quad (1.15)$$

Likeledes at

$$\nabla\left(\frac{1}{\beta}\right) = -\frac{1}{\beta^2}\nabla\beta \quad (1.16)$$

Ved å benytte definisjonene av divergens og virvling, likning (1.10) og (1.12), kan det også vises at

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0 \quad (1.17)$$

$$\nabla \times (\nabla\beta) \equiv 0 \quad (1.18)$$

hvor \mathbf{A} er en vilkårlig vektor. Videre kan en vise at

$$\nabla \cdot (\kappa\mathbf{A}) = \nabla\kappa \cdot \mathbf{A} + \kappa\nabla \cdot \mathbf{A} \quad (1.19)$$

$$\nabla \times (\kappa\mathbf{A}) = \nabla\kappa \times \mathbf{A} + \kappa\nabla \times \mathbf{A} \quad (1.20)$$

I tillegg til relasjonene (1.14)–(1.20) finnes det en rekke andre utviklingsformler for ∇ -operatører som ofte kommer til anvendelse. Se for eksempel øvningsoppgave 10 og 11.

1.12 Øvingsoppgaver

1. Ved likevekt er trykket i en væske gitt ved formelen $p = p_0 + \rho g z$ hvor p_0 er lufttrykket over væsken, ρ er tettheten i væsken, g er tyngdensakselerasjon og z er den vertikale avstanden fra den horisontale væskeoverflaten ($z = 0$)
 - a) Finn trykkraften på en neddykket terning med sidekant a hvor toppflaten er horisontal og har avstand d fra overflaten.
 - b) Finn trykkraften på en neddykket sylinder med radius a og høyde H for de to tilfellene: a) Sylinderen er orientert med akse vertikalt og toppflaten har avstand d fra overflaten. 2) Sylinderen er orientert med akse horisontalt og sidekanten har avstand d fra overflaten.
 - c) Finn trykkraften på en neddykket kule med radius a og med sentrum i avstand d fra overflaten.
2. Finn og skisser strømlinjene for følgende hastighetsfelt

- a) $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$
 b) $\mathbf{v} = ay\mathbf{i} + bx\mathbf{j}$
 c) $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + bx\mathbf{j}$

hvor a og b er positive konstanter. Hva blir resultatet for b) dersom a er negativ?

3. Finn strømlinjene når

$$\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \nabla\beta \quad \text{der} \quad \beta = \beta(x, y)$$

4. Gitt hastighetsfeltet

$$\mathbf{v} = 2kx\mathbf{i} + 2ky\mathbf{j} - 4kz\mathbf{k}$$

der $k > 0$

- a) Finn strømlinjene i $x - z$ planet.
 b) Vis at strømmen er aksesymmetrisk og skisser strømlinjene.

5. Finn strømlinjene når

$$\mathbf{v} = -\frac{cy}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{cx}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$$

hvor c er en konstant.

6. Vi antar at temperaturfeltet i atmosfæren tilnærmet kan skrives $T = T_0 \frac{R}{r}$ hvor $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ er avstand fra origo som ligger i jordens sentrum. R er jordens radius og T_0 er temperaturen ved jordens overflate. Finn temperaturgradientens størrelse og retning ved jordoverflaten.

7. Finn gradientvektoren $\nabla\varphi$ når skalarfeltet $\varphi = Ae^{kz} \cos(kx - \omega t)$ hvor A, k, ω er konstanter. Hva blir divergensen til gradientvektoren?

8. Finn skalarfeltet $\beta(x, y, z)$ når gradientvektoren

$$\nabla\beta = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$$

9. Hastighetsfeltet gitt i 5) kan skrives $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ hvor φ er en funksjon av x og y . (Skalarfunksjon φ blir betegnet hastighetspotensialet.) Finn φ .

10. Vi innfører betegnelsen

$$\mathbf{A} \cdot \nabla\mathbf{B} \equiv A_x \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x} + A_y \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial y} + A_z \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial z}$$

Vis at

- a) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$
 b) $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \nabla \cdot \mathbf{B}$
 c) $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$

11. Benytt relasjonen i oppgave 10c til å vise at

$$\mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} = \nabla \frac{1}{2}v^2 + \mathbf{c} \times \mathbf{v}$$

hvor $\mathbf{c} = \nabla \times \mathbf{v}$.

Kapittel 2

De grunnleggende likninger for likevekt og bevegelse av fluider

2.1 Innledning

Et kontinuerlig medium kan vi tenke oss delt i elementer som er så små at hvert enkelt av disse elementene kan oppfattes som en partikkel. Mediet kan derfor betraktes som et system av et uendelig stort antall av små partikler. I det følgende skal vi uttrykke i matematisk form de grunnleggende fysiske lover og prinsipper som gjelder for et slikt system av partikler. Disse lovene er Newtons lov, lovene i termodynamikk og prinsippet om bevarelse av masse. Dessuten kommer relasjoner som beskriver de fysiske egenskaper ved mediet (tilstandslikninger).

2.2 Lagranges og Eulers beskrivelse

Det er to forskjellige måter å beskrive bevegelsen av fluider på. Ved den ene måten søker man å følge bevegelsen for hvert enkelt av de partikler som fluidet består av. Hver partikkel blir identifisert med det sett av romkoordinater (a, b, c) som gir partikkelens posisjon ved et bestemt tidspunkt $t = t_0$. Posisjonen for denne partikkelen ved et annet tidspunkt blir da en funksjon av a, b, c og t som vi kan skrive

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(a, b, c, t)$$

Denne beskrivelsen blir kalt *Lagranges beskrivelse* og i denne beskrivelsen er a, b, c og t å oppfatte som uavhengige variable, mens \mathbf{r} er en avhengig variabel. Har man for eksempel en rettlinjert uniform strøm U i x -aksens retning, så vil posisjonen for den partikkelen som er i punktet $(a, 0, 0)$ ved tiden $t = 0$ være gitt ved

$$x = a + Ut$$

Lagranges beskrivelse blir benyttet enkelte ganger, og vi skal komme nærmere tilbake til denne beskrivelsesmåten senere.

Det er den andre måten å beskrive bevegelsen på (*Eulers beskrivelse*) som er mest vanlig i bruk. I denne beskrivelsen er romkoordinatene x, y, z og tidskoordinaten å oppfatte som uavhengige variable. Alle avhengige variable som for eksempel hastighet og akselerasjon er uttrykt ved disse uavhengige variable. Den Eulerske beskrivelse er således en feltbeskrivelse hvor for eksempel hastigheten blir angitt i alle punkter i rommet.

Leonhard Euler (1707-1783) var født i Basel og studerte matematikk, teologi, orientale språk og medisin. Var en nær venn av Daniel Bernoulli (Se kapittel 4) og etterfulgte denne som professor i fysikk i St. Petersburg. Ble senere innvitert til Berlin av Fredrik den Store. Euler var en usedvanlig produktiv forsker og han skrev grunnleggende arbeider innen algebra, geometri, integral og differensial regning, optikk, hydrodynamikk og celest mekanikk. Han var en mester i å anvende matematikk til å beskrive fysiske fenomener.

Joseph Louis Lagranges (1736-1813) var født i Torino og ble utdannet der i den klassiske ånd og lærte seg matematikk på egen hånd. Etterfulgte Euler som professor i Berlin og etterfulgte sin forgjenger som datidens ledende matematiker. Lagranges innførte hastighetspotensialet og strømfunksjonen (se kapittel 7) som ble av fundamental viktighet for å beskrive strømfelter. Det vi nå kaller Euler og Lagranges beskrivelse av felt ble egentlig innført av Euler, men den siste beskrivelsesmetoden ble utforsket videre av Lagranges.

2.3 Forflytning, hastighet og akselerasjon for en partikkel

La \mathbf{r} være posisjonen for en bestemt partikkel som følger fluidet under bevegelsen. \mathbf{r} er da en funksjon av tiden og *partikkelens hastighet* er

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

Nå må partikkelens hastighet være lik felthastigheten på det stedet hvor partikkelen befinner seg slik at

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \quad (2.1)$$

Vi deriverer likningen (2.1) med hensyn på t , og vi husker på at \mathbf{v} er en funksjon av tiden, både ved at \mathbf{r} er en funksjon av t og ved at \mathbf{v} endrer seg i tiden på hvert sted i rommet. Resultatet blir

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

Størrelsen $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ er partikkelens akselerasjon som vi betegner med \mathbf{a} , og ved å benytte komponentformen av (2.1) kan vi skrive

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}$$

Vi skriver

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = u \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \quad (2.2)$$

og har da at partikkelens akselerasjon kan skrives

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (2.3)$$

Ved denne likningen er partikkelens akselerasjon uttrykt ved hastighetsfeltet. Vi skal i neste avsnitt gi en fysikalsk tolkning av dette viktige uttrykket for akselerasjonen.

Tilslutt skal vi nevne at partikkelens *forflytning* finner vi ved å integrere likning (2.1). Dette gir

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) dt \quad (2.4)$$

hvor \mathbf{r}_0 er partikkelens posisjon ved ved tiden $t = t_0$.

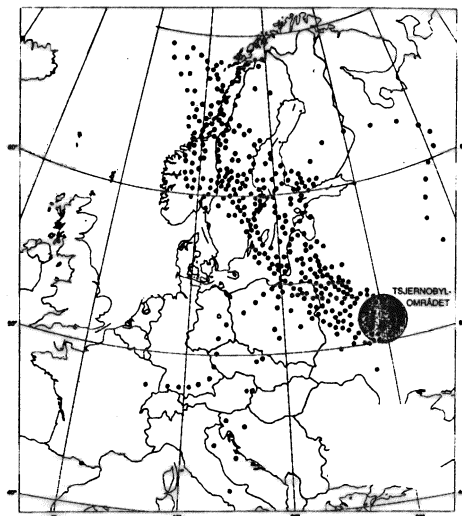
Formlene (2.1), (2.3) og (2.4) gir henholdsvis sammenhengen mellom partikkelens hastighet, akselerasjon og forflytning og det Eulerske hastighetsfeltet. Disse formlene setter oss blant annet i stand til å finne partikkelbanene eller trajektoriene for partikler som flyter i feltet. Selv om hastighetsfeltet \mathbf{v} er kjent, byr det i alminnelighet på store matematiske vanskeligheter å finne partikkelens posisjon av (2.4). Dette skyldes at den ukjente \mathbf{r} også inngår i integranden. Når vi ved senere anledninger i dette kurset skal finne partikkelbanene vil vi imidlertid innføre visse tilnærmelser som gjør det mulig å beregne partikkelbanene fra (2.4) på en enkel måte.

Dersom man kjenner hastighetsfeltet med tilstrekkelig nøyaktighet er det mulig å bestemme partikkelbanene ved numerisk integrasjon av (2.4) ved hjelp av data maskiner. Denne metoden blir brukt til å beregne spredning av forurensninger i havet og i atmosfæren. Eksempel på beregnede partikkelbaner for radioaktive utslipp fra den ødelagte atomreaktoren i Tsjernobyl er vist i figur 2.1

2.4 Lokal og konvektiv akselerasjon. Partikkel derivasjon

Vi skal nå gi en fysikalsk tolkning av leddene på høyre side i likning (2.3). Det første leddet

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$



Figur 2.1: Beregnede partikkelbaner for radioaktivt utslipp

representerer akselerasjonen som skyldes at hastigheten endrer seg i tiden på hvert sted i mediet. Dette leddet blir av den grunn betegnet *den lokale akselerasjon*. Tolkningen av det andre leddet

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$$

er mere brysom. Akselerasjonsbidraget fra leddet $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ blir betegnet som partikkelens *konvektive akselerasjon*. Den konvektive akselerasjon er knyttet til de romlige hastighetsendringer i feltet, og leddet vil kunne gi bidrag til akselerasjonen selv om hastighetsfeltet ikke endrer seg i tiden. Dette skyldes at i et felt hvor hastigheten endrer seg fra sted til sted, vil partikkelen akselereres eller retarderes når den beveger seg fra et sted til et annet.

I feltet skissert i figur 1.6 er det åpenbart at partiklene vil bevege seg i sirkulære baner med konstant hastighet, og partiklene opplever derfor en sentripetalakselerasjon som i størrelse er $\omega^2 r$ hvor r er radius i sirkelbanen. La oss nå beregne $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ i dette tilfellet. Siden \mathbf{v} er uavhengig av z , får vi fra (2.2) at

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = u \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}$$

For et hastighetsfelt som tilsvarende en sirkelbevegelse (se avsnitt 1.7) finner vi

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\omega^2 x \mathbf{i} - \omega^2 y \mathbf{j} = -\omega^2 \mathbf{r}$$

Leddene $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ gir altså i dette tilfellet partikkelens sentripetalakselerasjon. Vi kan oppfatte

$$\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

som en differensialoperator som for eksempel virker på vektoren \mathbf{v} . Denne operatoren vil opptre i så mange forbindelser i dette kurset at det er hensiktsmessig

å ha et eget symbol for den. Vi skriver

$$\frac{D}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (2.5)$$

I henhold til (2.3) kan vi derfor betegne partikkelens akselerasjon ved

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{dt} \quad (2.6)$$

Ved derivasjonen $\frac{D\mathbf{v}}{dt}$ finner vi endringen pr. tidsenhet av \mathbf{v} mens vi følger en bestemt partikkel, og denne derivasjonen har fått navnet den *partikkelderiverte*. Andre betegnelser som individuell derivert, matriellderivert, substansiell derivert osv. er også i bruk.

Den partikkelderiverte er selvsagt ikke begrenset til derivasjon av hastigheten slik som i likning (2.6). La oss si at vi vil finne endringen pr. tidsenhet av en skalarstørrelse T (som for eksempel kan representere temperaturen) når vi følger en bestemt partikkel. T er derved en funksjon av partikkelens posisjon $\mathbf{r}(t)$ og av tiden t . Følger vi en bestemt partikkel så er

$$T = T(\mathbf{r}(t), t)$$

Endringen av T pr. tidsenhet for denne partikkelen er derfor

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

og ved hjelp av (2.1) kan dette uttrykket skrives

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z}$$

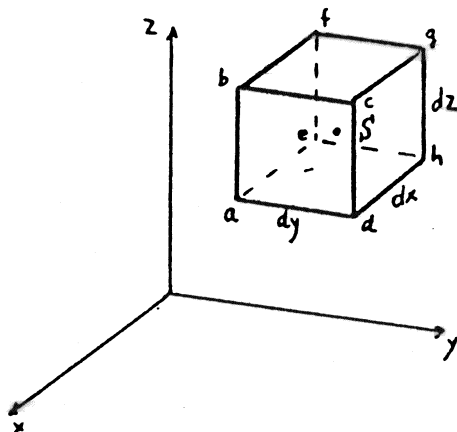
Derved ser vi at endringen i T pr. tidsenhet når vi følger en bestemt partikkel, er

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \quad (2.7)$$

som altså er den partikkelderiverte T .

2.5 Kontinuitetslikningen

Prinsippet om at masse hverken skapes eller ødelegges leder til en viktig relasjon mellom tetthetsfeltet ρ og hastighetsfeltet \mathbf{v} . Når vi skal utlede denne relasjonen, betrakter vi et avgrenset volum i rommet. Det vil strømme masse inn og ut av dette volumet. Dersom for eksempel innstrømningen er større enn utstrømningen, må i henhold til massens bevarelse, den totale masse innenfor volumet øke. Vi velger for enkelhets skyld et volum som har form som et rett-vinklet parallelepiped hvor sidekantene er dx , dy og dz og hjørnene i epipedet er betegnet med bokstaver fra a til h . La ρ_0 og \mathbf{v}_0 være verdien av ρ og \mathbf{v} i sentrum S av epipedet. Om vi antar at fluidet er homogent slik at vi kan se bort



Figur 2.2:

fra transport av masse ved diffusjon av oppløste stoffer så er massestrømmen (massefluksen) pr. flateenhet gitt ved

$$M = \rho v \quad (2.8)$$

La oss først betrakte massestrømmen i x -retning, som er $M_x = \rho u$. og den midlere verdien av massestrømmen *ut* gjennom sideflatene $abcd$ er derfor

$$(\rho u)_0 + \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \right]_0 \frac{dx}{2}$$

og massestrømmen *inn* gjennom sideflaten $fghe$

$$(\rho u)_0 - \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \right]_0 \frac{dx}{2}$$

Netto innstrømning av masse til volumet gjennom disse sideflatene i et tidsrom dt er derfor

$$- \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \right]_0 dx dy dz dt$$

Av dette uttrykket ser vi at dersom ρu har samme verdi på de to sideflatene (dvs. at $\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \right]_0 = 0$) så er det ingen netto innstrømning til volumet. På tilsvarende måte som ovenfor finner vi at netto innstrømning til volumet gjennom sideflatene som er normale til y -aksen og z -aksen, er henholdsvis

$$- \left[\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right]_0 dx dy dz dt$$

og

$$- \left[\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right]_0 dx dy dz dt$$

økningen av masse innenfor volumet i tidsrommet dt må kunne skrives

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} dt dx dy dz$$

Etter prinsippet om bevarelse av masse må økningen i masse innenfor volumet skyldes netto innstrømning av masse. Dette betyr at

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = - \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \right]_0 - \left[\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right]_0 - \left[\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right]_0$$

Vi gjenkjenner høyre siden i denne likningen som $-\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$ i punktet O og siden dette punktet er vilkårlig valgt, kan vi nå skrive

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (2.9)$$

Denne relasjonen mellom ρ og \mathbf{v} har fått navnet *kontinuitetslikningen*. I den form den er utledet her, gjelder den når massetransport ved diffusjon er neglisjerbar i forhold til den makroskopiske massestrømmen. Dette er tilfellet om gradienten i konsentrasjonen av eventuelt oppløste stoffer er tilstrekkelig liten.

Ved å derivere produktene på høyre side i likningen (2.9) kan vi ved hjelp av symboler som vi tidligere har innført, skrive kontinuitetslikningen

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.10)$$

Denne formen for kontinuitetslikningen sier at den relative tetthetsendringen for en partikkel er proporsjonal med divergensen til hastighetsfeltet. Etter det vi har utledet tidligere, tilsvarer $\nabla \cdot \mathbf{v}$ den relative volumendringen for et infinitesimalt volumelement. Likningen (2.10) er et nytt uttrykk for tilsvarende forhold. En ekspansjon, $\nabla \cdot \mathbf{v} > 0$, medfører at partikkelens tetthet avtar, og en kontraksjon $\nabla \cdot \mathbf{v} < 0$, medfører at partikkelens tetthet øker.

2.6 Bevegelseslikningen

Vi skal nå formulere Newtons lov for et fluid og vi skal til å begynne med bestemme kreftene som virker på det volumelementet som er vist i figur 2.2. På tilsvarende måte som i forrige avsnitt lar vi p_0 betegne trykkets verdi i punktet S , som er sentrum i epipedet. Trykkets midlere verdi på sideflaten $abcd$ er derfor

$$p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_0 \frac{dx}{2}$$

Dette medfører at det på denne flaten virker en trykkraft rettet i motsatt retning av x -aksen med størrelse

$$\left[p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_0 \frac{dx}{2} \right] dy dz$$

På sideflaten $efgh$ er trykkets midlere verdi

$$\left[p_0 - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_0 \frac{dx}{2} \right]$$

og trykkraften på sideflaten er

$$\left[p_0 - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_0 \frac{dx}{2} \right] dy dz$$

rettet i x -aksens retning. Kraftresultanten i x -retning på grunn av trykket blir følgelig

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_0 dx dy dz$$

På tilsvarende måte er resultantkraften på grunn av trykket i y -aksens og z -aksens retning henholdsvis

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_0 dx dy dz$$

og

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_0 dx dy dz$$

Den totale kraften som virker på volumelementet på grunn av trykket kan derfor skrives

$$d\mathbf{K}_p = -\left[\frac{\partial p}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\mathbf{k}\right] dx dy dz = -\nabla p dx dy dz \quad (2.11)$$

hvor vi har sløyet indeksen 0 siden punktet S kan være velges vilkårlig.

Foruten trykkraften kan det på volumelementet virke volumkrefter forårsaket av for eksempel tyngdekraften, treghetskrefter eller magnetiske krefter, og vi skriver resultanten av disse kreftene som

$$d\mathbf{K}_v = \mathbf{f}_v \rho_0 dx dy dz$$

hvor \mathbf{f}_v er volumkraften pr. masseenhet. Langs volumelementets begrensingsflate virker det flatekrefter som er uttrykk for de viskøse friksjonskreftene som virker på elementet. Vi betegner resultantene av disse kreftene ved

$$d\mathbf{K}_f = \mathbf{f}_{\text{frik}} \rho_0 dx dy dz$$

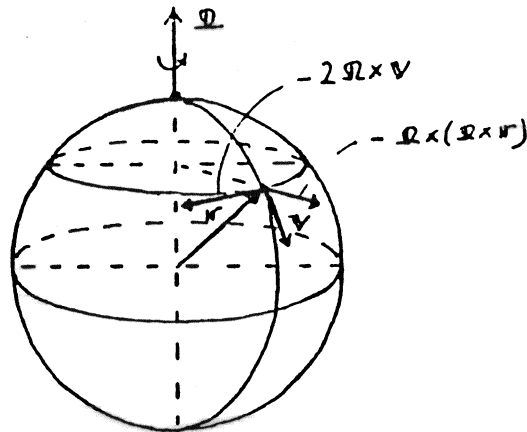
hvor vi har innført størrelsen \mathbf{f}_{frik} for friksjonskreftene pr. masseenhet.

Siden volumelementet er infinitesimalt lite, kan vi oppfatte det som en partikkel med masse $\rho_0 dx dy dz$ og vi betegner som før partikkelens akselerasjon med \mathbf{a} . Etter Newtons lov må vi da ha at partikkelens akselerasjon ganger partikkelens masse er lik resultanten av de kreftene som virker på partikkelen. Etter å ha dividert denne likningen med partikkelens masse og sløyet indeksen 0, får vi at

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{f}_v + \mathbf{f}_{\text{frik}} \quad (2.12)$$

Innfører vi nå uttrykket (2.6) for partikkelens akselerasjon i likning (2.12) kan *bevegelseslikningen* for fluidet skrives

$$\frac{D\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{f}_v + \mathbf{f}_{\text{frik}} \quad (2.13)$$



Figur 2.3: Roterende aksekors.

Slik denne likningen er formulert, er den en feltlikning som gjelder i et hvert punkt i mediet. For friksjonsfri strøm er $\mathbf{f}_{\text{frik}} = 0$ og den enklere utgaven av bevegelseslikningen (2.13) som da fremkommer blir ofte kalt Eulers likning siden han var den første til å sette den opp.

Til nå har vi tenkt oss å beskrive fluidets bevegelse i et aksekors som er et inertielsystem og hastigheten \mathbf{v} er fluidets hastighet relativt til dette inertialsystemet. Dersom vi beskriver fluidets bevegelse i forhold til et akselerert aksekors og \mathbf{v} er fluidets hastighet relativt til det akselererte system, så vil likningen (2.13) fortsatt gjelde. I dette tilfellet må vi imidlertid ta med treghetskreftene på grunn av aksekorsets akselerasjon i volumkreftene. For et aksekors som roterer med konstant vinkelhastighet Ω i forhold til inertialsystemet består treghetskreftene (pr. masseenhet) av Coriolis kraften: $-2\Omega \times \mathbf{v}$ og sentripetalkraften: $-\Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})$. Volumkreftene pr. masseenhet blir i dette tilfellet

$$-2\Omega \times \mathbf{v} - \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) + \mathbf{f}_v$$

hvor \mathbf{f}_v nå betegner eventuelt andre volumkrefter enn Corioliskraften eller sentrifugalkraften. Ved å innføre dette uttrykket for volumkreftene i (2.13) får vi bevegelseslikningen i et aksekors som roterer med konstant vinkelhastighet

$$\frac{D\mathbf{v}}{dt} + 2\Omega \times \mathbf{v} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{f}_v + \mathbf{f}_{\text{frik}} \quad (2.14)$$

Spesielt når man skal studere bevegelser i hav eller atmosfærer på jorden eller på andre roterende planeter og stjerner er likning (2.14) viktig. Den grenen av mekanikken som omhandler disse forhold blir betegnet geofysisk eller astrofysisk fluid (hydro) dynamikk.

Gaspard Gustave de Coriolis (1792–1843) født i Paris, utdannet ved kjente ingeniørskoler som Ecole Polytechnique og arbeidet senere ved det direktoratet for bru og veibygging (Corps des Ponts et Chaussées). Undersøkte akselerasjonen i roterende systemer og ga bidrag til teorien for strøm i åpne kanaler.

2.7 Tilstandsvariable og tilstandslikninger. Kompressibilitet og termisk utvidelseskoeffisient. Inkompressibel væske

Mellom tettheten (ρ), trykket (p) og temperaturen (T) i et fluid eksisterer det en relasjon som beskriver hvordan en av disse *tilstandsvariable* endrer seg om man endrer de to andre. Denne relasjonen betegnes *tilstandslikningen* og den uttrykker fysiske egenskaper ved fluidet. Vi kan skrive tilstandslikningen ved funksjonssammenhengen

$$\rho = \rho(p, T) \quad (2.15)$$

For små endringer i de tilstandsvariable ut fra en referansetilstand ρ_0 , p_0 og T_0 gjelder en Taylorutvikling av (2.15)

$$\rho = \rho_0[1 + \kappa(p - p_0) - \alpha(T - T_0)] \quad (2.16)$$

hvor κ og α er konstanter. Ved denne rekkeutviklingen har vi antatt at trykkdifferansen $p - p_0$ og temperaturdifferansen $T - T_0$ er så små at man kan sløyfe de høyere potenser i disse størrelsene. Koeffisientene

$$\kappa = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_0 \quad (2.17)$$

og

$$\alpha = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_0 \quad (2.18)$$

som inngår i (2.16) betegnes henholdsvis som *kompressibiliteten* ved konstant temperatur og den *termiske utvidelseskoeffisienten* ved konstant trykk. κ er den relative tetthetsendringen pr. trykkenhet som oppstår om man utsetter en prøve av fluidet for en trykkendring samtidig som man holder temperaturen fast. α er den relative tetthetsendringen pr. grad som oppstår om man endrer temperaturen av prøven, mens trykket er konstant.

Vanligvis er α positiv slik at en temperaturøkning medfører at tettheten avtar. Det finnes imidlertid eksempler på fluider hvor α er negativ. For vann hvor temperaturen er fra $0^\circ C$ til $4^\circ C$ er α negativ og tettheten tiltar med økende temperatur. Dette forhold er viktig for temperaturforholdene i innsjøer. Siden vann har størst tetthet ved $4^\circ C$ vil vann med denne temperaturen synke til bunns ved hø stavkjølingen. Bunnvannet i dype innsjøer vil derfor holde $4 - 5^\circ C$ hele vinteren mens overflatevannet avkjøles til $0^\circ C$ og fryser til is. Den termiske utvidelseskoeffisienten for vann varierer fra $-0.6 \cdot 10^{-4}/C$ ved $0^\circ C$ til $7.1 \cdot 10^{-4}/C$ ved $100^\circ C$. Ved $15^\circ C$ er $\alpha = 1.5 \cdot 10^{-4}/C$. Den relative tetthetsrelasjonen som følge av tempraturendringer på omkring $10^\circ C$ beløper seg derfor til omkring 2 promille ved vanlig romtemperatur. Selv om de tetthetsforskjeller som kan oppstå i vann som følge av temperaturforskjeller er svært små, vil disse tetthetsforskjeller ha stor betydning for strømningsfenomenen i innsjøer og i havet.

For alle kjente fluider er κ positiv, dvs. en trykkøkning tilsvarer en tetthetsøkning. Kompressibiliteten for de fleste væsker er liten og for vann under vanlige forhold er $\kappa = 5 \cdot 10^{-5}/\text{bar}$ eller $5 \cdot 10^{-10} m^2/N$. Dette betyr at en trykkendring som tilsvarer atmosfæretrykk ($\simeq 1 \text{ bar}$) gir en relativ tetthetsendring på ca. 0.05 promille. Tilsvarende små tetthetsendringer finner man for de fleste væsker.

Siden α og κ for væsker varierer forholdsvis lite med trykk og temperatur innenfor begrensede trykk- og temperatur-områder, så er (2.16) selv med konstante verdier for κ og α i mange tilfeller en god tilnærming til tilstandslikningen for væsker.

For gasser endrer κ og α seg forholdsvis raskt med temperaturen, og en er i de fleste tilfeller henvist til å bruke tilstandslikninger som gir en bedre beskrivelse av forholdene enn (2.16). En slik tilstandslikning er tilstandslikningen for en ideal gass som sier at

$$\rho = \frac{p}{RT} \quad (2.19)$$

hvor temperaturen er regnet etter den absolutte temperaturskala grader Kelvin ($^{\circ}K$), og R er gasskonstanten. For tørr luft er $R = 287 m^2 s^{-2} K^{-1}$. Likningen (2.19) beskriver forholdene med god tilnærming i en gass når man er langt borte fra tilstander hvor det opptrer faseoverganger. Likningen (2.19) vil for eksempel gjelde med god tilnærming i tørr luft, og for vanndamp som ikke er nær ved å kondenseres. Ved hjelp av (2.17), (2.18) og (2.19) finner vi at for en ideal gass så er kompressibiliteten ved konstant temperatur

$$\kappa = \frac{1}{p}$$

og den termiske utvidelseskoeffisienten ved konstant trykk

$$\alpha = \frac{1}{T}$$

Dette viser at ved vanlig trykk så er kompressibiliteten for en gass langt større enn for væsker. For tørr luft ved vanlig atmosfæretrykk ($1 \text{ atm} \simeq 1 \text{ bar}$) så er for eksempel $\kappa = 1/\text{bar}$ eller $10^{-5} m^2/N$. Den termiske utvidelseskoeffisienten ved romtemperatur er for en ideal gass er omkring 10 ganger større enn den tilsvarende verdien for vann. For tørr luft ved $15^{\circ}C$ er for eksempel $\alpha = 3.5 \cdot 10^{-3} K^{-1}$.

Unntatt når vi skal behandle strømningsfenomen hvor kompressibiliteten er spesielt viktig, som for eksempel forplantning av lydbølger i fluider og strømforholdene rundt svært raske fly, kan vi regne fluidet som inkompressibelt eller usammentrykkbart. Spesielt for væsker vil det i mange tilfeller være en god tilnærming at trykkendringer ikke fører til endringer i tettheten av væsken. Dersom tettheten i væsken ikke endrer seg som følge av trykkendringer ($\kappa = 0$) og temperaturen er den samme overalt i væsken, så er også tettheten den samme overalt i væsken. Vi sier da at væsken har *uniform tetthet*. Dette medfører at $\frac{D\rho}{dt} = 0$, og fra (2.10) følger det at

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.20)$$

Dette betyr at i strømmer av inkompressible væsker med uniform tetthet er hastighetsfeltet divergensfritt.

I noen tilfeller vil en kunne ha at hastighetsfeltet er divergensfritt selv om tettheten ikke er konstant i væsken. Dette vil være tilfelle når varmetransporten i vannet og oppvarmingen ved solstråling er av liten betydning. Under disse forutsetninger vil temperaturen og derved tettheten derved være tilnærmet uendret for den enkelte partikkel, og det betyr at $\frac{D\rho}{dt} = 0$. I en inkompressibel væske vil derfor hastighetsfeltet være divergensfritt når temperaturen og tettheten er bevart for den enkelte partikkel. Dette vil for eksempel gjelde for en rekke strømningsfenomener i hav, innsjøer og luft.

I sommerhalvåret vil for eksempel temperaturen i en dyp innsjø være omkring 15°C i et $20 - 30\text{ m}$ tykt overflatelag. Under dette laget vil man finne vann som stort sett har en temperatur omkring 5°C . På grunn av den termiske utvidelse av vannet vil en således i overflatelaget ha vann med forholdsvis liten tetthet mens det i bunnlaget er vann med noe større tetthet. Dersom en kraftig vind begynner å blåse vil vindraget føre det varme vannet i overflatelaget med seg i den retningen vinden blåser mens kalt bunnvann stiger opp mot overflaten der hvor det varme vannet har blitt transportert vekk. Under denne prosessen vil vannpartiklene stort sett beholde sin opprinnelig temperatur. Dette skjer blant annet i Mjøsa hvor kraftig sørlig vind kan føre til store temperaturfall når kalt bunnvann bringes opp til overflaten ved Minnesund i sørenden av innsjøen.

For en inkompressibel væske vil betingelsen

$$\frac{D\rho}{dt} = 0$$

sammen med bevegelseslikningen (2.13) og betingelsen (2.20) gi i alt fem skalarlikninger til bestemmelse av de fem ukjente ρ , p , u , v og w (vi antar at kreftene \mathbf{f}_v og \mathbf{f}_{frik} i bevegelseslikningen er kjent). I dette tilfellet har vi altså formulert et sluttet sett av likninger som bestemmer de ukjente parametrene. Dersom tetthetsendringene i fluidet er uniformt er det bare fire ukjente, og bevegelseslikningen sammen med betingelsen (2.20) vil være tilstrekkelig.

I de tilfeller hvor temperaturen inngår som en ukjent, trenger vi i alminnelighet ytterligere en likning til å beskrive fluidets tilstand. Vi skal se nærmere på dette i neste avsnitt.

2.8 Indre energi.

Den termodynamiske energilikningen.

Entropi. Isentropiske tilstandsendringer

I alle stoff er det energi knyttet til molekylene i form av kinetisk energi i den uordnede molekylære bevegelse og potensiell energi på grunn av krefter som virker mellom molekylene. Denne energien kalles *indre energi* og vi skal betegne

den indre energi pr. masseenhet med e . Det kan vises at den indre energien er en tilstandsvariabel som kan uttrykkes entydig ved to av de andre tilstandsvariable. En relasjon mellom e og for eksempel p og T

$$e = e(p, T)$$

er derfor en tilstandslikning på lik linje med tilstandslikningen (2.15). I følge termodynamikkens første hovedsetning er endringen i den indre energi pr. tidsenhet for en viss stoffmengde lik tilført varme pr. tidsenhet fratrukket det arbeidet pr. tidsenhet som er utført av stoffmengden på omgivelsene. For en fluid partikkel kan vi derfor skrive

$$\frac{De}{dt} = q - w \quad (2.21)$$

hvor q og w er henholdsvis tilført varme og utført arbeid pr. mass- og tids-enhet.

Den varmemengde q som tilføres partikkelen pr. tidsenhet kan for eksempel skyldes varmeledning fra omliggende deler av fluidet, eller absorpsjon av stråling. Varme produsert ved radioaktive prosesser kan også gi varmetilførsel til partikkelen. Vi skal i denne omgang regne q som kjent uten at vi nå går nærmere inn på hvordan den kan spesifiseres for de forskjellige prosessene som er nevnt ovenfor.

Fra termodynamikk vet vi at q også kan uttrykkes ved entropiendringen slik at

$$q = T \frac{Ds}{dt}$$

hvor s er entropien pr. masseenhet i fluidet. Entropien er en tilstandsvariabel.

Vi skal her nøye oss med å sette opp uttrykket for w i et friksjonsfritt fluid hvor spenningene er gitt ved det isotrope trykket.

Dersom partikkelen har masse m og volum $\tau = m/\rho$ så er endringen i partikkelens volum pr. tidsenhet

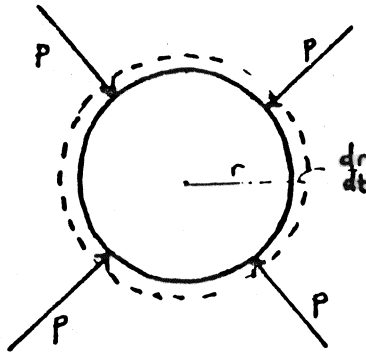
$$\frac{D\tau}{dt} = \frac{D}{dt} \left(\frac{m}{\rho} \right) = -\frac{m}{\rho^2} \frac{D\rho}{dt}$$

fordi m er konstant for en og samme fluidpartikkel. Volumendringen utføres mot det isotrope trykket, og det medfører at det utføres et arbeid mot omgivelsene pr. tids- og masse-enhet som er

$$w = \frac{p}{m} \frac{D\tau}{dt} = -\frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{dt}$$

Vi innser riktigheten av dette for eksempel ved å betrakte en kuleformet partikkel som ekspanderer (se figur 2.4). Setter vi uttrykket for w inn i (2.21) kan den termodynamiske energilikningen for en partikkel av et friksjonsfritt fluid skrives

$$\frac{De}{dt} = q + \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{dt} \quad (2.22)$$



Figur 2.4: Arbeid utføres på omgivelsene pga. partikkelens endring av volum.

Dersom q er kjent vil likningen (2.22) sammen med kontinuitetslikningen, bevegelseslikningen og tilstandslikningen utgjøre et sett av seks likninger til bestemmelse av de seks ukjente størrelsene ρ , p , T , u , v og w . I kapittel 8 vil vi foreta en mer fullstendig diskusjon av de forskjellige energilikninger som gjelder for fluider og dessuten gi en mer generell utledning av trykkreftenes arbeid.

Det er spesielt en tilstandsendring som vi vil få bruk for å studere mer inngående. Dette gjelder strømmingstilstander hvor den enkelte fluidpartikkel blir oppvarmet eller avkjølt på grunn av volumendringer, samtidig som dette foregår uten at det er varmetilførsel av betydning til partikkelen. Dette gjelder for eksempel når varmetransport ved varmeledning kan neglisjeres. For slike tilstandsendringer setter vi $q = 0$, og siden dette medfører at entropien er konstant, blir disse tilstandsendringene betegnet som *isentropiske* eller *adiabatiske* tilstandsendringer.

Eksperiment viser at for en gass under vanlige forhold avhenger den indre energien bare av temperaturen. For en ideal gass kan det vises utfra lovene i termodynamikk at dette er tilfellet. Vi setter derfor

$$e = e_0 + c_v(T - T_0) \quad (2.23)$$

hvor e_0 er den indre energi pr. masseenhed ved temperaturen T_0 og c_v er den spesifikke varmekapasitet for konstant volum. Vi har her regnet c_v som konstant i temperaturområdet fra T_0 til T . Endringen i indre energi for en partikkel kan ved hjelp av relasjonen (2.23) uttrykkes ved temperaturendringen. Ved differensiering av (2.23) får vi

$$De = c_v DT$$

og fra tilstandslikningen (2.19)

$$DT = \frac{1}{R\rho} \left(Dp - \frac{p}{\rho} D\rho \right)$$

Innsatt i (2.22), med $q = 0$, leder dette til

$$\frac{Dp}{p} = \gamma \frac{D\rho}{\rho} \quad (2.24)$$

hvor $\gamma = 1 + R/c_v$ er adiabatkonstanten. Dette viser at størrelsen

$$\frac{\rho^\gamma}{p} = \text{konstant}$$

for en partikkel, og vi får

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (2.25)$$

hvor ρ_0 og p_0 er samhørende referanse-verdier for tetthet og trykk. Fra tilstandslikningen for isentropiske prosesser (2.25) kan vi bestemme kompressibiliteten κ_s ved konstant entropi. Vi finner at

$$\kappa_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right) = \frac{1}{p\gamma} = \frac{\kappa}{\gamma} \quad (2.26)$$

hvor κ er kompressibiliteten ved konstant temperatur. Nå er for de fleste gasser $\gamma > 1$. For monatomiske gasser er $\gamma = 5/3$ og for diatomiske gasser (luft) er $\gamma = 1,4$. Relasjonen (2,26) viser altså at for en ideal gass er kompressibiliteten ved konstant entropi mindre enn ved konstant temperatur. For væsker er kompressibiliteten ved konstant entropi nær lik kompressibiliteten ved konstant temperatur.

2.9 Grenseflatebetingelser. Kinematiske og dynamiske betingelser

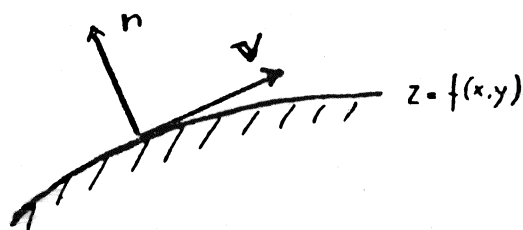
Vi har nå formulert et tilstrekkelig antall likninger til bestemmelse av de parametrene som beskriver fluidets tilstand og bevegelse. Disse likningene er differensiallikninger, og løsningene vil inneholde ubestemte integrasjonskonstanter i form av ukjente funksjoner eller konstanter. For å få fastlagt entydige løsninger trenger vi i alminnelighet betingelser som beskriver forholdene der hvor fluidet grenser inn til vegger eller langs skilleflater mellom forskjellige fluider, for eksempel luft og vann. Slike betingelser går under navnet *grenseflatebetingelser* og en skiller mellom *kinematiske* grenseflatebetingelser som sier noe om hastighetsfeltet ved grenseflaten, og *dynamiske* grenseflatebetingelser som sier noe om spenningen eller trykket ved grenseflaten. På det nåværende stadium skal vi ikke gi noen uttømmende diskusjon av de forskjellige betingelser som kan komme til anvendelse. Vi vil innledningsvis bare nevne endel eksempler på grenseflatebetingelser og vi skal komme tilbake til andre typer av betingelser etter hvert som vi får bruk for disse.

Ved en fast udeformerbar vegg som fluidet ikke kan strømme gjennom så må hastighetskomponenten normalt veggens være null. Dette må gjelde i et hvert punkt langs veggens. Vi skal vise hvordan dette kravet kan formuleres matematisk. Veggens tenkes beskrevet av flaten

$$z = f(x, y)$$

som har flatenormal

$$\mathbf{n} = -\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}$$



Figur 2.5: I et friksjonsfritt fluid er normalhastigheten null ved veggen.

Kravet om at hastighetskomponenten normalt veggen er null kan skrives

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{for } z = f(x, y) \quad (2.27)$$

eller

$$u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} = w \quad \text{for } z = f(x, y) \quad (2.28)$$

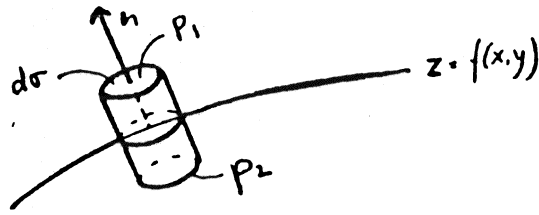
Dette er et eksempel på en kinematisk grenseflatebetingelse ved en fast ugjennomstrømbar vegg. Denne betingelsen sier altså at hastigheten i fluidet i nærheten av veggen er rettet langs veggen. Skal man ha en hastighet tangensielt til veggen så forutsetter det at fluidet ikke hefter ved veggen. I virkeligheten vil alle fluider hefte ved vegger slik at også hastighetskomponenten tangensielt til veggen er null, om man går tilstrekkelig nær inn mot veggen. Ofte vil virkningen av dette friksjonsheftet bare være merkbart i et tynt sjikt (grensesjikt), og dersom man er interessert i å studere bevegelsen utenfor dette sjiktet, så kan vi regne som om hastigheten ved veggen er rettet tangensielt til veggen. I slike tilfeller kan vi derfor nøye oss med å bruke betingelsen (2.27) som da gjelder for friksjonsfri strømning. Skal man derimot bestemme bevegelsen i det sjiktet hvor friksjonsheftet er merkbart, så må man kreve

$$\mathbf{v} = 0 \quad \text{for } z = f(x, y) \quad (2.29)$$

Denne betingelsen sier at det både er heft ved veggen og dessuten at det ikke er gjennomstrømning gjennom veggen.

Ved skilleflaten mellom de to fluider vil det i alminnelighet være nødvendig å gi både kinematiske og dynamiske grenseflatebetingelser. Vi skal forutsette at de to fluidene ikke blander seg, slik at det hele tiden er mulig å identifisere skilleflaten. I denne omgang vil vi bare behandle en enkelt form av den dynamiske grenseflatebetingelse ved en slik skilleflate, som vi beskriver med flaten $z = f(x, y)$. Vi betrakter et sylindereformet volumelement med endeflater $d\sigma$ og høyde dh . Elementet ligger i skilleflaten med en endeflate på hver side av skilleflaten og akse rettet langs flatenormalen \mathbf{n} . Trykket på de to endeflatene er henholdsvis p_1 og p_2 . Dersom vi kan neglisjere overflatespenning og eventuelle friksjonsspenninger, så er kraften som virker på elementet i \mathbf{n} -retning

$$(p_2 - p_1) d\sigma$$



Figur 2.6: Et sylinderelement i skilleflaten mellom to fluider.

Denne kraften må gi elementet en akselerasjon, a , i \mathbf{n} -retning. I henhold til Newtons lov er

$$a \rho d\sigma dh = (p_2 - p_1) d\sigma$$

hvor ρ er den midlere tetthet for elementet. Dette gir

$$a = \frac{p_2 - p_1}{\rho dh}$$

Lar vi $dh \rightarrow 0$ så vil $a \rightarrow \infty$ dersom ikke samtidig $p_2 \rightarrow p_1$. Vi vet fra observasjoner at det ikke kan oppetre uendelig store akselerasjoner ved skilleflater av den art det her er tale om. Derfor må vi ha at

$$p_1 = p_2 \quad \text{for} \quad z = f(x, y) \tag{2.30}$$

Dette betyr at det isotrope trykket i de to fluider har samme verdi på hvert sted langs skilleflaten mellom fluidene. Det må understrekes at betingelsen (2.30) bare gjelder når friksjonsspenninger og overflatespenning kan neglisjeres og den kan således bare brukes i tilfeller hvor strømmingen kan regnes som friksjonsfri.

2.10 Øvingsoppgaver

1. Gitt et todimensjonalt hastighetsfeltet

$$\mathbf{v} = \alpha x \mathbf{i} + \alpha y \mathbf{j}$$

hvor α er en positiv konstant

- a) Sett opp komponentlikningene for hastigheten av en væskepartikkel i feltet. Bestem banen for partikkelen som ved tiden $t=0$ er i punktet $O(x_0, y_0)$. Hint: Elliminer tiden ved å dividere komponentlikningene med hverandre.
- b) Finn strømlinjene og vis at disse er identiske med partikkelbanene.
- c) Finn tiden som det tar for en partikkel å bevege seg fra punktet $O(x_0, y_0)$ til punktet $P(x_1, y_1)$ langs banen.
- d) Finn akselerasjonen for en partikkel i feltet. Hva blir resultatet om α er funksjon av tiden.

2. Vis at

$$\text{a) } \frac{D}{dt}(\lambda \mathbf{A}) = \lambda \frac{D\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{A} \frac{D\lambda}{dt}$$

$$\text{b) } \frac{D}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \frac{D\mathbf{B}}{dt} + \mathbf{B} \cdot \frac{D\mathbf{A}}{dt}$$

$$\text{c) } \frac{D}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \frac{D\mathbf{B}}{dt} + \frac{D\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B}$$

hvor λ , \mathbf{A} , \mathbf{B} er henholdsvis skalar og vektorer som avhenger av romkoordinatene og tiden.

3. Prisen i kroner pr. kilo for et parti norsk oppdrettslaks som kjøres med trailer fra Norge til kontinentet kan beregnes etter følgende formel

$$P = 40 + 5 \cdot 10^{-2}x - 10t$$

hvor x er avstanden i kilometer sørover fra Trondheim og t er tiden i døgn. Traileren holder i gjennomsnitt en fart $v = 600 \text{ km}$ pr. døgn. Bruk teorien for materiell derivert og

- Bestem endringen i verdien av laksen.
- Hvor mye av prisendringen skyldes alder og hvor mye skyldes forskjell i markedspris?
- Dersom det oppstår forsinkelser hvor fort må traileren minst kjøre for at verdien av laksen ikke skal avta?

4. Finn den lokale og den konvektive akselerasjonen for hastighetsfeltet

$$\mathbf{v} = \frac{x}{1+t} \mathbf{i} + \frac{2y}{1+t} \mathbf{j} - \frac{3z}{1+t} \mathbf{k}$$

5. Gitt hastighetsfeltet

$$\mathbf{v} = kx\mathbf{i} + 2ky\mathbf{j} - 3kz\mathbf{k}$$

hvor k er en positiv konstant

- Vis at feltet representerer en mulig strøm for en inkompressibel væske.
- Bestem akselerasjonen for en partikkel som følger strømmen.
- Finn trykkgradientens størrelse og retning når vi forutsetter at trykkraften er den eneste kraften som virker i feltet.

6. Gitt det to-dimensjonale hastighetsfeltet

$$\mathbf{v} = \frac{Q}{r^2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$$

hvor $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ og Q er en konstant.

- Vis at feltet representerer en mulig strøm for en inkompressibel væske og finn strømlinjene.

- b) Finn massestrømmen gjennom en sylinderflate med sentrum i origo og akse rettet normalt x, y -planet.
 c) Finn akselerasjonen for en væskepartikkel i feltet.

7. Vis at grenseflatebetingelsen (2.27)

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$$

ved en fast vegg $z = f(x, y)$ kan skrives

$$\frac{D}{dt} [z - f(x, y)] = 0.$$

8. I en inkompressibel væske er hastighetsfeltet gitt ved $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$, hvor $u = Cx^2yzt$ og $v = y^2z - Cxy^2zt$. t er tiden og C er en konstant. Finn w .
9. Homogen inkompressibel væske strømmer stasjonært gjennom et sirkulært rør med variabel radius

$$R(x) = a + (k/a)x^2.$$

Vis at tiden som en væskepartikkel bruker på veien fra $x = -a$ til $x = a$ er gitt ved

$$\frac{2a}{V(1+k)^2} \left(1 + \frac{2}{3}k + \frac{1}{5}k^2 \right)$$

der V er hastigheten ved $x = -a$. (k antas så liten at bevegelsen er tilnærmet endimensjonal, og hastigheten regnes konstant over tverrsnittet).

Kapittel 3

Likevekt i fluider

3.1 Likevektbetingelser. Barotropt tetthetsfelt. Stabil og instabil likevekt

Vi sier at fluidet er i likevekt dersom summen av kreftene som virker på den enkelte partikkel er null. Ved likevekt vil det ikke opptre akselerasjoner på noe sted i feltet, og fra bevegelseslikningen (2.13) følger at

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{f}_v + \mathbf{f}_{frik} = 0$$

Nå vil størrelsen av friksjonskreftene, som vi senere skal se, være avhengige av at det eksisterer hastighetsforskjeller i mediet. For væsker og gasser som er i ro og likevekt vil vi derfor kunne sette $\mathbf{f}_{frik} = 0$, og likevektbetingelsene kan derfor skrives

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{f}_v = 0 \quad (3.1)$$

La oss nå anta at volumkreftene \mathbf{f}_v kan avledes av et potensial ϕ slik at

$$\mathbf{f}_v = -\nabla\Phi$$

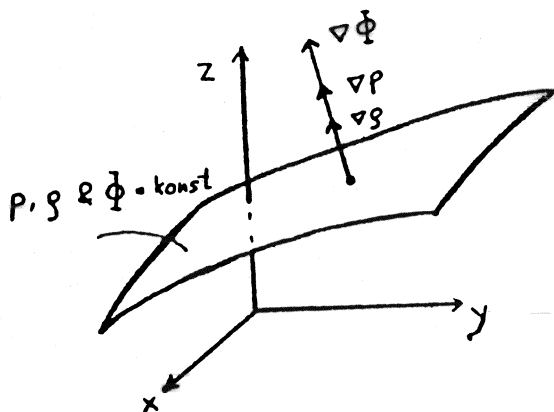
Dette vil for eksempel være tilfellet for tyngdekraften og for sentrifugalkraften dersom \mathbf{f}_v også omfatter treghetskrefter. Innfører vi dette uttrykket for \mathbf{f}_v i likevektbetingelsen så kan den skrives

$$\nabla p + \rho\nabla\Phi = 0 \quad (3.2)$$

Feltet er nå beskrevet ved tre skalarstørrelser p , ρ og Φ og vi betegner ekvivalarflatene for disse størrelsene henholdsvis som *isobarflater*, *ekvidenseflater* og *nivåflater*. Dersom vi multipliserer likningen (3.2) vektorielt med $\nabla\Phi$ får vi

$$\nabla p \times \nabla\Phi = 0$$

Dette viser at ved likevekt så har isobarflater og nivåflater flatenormaler med samme retning. Siden dette gjelder i alle punkt i feltet betyr det at isobarflatene og nivåflatene må være sammenfallende ved likevekt. Det viser seg at også



Figur 3.1: Ved likevekt er isobar-, nivå- og ekvidensflater sammenfallende.

ekvidensflatene faller sammen med isobar- og nivåflatene. For å vise dette skal vi ta hvirvlingen til vektorene som inngår i (3.2). Siden $\nabla \times (\nabla p) \equiv 0$ (se (1.18)) får vi

$$\nabla \times (\rho \nabla \Phi) = 0$$

Ved å benytte formlene (1.20) samt (1.18) kan likningen ovenfor skrives

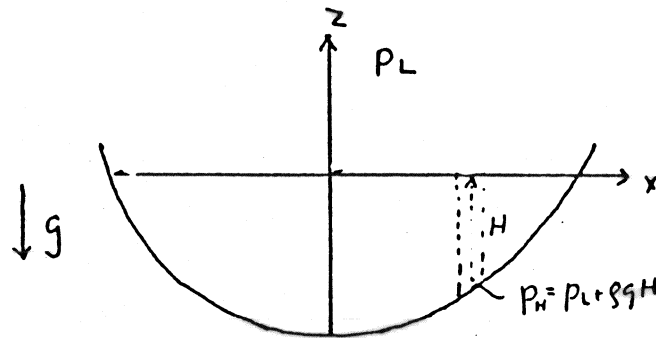
$$\nabla \rho \times \nabla \Phi = 0$$

Dette viser at flatenormalen for ekvidens flatene har samme retning som flatenormalen for nivåflatene.

Ved likevekt faller altså isobar-, nivå- og ekvidensflater sammen. Det betyr at for eksempel tettheten må kunne uttrykkes som en funksjon av trykket som vi skriver

$$\rho = \rho(p) \tag{3.3}$$

Vi sier at tetthetsfeltet ved likevekt er *barotrop* og relasjonen (3.3) betegnes en *barotropirelasjon*. Selv om betingelsen (3.1) sikrer at fluidet er i likevekt, så gjenstår det å undersøke om likevekten er stabil. For å gjøre det kan man forstyrre likevekten ved ytre påvirkninger, og så undersøke hvordan den etterfølgende bevegelse vil arte seg. Flere ting kan da skje. Forholdene kan endre seg radikalt dersom likevekten er instabil, som for eksempel når tung væske ligger over lettere væske. Dersom likevekten er stabil, kan det opptre svigninger eller bølgebevegelse, og får friksjonen tid til å dempe ut bevegelsen, så vil fluidet igjen vende tilbake til den opprinnelige likevektsstillingen. En stabilitetsundersøkelse av den arten som vi har skissert kan i alminnelighet by på store matematiske vanskeligheter. I mange tilfeller kan imidlertid undersøkelsen forholdsvis lett gjennomføres, og vi skal se eksempler på det.



Figur 3.2: Væskebeholder i ro i tyngdefeltet.

3.2 Likevekt i tyngdefeltet av en homogen inkompressibel væske

Væsken er inneholdt i en beholder hvor bunnen og veggene er beskrevet ved flaten

$$z = -H(x, y)$$

Planet utspent av x - og y -aksen danner overflaten i væsken og z -aksen er rettet vertikalt. Trykket i luften like over væsken er p_L og tettheten i væsken er ρ . Fra likevektsbetingelsen (3.1) med $\mathbf{f}_v = -g\mathbf{k}$ følger det at

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} - g = 0$$

siden trykket i væsken p er bare en funksjon av z . Integrasjon av denne likningen gir når ρ er konstant

$$p = p_L - \rho g z \quad (3.4)$$

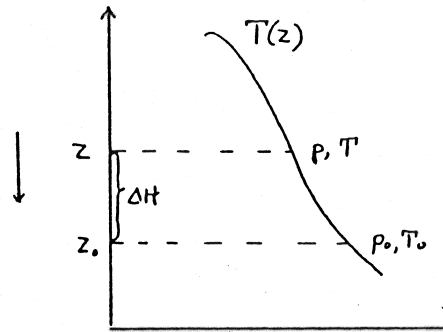
hvor integrasjonskonstanten er bestemt ved grenseflatebetingelsen $p = p_L$ for $z = 0$. Denne formelen viser at trykket i ethvert punkt i væsken er lik lufttrykket over væsken pluss vekten pr. flateenhet av en vertikal vannsøyle fra punktet opp til overflaten. Trykket ved bunnen er

$$p_H = p_L + \rho g H$$

Dette tilsvarer at det ved bunnen virker en trykk-kraft pr. flateenhet som i størrelse er p_H . Kraften er i ethvert punkt på bunnen rettet mot bunnflaten i bunnflatenormalens retning.

3.3 Likevekt i tyngdefeltet av en ideal gass. Trykkfordelingen ved likevekt i atmosfæren. Den barometriske høydeformel

Vi velger z -aksen vertikal og rettet oppover i tyngdefeltet og vi tenker oss at vi kjenner temperaturen som funksjon av z . For at stabil likevekt skal være mulig må ikke temperaturen avta oppover i atmosfæren.



Figur 3.3: Temperaturfordelingen i atmosfæren.

Vi skal senere komme tilbake til hvilke betingelser som vi må legge på $T(z)$ for at stabil likevekt skal være mulig. Foreløpig vil vi tenke oss at $T(z)$ er slik at likevekten er stabil. Fra likevektsbetingelsen (3.1) med $\mathbf{f}_v = -g\mathbf{k}$ og tilstandslikningen (2.19) får vi

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{g}{R} \frac{p}{T} \quad (3.5)$$

som kan skrives

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{R} \frac{dz}{T}$$

Vi integrerer den siste likningen over et lag av tykkelse $H = z - z_0$ hvor trykket er p_0 for $z = z_0$, og får at trykket ved toppen av laget er

$$p = p_0 e^{-\frac{g}{R} \int_{z_0}^z \frac{dz}{T}} \quad (3.6)$$

Denne formelen viser at trykket ved likevekt avtar eksponensielt oppover i atmosfæren, men vi må angi hvordan temperaturen varierer gjennom laget for å finne trykkvariasjonen som funksjon av z .

La oss først anta at temperaturen er konstant gjennom laget (isotermt lag). Vi setter $T = T_0$ og fra (3.6) finner vi at trykket ved toppen av laget er

$$p = p_0 e^{-\frac{gH}{RT_0}} \quad (3.7)$$

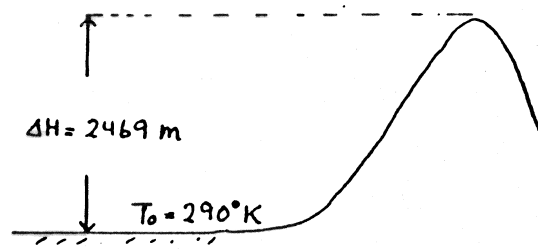
I dette tilfellet avtar altså trykket eksponensielt med høyden, og trykket minker med en faktor $1/e$ -del gjennom et lag av tykkelse

$$H_e = \frac{RT_0}{g}$$

Størrelsen H_e betegnes ofte som skalahøyden fordi den gir et karakteristisk mål for atmosfærens tykkelse. Med gasskonstanten $R = 287 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1}$, middeltemperaturen $T_0 = 273 \text{ K}$ og tyngdens akselerasjon $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ gir dette $H_e = 7987 \text{ m}$.

Trykkfordelingen kan også lett beregnes fra (3.6) dersom temperaturen er en lineær funksjon av z . Vi setter

$$T(z) = T_0 - \beta(z - z_0)$$



Figur 3.4: Trykkforskjellen mellom havnivå og Galdhøpiggen.

hvor konstanten β er temperaturgradienten ($^{\circ}C/m$). Med dette uttrykket for $T(z)$ får vi at

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{T} = \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{T_0}{T_0 - \beta H} \right)$$

Ved innsetting i (3.6) gir det følgende verdi for trykket ved toppen av laget:

$$p = p_0 \left(1 - \frac{\beta H}{T_0} \right)^{\frac{g}{R\beta}} \quad (3.8)$$

I atmosfæren har β vanligvis verdier mellom $\pm 1^{\circ}C$ pr. 100 meter. Selv for forholdsvis tykke lag så vil derfor (3.7) og (3.8) gi nært den samme verdi for trykkforskjellen mellom bunnen og toppen av laget.

Ved høydemåling, for eksempel i fly, observeres trykket, og man beregner høydeforskjeller ut fra den trykkfordeling man har når atmosfæren er i likevekt. Fra (3.5) får vi

$$dz = -\frac{R}{g} T d(\ln p)$$

Dersom T er en kjent funksjon av p , så kan denne likningen integreres slik at

$$z - z_0 = -\frac{R}{g} \int_{\ln p_0}^{\ln p} T d(\ln p)$$

hvor p_0 som før betegner trykket i høyde $z = z_0$. Betegner vi middeltemperaturen i laget med \bar{T} kan dette skrives

$$z - z_0 = \frac{R}{g} \bar{T} \ln \left(\frac{p_0}{p} \right) \quad (3.9)$$

Ved å måle trykket i to nivåflater kan høydeforskjellen beregnes fra (3.9) når man på forhånd har et estimat av \bar{T} . Formelen (3.9) er den barometriske høydeformel. Nær bakken vil en trykkforskjell på 1 millibar tilsvare omkring 8 m.

Vi skal nå vise hvordan formlene som vi har utledet kan brukes til å beregne trykkforskjellen Δp mellom havnivå og Galdhøpiggen når vi antar at trykket og temperaturen ved havnivå er henholdsvis $p_0 = 1013,25 \text{ hPa}$ (hektopascal) ($1 \text{ hPa} = 10^{-2} \text{ Pa}$) og $T_0 = 290^{\circ} \text{ K}$ (17° C). Høydeforskjellen er $H = 2469 \text{ m}$. For isoterm atmosfære ($\beta = 0$) finner vi fra (3.7) $\Delta p = 256 \text{ hPa}$. For atmosfære med lineært temperaturfall, $\beta = 1^{\circ} \text{ C}/100 \text{ m}$ får vi fra (3.8) $\Delta p = 266 \text{ hPa}$. Dersom en ønsker å bestemme Δp med større nøyaktighet er det nødvendig å vite mer om temperaturvariasjonen i atmosfæren fra havnivå og opp til toppen.

3.4 Betingelser for stabil likevekt i tyngdefeltet

I en inkompressibel væske er det åpenbart at likevekten er stabil dersom tettheten avtar oppover i væsken. Kravet at

$$\frac{d\rho}{dz} < 0 \quad (3.10)$$

sikrer altså likevekt i en inkompressibel væske. I en kompressibel væske eller gass vil den samme betingelsen ikke være tilstrekkelig for å sikre stabil likevekt. Årsaken til det er at når en partikkel av et kompressibelt fluid føres oppover, så vil partikkelen komme under lavere trykk den vil ekspandere og tettheten vil derved avta. Dersom partikkelen etter forflytningen er tyngre enn omgivelsene, så vil den av tyngden føres mot den opprinnelige posisjon og likevekten vil være stabil. Dette vil betinge at tettheten ved stabil likevekt må avta raskere med høyden enn den tilsvarende tetthetsreduksjonen som partikkelen opplever når den flyttes oppover. Vi skal her forutsette at det ikke foregår noen varmeutveksling mellom partikkelen og omgivelsene, og utlede et stabilitetskriterium som gjelder når partikkelen gjennomgår isentropiske tilstandsendringer. Dessuten vil vi betrakte tilfeller hvor friksjonens betydning er neglisjerbar. Når partikkelen forskyves en distanse dz i vertikal retning, opplever den en trykkendring Dp som er gitt ved trykkendringen i feltet. Fra likevektslikningen får vi

$$Dp = -\rho g dz$$

For isentropiske tilstandsendringer så vil trykkendringen Dp føre til en tetthetsendring $D\rho$ og fra (2.24) følger at

$$D\rho = \frac{\rho}{\gamma p} Dp$$

Ved hjelp av uttrykket for Dp og tilstandslikningen kan vi skrive

$$D\rho = -\frac{g}{\gamma R T} \rho dz$$

Tettheten i feltet på det stedet hvor partikkelen kommer er

$$\rho + \frac{d\rho}{dz} dz$$

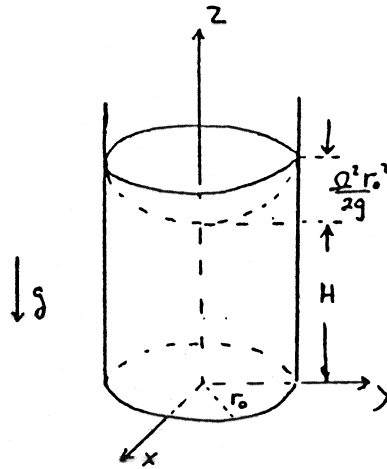
Siden $\rho + D\rho$ er partikkelens tetthet, så vil vi ha stabil likevekt dersom

$$\rho + D\rho > \rho + \frac{d\rho}{dz} dz$$

Dette medfører at kravet

$$\frac{d\rho}{dz} < -\frac{g}{\gamma R T} \rho \quad (3.11)$$

må være oppfylt for å sikre likevekt i atmosfæren.



Figur 3.5: Roterende tank med væske.

Det kan være hensiktsmessig å uttrykke stabilitetskravet ved hjelp av temperaturgradienten i stedet for som her ved tetthetsgradienten. Fra tilstandslikningen (2.19) og likevektslikningen (3.5) får vi at

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} = -\frac{1}{T} \left(\frac{dT}{dz} + \frac{g}{R} \right)$$

Derved kan stabilitetskriteriet (3.11) skrives

$$\frac{dT}{dz} > -\beta_s \quad (3.12)$$

hvor

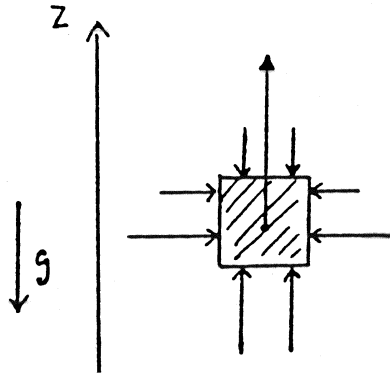
$$\beta_s = \frac{g}{R} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) = \frac{g}{c_p}$$

Skal atmosfæren være i stabil likevekt, så må temperaturgradienten være større enn minsteverdien $-\beta_s$. Denne minsteverdi tilsvarer at tettheten i atmosfæren er bestemt ved barotropirelasjonen (2.25) og vi betegner derfor β_s som den adiabatiske temperaturgradienten. For tørr luft er $\beta_s = 1^\circ\text{C}/100\text{ m}$.

3.5 Likevekt i roterende væske

Vi skal eksempelvis studere trykkfordelingen ved likevekt i en homogen inkompressibel væske som roterer i tyngdefeltet. Væsken er i et sirkulært kar med vertikale sideflater som roterer med konstant vinkelhastighet Ω om symmetriaksen. En viss tid etterat rotasjonen av karet er satt i gang vil det instille seg en væskebevegelse hvor væsken roterer som et fast legeme med vinkelhastighet Ω . I et aksekors som er fast forbundet med karet vil væskens akselerasjon være null og kraften som virker på et hvert væskeelement kan settes sammen av tyngdekraften og sentrifugalkraften, slik at volumkraften pr. massenhet er

$$\mathbf{f}_v = -g\mathbf{k} + \Omega^2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$$



Figur 3.6: Trykkraften på en terning.

Med dette uttrykket for volumkraften kan likevektsbetingelsen (3.1) skrives

$$\nabla(p + \rho\Phi) = 0 \quad (3.13)$$

hvor vi har innført potensialet Φ slik at

$$\Phi = gz - \frac{1}{2}\Omega^2(x^2 + y^2)$$

likningen (3.13) har løsning

$$p + \rho\Phi = \text{konstant}$$

Dersom H er høyden fra karetets bunnflate opp til væskeoverflaten der hvor denne skjærer z -aksen, så er ifølge grenseflatebetingelsene

$$p = p_L \quad \text{for} \quad x = y = 0 \quad \text{og} \quad z = H$$

hvor p_L er lufttrykket over væsken. Integrasjonskonstanten lar seg derved bestemme og vi finner at trykket i væsken er

$$p = \rho g(H - z) + \frac{\rho\Omega^2}{2}(x^2 + y^2) + p_L$$

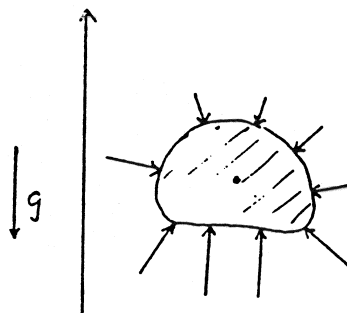
Langs overflaten er $p = p_L$ og vi finner at overflaten er bestemt ved

$$z = \frac{\Omega^2}{2g}(x^2 + y^2) + H$$

Dette viser at overflaten er en rotasjonsparaboloide med z -aksen som senterakse. Høydeforskjellen mellom overflaten ved senteraksen og ute ved karetets rand er

$$\frac{\Omega^2 r_0^2}{2g}$$

hvor r_0 er radius i karet. Vi ser fra uttrykkene ovenfor at både isobarflatene og nivåflatene ($\phi = \text{konstant}$) er rotasjonsparaboloider.



Figur 3.7: Oppdriftskraften på et legeme med vilkårlig form.

3.6 Oppdriftskraften. Arkimedes' lov

Ved likevekt i tyngdefeltet opptrer det trykkgradienter i væske og gasser, og disse trykkgradientene balanseres av tyngden. På overflaten av et legeme som er omgitt av væske eller gass virker det derfor trykkrefter som varierer i størrelse fra punkt til punkt på overflaten. Betrakter vi et legeme av form som en terning med horisontal bunn og toppflate, så er det klart at trykkreftene på overflaten har en resultantkraft som virker vertikalt oppover. Denne trykkraften betegnes som *oppdriftskraften*. I oppgave (1.1) beregnet vi oppdriftskraften på terningen til å være lik vekten av den fortrenge væske mengde.

Når vi skal beregne oppdriftskraften for et legeme av vilkårlig form, følger vi en argumentasjon av Stevin. Vi tenker oss et volum av samme form som legemet avgrenset i væsken. Om væskevolumet solidiseres ('fryses'), vil det fortsatt være i likevekt og summen av de krefter som virker på væskevolumet må være null. Derav følger at oppdriftskraften

$$K = Mg$$

hvor M er massen av væske i det avgrensede volumet. Siden væskevolumet ligger i ro, så må resultantkraften av tyngde og oppdriftskraften ha null moment. Det betyr at oppdriftskraftens angrepslinje går gjennom væskevolumets tyngdepunkt. Om vi erstatter væskevolumet med det faste legemet, så vil det ikke innvirke på trykkreftene langs legemets overflate, og oppdriftskraften vil være den samme som for væskevolumet. Dette er *Arkimedes' lov* som sier at i tyngdefeltet får et legeme som er omgitt av et fluid en oppdrift som er lik vekten av den fortrenge mengde av fluidet.

Simon Stevin (1558–1620) hollansk matematiker ble direktør for kanaler og vannverker i Nederland. Foreslo hvordan kanal og sluse-systemer kunne brukes til å forsvare Nederland mot angripere. Kjent for sine vitenskapelige arbeider om væsker i likevekt (hydrostatikk).

Arkimedes (287–212 før Kristus) studerte matematikk under Euclid i Alexandria og kombinerte i en skjelden grad analytiske og praktiske evner. Brukte sine kunnskaper blant annet til å utvikle og forbedre mange avanserte tekniske innretninger. Vannskruen for

pumping av store vannmengder bærer hans navn. Det fortelles at han kom frem til hvordan oppdriftsloven kunne brukes til å avsløre forfalskede gullsmykker mens han lå i bassenget i et offentlig bad. Han ble da så ivrig at han sprang rett ut på gata og ropte; "Eureka" (jeg fant det). Arkimedes satte opp en teori for stabilitet av flytende legemer som det tok årtusener før moderne vitenskap kunne tilføye noe nytt.

I stedet for å resonnerer oss fram til oppdriftskraftens størrelse slik Stevin gjorde, kan vi i dag beregne kraften. På et flateelement $d\sigma$ i legemets overflate virker i henhold til (1.1) en trykkraft

$$d\mathbf{k} = -pd\boldsymbol{\sigma}$$

Den samlede trykkraft som virker på legemet er

$$\mathbf{K} = - \int_{\sigma} p d\boldsymbol{\sigma}$$

hvor vi har integrert over legemets overflate σ . Ved hjelp av Gauss' sats kan dette integralet omskrives til et volumintegral over volumet τ omsluttet av flaten σ . Derved kan vi skrive

$$\int_{\sigma} p d\boldsymbol{\sigma} = \int_{\tau} \nabla p d\tau$$

hvor $d\tau$ betegner et volumelement. De som er ukjent med denne formen av Gauss' sats, henvises til avsnitt 5.4, likning (5.13).

Benytter vi likevektsbetingelsen (3.1) med $\mathbf{f}_v = -g\mathbf{k}$, blir $\nabla p = -\rho g\mathbf{k}$, og vi finner at trykkraften

$$\mathbf{K} = g\mathbf{k} \int_{\tau} \rho d\tau = Mg\mathbf{k}$$

hvor M betegner massen av den fortrenge mengde av fluidet som legemet er omgitt av. Dette viser at trykkraften på legemet, eller oppdriftskraften, er lik vekten av den væskemengde som legemet fortrenger.

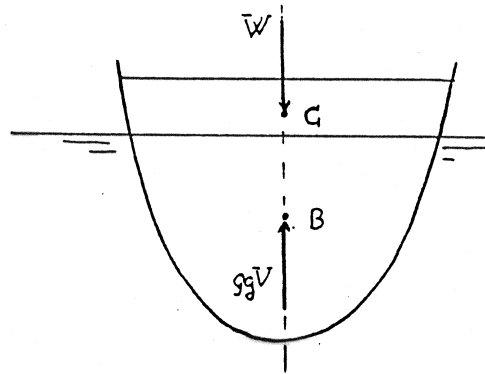
I andre kraftfelt enn tyngdefeltet vil det også oppstå oppdriftskrefter. Det overlates til leseren som øvelse å finne oppdriftskraften på et legeme i en væske som roterer slik som angitt i avsnitt 3.5.

3.7 Stabilitet av skip

Når et skip flyter i likevekt, vil volumet, V , av den fortrenge væske være slik at væskemengdens vekt tilsvarer tyngden W av skipet. Altså er

$$W = \rho gV$$

hvor ρ er tettheten av væsken. Oppdriftskraftens virkelinje går gjennom oppdriftssentret B , og oppdriftssentret er tyngdepunktet for et væskevolum av samme form som den delen av skipet som er under vannlinjen. Ved likevekt må momentet av kreftene som virker på skipet være null, og skipets tyngdepunkt, C ,



Figur 3.8: Tverrsnittsskisse av skip i likevekt.

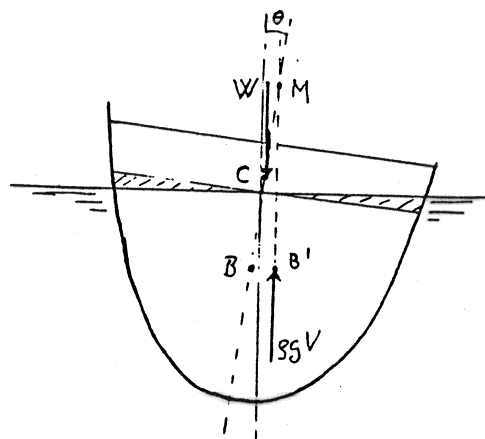
må derfor ligge på en vertikal linje gjennom B . Vi antar at skipet er symmetrisk og betegner linjen gjennom B og C for skipets senterlinje.

For å undersøke stabiliteten av skipet tenker vi oss at det krenger en vinkel θ i forhold til vertikalen. Oppdriftssentret vil derved flytte seg og det nye oppdriftssentret B' blir liggende utenfor senterlinjen. En vertikal linje gjennom B' skjærer senterlinjen i et punkt M som er skipets *metasenter*. Skal oppdriftskraften som virker gjennom B' sette opp et moment som motvirker krengingen, så må avstanden \overline{BM} være større enn avstanden \overline{BC} . I motsatt fall vil oppdriftskraften skape et moment som virker til at skipet krenger ytterligere. Skipet er altså i stabil likevekt når

$$\overline{BM} > \overline{BC}$$

det vil si når metasentret ligger over tyngdepunktet.

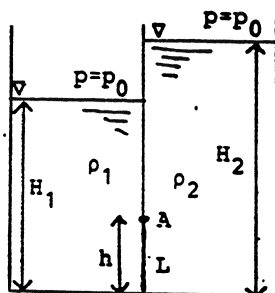
For et skip med sylinderformet bunn og sider vil metasentret ligge i krumningssentret for sylinderflaten. Skipet er stabilt dersom tyngdepunktet ligger under krumningssentret. For en kule som flyter i vannet, vil metasentret alltid ligge i sentrum av kulen, og stabil likevekt vil innstille seg dersom tyngdepunktet av kulen ligger utenfor sentret.



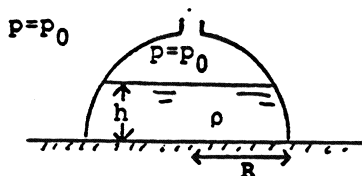
Figur 3.9: Krefter på skip som krenger.

3.8 Øvingsoppgaver

- En tank delvis fylt med olje med konstant tetthet ρ befinner seg på et tog med konstant akselerasjon $a_0 \mathbf{i}$ i horisontal retning. Over oljen har vi luft ved trykk p_0 . Tanken er formet som en kube med volum s^3 , og oljen fyller halve tanken. Legg inn et aksekors slik at tanken (og oljen) er i ro i forhold til dette aksekoret. La tyngden virke i negativ z -retning.
 - Forklar at $\mathbf{f}_v = -g\mathbf{k} - a_0\mathbf{i}$.
 - Sett opp bevegelseslikning, grenseflatebetingelser samt en relasjon som uttrykker at oljemassen under bevegelsen er lik massen ved ro ($\rho s^3/2$).
 - Finn likningen for oljens overflate.
- En rektangulær kloss med uniform tetthet ρ , grunnflateareal A og høyde h flyter i skilleflaten mellom to væskelag med forskjellig tetthet. Tettheten til øvre og nedre væskelag er henholdsvis ρ_1 og ρ_2 og tykkelsen av de to lagene er hhv. h_1 og h_2 . Skilleflaten er horisontal ved likevekt.
 - Finn trykkfordelingen ved likevekt i de to lagene.
 - Hva er betingelsen for at klossen skal flyte i skilleflaten?
- Luken L kan dreie om en horisontal akse gjennom A . På venstre side av luken har vi et fluid med tetthet ρ_1 , mens fluidet på høyresiden har tetthet ρ_2 . Lukens høyde er h . Bestem sammenhengen mellom høydene H_1 og H_2 i to fluidene når luken henger i likevekt vertikalt.



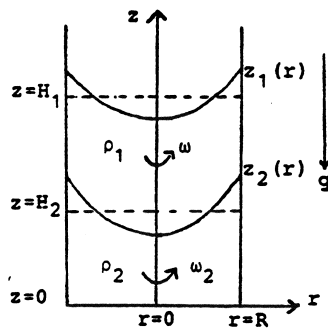
- Et halvkule-skall med masse m og radius R hviler på et plant horisontalt underlag. I toppen av skallet er et hull, og skallet fylles med væske slik at væsken når opp til en høyde $h < R$. Tettheten av væsken er ρ og lufttrykket utenfor kula er p_0 .



- Hvor stor er høyden h når kuleskallet løftes fra underlaget på grunn av væsketrykket?

- b) Hvor stor må massen minst være for at kuleskallet skal kunne fylles helt uten å løfte seg?

5. En sirkulær-sylindrisk tank med radius R inneholder to væskelag med konstant tetthet ρ_1 (øvre lag) og ρ_2 (nedre lag). Hvert av væskelagene roterer som et stivt legeme om senteraksen i sylindern henholdsvis med vinkelhastighet ω_1 (øvre lag) og ω_2 (nedre lag). Vi tillater $\omega_1 \neq \omega_2$. Når væskelagene er i ro, er tykkelsen av det nedre laget lik H_2 mens det øverste har tykkelse $H_1 - H_2$. Vi lar vertikal-koordinaten $z = 0$ svare til bunnen av karet. $z = z_1(r)$ betegner overflaten av det øverste laget mens $z = z_2(r)$ betegner grenseflaten mellom de to væskelagene. r er avstanden til rotasjonsaksen.



- a) Vis at z_1 er gitt som

$$z_1(r) = H_1 + \frac{\omega_1^2}{2g} \left(r^2 - \frac{1}{2} R^2 \right)$$

og at

$$z_2(r) = H_2 + \frac{\rho_2 \omega_2^2 - \rho_1 \omega_1^2}{2g(\rho_2 - \rho_1)} \left(r^2 - \frac{1}{2} R^2 \right)$$

- b) Diskuter formen på z_1 og z_2 i følgende tre tilfeller: $\omega_1 = \omega_2$, $\rho_1 \rightarrow \rho_2$ og $\omega_2 = 0$
6. Vi betrakter en væske med konstant tetthet ρ i tyngdefeltet. Tyngdeakselerasjonen settes lik g og virker i negativ z -retning.

- a) La τ være et vilkårlig volum av væsken. Hvilke krefter virker på τ ?
- b) Vis at dersom væsken er i ro, så må vi ha at

$$\int_{\tau} \rho g d\tau \mathbf{k} + \int_{\sigma} p n d\sigma = 0$$

der σ er den lukkede overflaten til τ og \mathbf{n} er en enhets normal-vektor som peker ut av τ og inn i den omliggende væske. \mathbf{k} er enhetsvektor i z -retning.

- c) Vis så ved hjelp av Gauss' sats at

$$\nabla p = -\rho g \mathbf{k} .$$

Dette er differensiallikningen som bestemmer trykkfeltet.

- d) Løs likningen i c) når trykket er lik p_0 for $z = 0$.
- e) Et legeme er nedsenket i væsken. La τ heretter betegne legemet, og la σ være legemets overflate. Vis at trykk-kraften \mathbf{F} på legemet er lik

$$-\int_{\sigma} (p_0 - \rho g z) \mathbf{n} d\sigma .$$

- f) Vis at uttrykket i e) kan forenkles til

$$\mathbf{F} = \rho g V \mathbf{k}$$

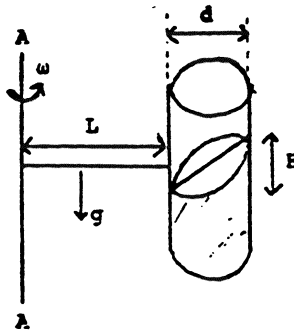
V er legemets volum.

7. Vis at flatene for konstant trykk og konstant tetthet i et fluid i ro står normalt på volumkraften \mathbf{f}_v dersom \mathbf{f}_v kan avledes av et potensial, $\mathbf{f}_v = -\nabla\varphi$.

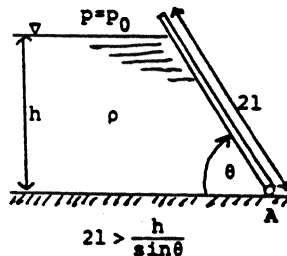
(Hint: Kryss likevektslikningen $\nabla p = \rho \mathbf{f}_v$ med hhv. $\nabla\varphi$ og ∇).

Forklar hvordan dette resultatet kan brukes til å finne formen på en fluid-overflate i et aksekors der fluidet er i ro.

8. En sylinderformet beholder med diameter d er fylt med vann. Sylindere er festet til en arm, lengde L , og roterer med konstant vinkelhastighet ω om aksene AA . Finn H når d er liten (dvs: $d/L \ll 1$) og også når d ikke er spesielt liten.



9. En luke med masse m kan dreie seg om en horisontal akse i A . Finn likningen som bestemmer likevektsvinkelen θ . (Den trenger ikke løses for θ .) Er likevekten stabil?

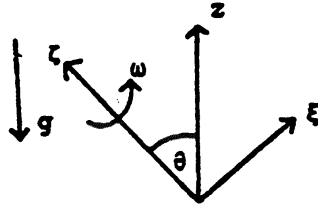


10. En lukket beholder i tyngdefeltet er fylt med homogen, inkompressibel væske. Væsken roterer som et fast legeme med konstant vinkelhastighet

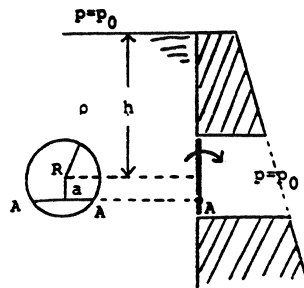
ω om en akse som danner vinkelen θ med vertikalen. Vis at isobarflatene er gitt ved

$$\zeta = \frac{\omega^2}{2g \cos \theta} \left(\left(\xi - \frac{g \sin \theta}{\omega^2} \right)^2 + \eta^2 \right) + \text{konst.}$$

Skisser isobarene i ξ, ζ -planet. Sett inn spesielt $\theta = 0$ og $\theta = \frac{\pi}{2}$.



11. I en demning er innsatt en sirkulær flomsikringsluke som kan dreie seg om en horisontal akse $A - A$ i den retning pilen viser. Hvor må aksens plasseres, dvs. hvilken verdi må a ha for at luken skal åpne seg idet vannet når toppen av demningen?



12. En lukket beholder med homogen, inkompressibel væske roterer med en vinkelhastighet ω om en horisontal akse. Vis at flatene for konstant trykk er sirkulære sylindere med akse g/ω^2 over rotasjonsaksen.

Kapittel 4

Stasjonær friksjonsfri strømning

4.1 Stasjonær friksjonsfri strømning

Dersom hastighet, tetthet og trykk ikke endrer seg i tiden på noe sted, kaller vi det en *stasjonær strømning*. I Eulersk beskrivelse innebærer det at størrelsene

$$\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial \rho}{\partial t}, \frac{\partial p}{\partial t}$$

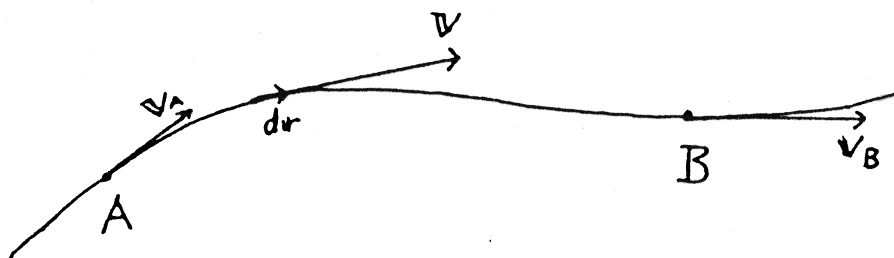
er null overalt i feltet. I dette tilfellet vil strømlinjene være faste linjer, og enhver partikkel i fluidet vil bevege seg langs en bestemt strømlinje. I praksis møter vi sjelden tilstander hvor forholdene er fullstendig stasjonære. Noen ganger vil imidlertid endringene i tiden av strømparametrene være så små at vi kan regne strømmen som kvasistasjonær.

For turbulent strøm vil man finne at hastigheten varierer hurtig i størrelse og retning på en vilkårlig (random) måte omkring en middelerdi, men fluktuasjonene vil ofte være små i forhold til middelstrømmen. Den kan beregnes ved å integrere det målte tidsforløpet av strømhastigheten over et tidsintervall som inneholder et stort antall fluktuasjoner. Dersom det er stasjonære forhold kan middelstrømmen vise seg å være tidsuavhengig slik at vi kan snakke om en stasjonær turbulent strøm selv om det er fluktuasjoner i strømmen.

Dersom man betrakter stasjonær strøm hvor strømhastigheten er tilstrekkelig stor, eller man betrakter forholdene tilstrekkelig langt borte fra faste begrensingsflater, kan man ofte neglisjere friksjonskreftene i forhold til trykk eller treghetskrefter. Dette kan også gjelde for turbulent stasjonær strøm. Vi skal se eksempler på stasjonære friksjonsfrie strømmer i det følgende.

4.2 Bernoulli's likning

For stasjonær friksjonsfri strømning gjelder en viktig likning som vi skal utlede fra bevegelseslikningen. Vi setter $\mathbf{f}_{\text{frik}} = 0$ og antar at volumkreftene kan avledes av et potensiale slik at $\mathbf{f}_v = -\nabla\Phi$, hvor $\Phi = gz$. Bevegelseslikningen for



Figur 4.1: En strømlinje i feltet.

stasjonær strøm kan da skrives

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi$$

ved hjelp av resultater fra oppgave 1.11 får vi at

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) + \mathbf{c} \times \mathbf{v}$$

hvor vektoren $\mathbf{c} = \nabla \times \mathbf{v}$ er virvlingen til hastighetsfeltet. Ved innsetning i bevegelseslikningen gir dette

$$\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) + \mathbf{c} \times \mathbf{v} + \nabla \Phi = 0 \quad (4.1)$$

Vi tenker oss en strømlinje i feltet, og lar $d\mathbf{r}$ betegne et linjeelement langs denne kurven. \mathbf{v} og $d\mathbf{r}$ er da parallelle vektorer, og $d\mathbf{r}$ er normal til vektoren $\mathbf{c} \times \mathbf{v}$. Vi skal multiplisere likningen (4.1) med vektoren $d\mathbf{r}$, og får

$$\frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\mathbf{r} + \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) \cdot d\mathbf{r} + \nabla \Phi \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Innfører vi den infinitesimale tilveksten i de skalære størrelsene p , $\frac{1}{2} \mathbf{v}^2$ og Φ over strekningen $d\mathbf{r}$, kan denne likningen skrives

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2\right) + d\Phi = 0$$

Denne likningen integrerer vi langs strømlinjen fra et punkt A til et punkt B . Dette gir

$$\int_A^B \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{v}_B^2 - \frac{1}{2} \mathbf{v}_A^2 + \Phi_B - \Phi_A = 0 \quad (4.2)$$

For å regne ut det gjenstående integralet må vi anta enten at ρ er konstant langs strømlinjen eller at ρ er en kjent funksjon av p . Det første tilfellet innebærer at tettheten er bevart for den enkelte partikkel. Dette er som vi vet tilfellet for inkompressible væsker hvor tettheten er uniform eller hvor temperaturen er bevart for den enkelte partikkel. I dette tilfellet får vi at

$$\int_A^B \frac{dp}{\rho} = \left(\frac{p}{\rho} \right)_B - \left(\frac{p}{\rho} \right)_A$$

Dette innebærer at størrelsen

$$\mathcal{H} = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + \Phi \quad (4.3)$$

har samme verdi i de to punktene. \mathcal{H} er altså konstant langs en og samme strømlinje. Dette er *Bernoullis likning* for inkompressibel væske og størrelsen \mathcal{H} betegnes *Bernoulli konstanten*. Dersom tyngden er den eneste volumkraft og z -aksen er rettet vertikalt oppover vil potensialet ha formen $\Phi = gz$.

For isentropiske prosesser i en kompressibel gass gjelder (2.25). Benyttes denne relasjonen mellom ρ og p vil man finne at

$$\int_A^B \frac{dp}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p}{\rho}\right)_B - \left(\frac{p}{\rho}\right)_A \right]$$

I dette tilfellet kan altså Bernoullis likning skrives

$$\mathcal{H} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + \Phi \quad (4.4)$$

Adiabatkonstanten γ er tidligere definert i avsnitt 2.8

Selv om Bernoullis likning strengt tatt er utledet for stasjonær strøm viser det seg at den ofte gjelder med god tilnærming for kvasi-stasjonær strøm og stasjonær turbulentstrøm (se avsnitt 4.1). I det siste tilfellet må en ved utledningen av likning (4.2) tenke seg at en integrer langs en strømlinje som svarer til middelhastigheten i feltet. Dette gjør at Bernoullis likning har et vidt anvendelsesområde og den er et viktig hjelpemiddel for beregninger av forskjellige strømningsforhold. Kravet om at friksjonskreftene skal være neglisjerbare er den viktigste begrensende faktor ved siden av kravet om stasjonærhet i feltet. I ingeniørberegninger innfører man noen ganger et korreksjonsledd for friksjonsvirkningen, men vi skal ikke gå nærmere inn på det her.

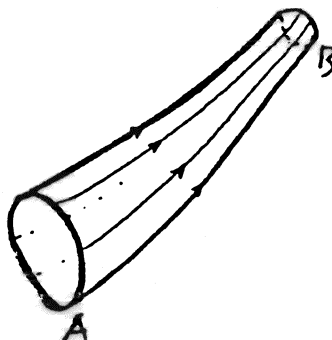
Daniel Bernoulli (1700–1782) født i Groningen studerte i Basel og var i flere år professor i matematikk i St. Petersburg. Skrev mellom andre vitenskapelige arbeider om havstrømmer, tidevann og beregning av planetbaner. Konstruerte også en klepsydra (vannklokke) for måling av tidsforskjeller tilsjøs. Mest kjent for sine grunnleggende arbeider innen hydrostatikk og hydrodynamikk. Var den første som anvendte betegnelsen hydrodynamikk og brukte ordet som tittel på sitt hovedarbeide. I denne boken utledet han også likningen som nå bærer hans navn.

4.3 Kontinuitetslikningen for stasjonær strømning

Ved stasjonær strømning kan vi skrive kontinuitetslikningen på formen

$$\nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0 \quad (4.5)$$

Vi betrakter et *strømrør*. Sideflaten i strømrøret har strømlinjer som generatriser og \mathbf{v} er rettet tangensielt til sideflaten. Vi skjærer strømrøret med snittflater ved A og B slik at strømlinjene som går gjennom røret er rettet normalt



Figur 4.2: Et strømrør fra snitt A til snitt B.

til snittflatene. σ_A og σ_B betegner henholdsvis arealet av de to snittflatene. Vi integrerer (4.5) over volumet begrenset av strømrøret og de to snittflatene

$$\int_{\tau} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) d\tau = 0$$

Ved å benytte Gauss' sats (se punkt 5.3) får vi at volumintegralet kan skrives som et flateintegral over begrensingsflaten. Siden \mathbf{v} er rettet tangensielt til sideflatene, vil vi ikke få bidrag til flateintegralet fra sideplaten. Derfor har vi at

$$\int_{\sigma_A} \rho \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma} + \int_{\sigma_B} \rho \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (4.6)$$

hvor $d\boldsymbol{\sigma}$ betegner et flateelement i snittflatene. Ved begge flatene er vektoren $d\boldsymbol{\sigma}$ rettet ut fra volumet begrenset av strømrøret og snittflatene. Likning (4.6) sier at massestrømmen gjennom en snittflate ved A i størrelse er lik massestrømmen gjennom en snittflate ved B. Videre sier (4.6) at det strømmer like mye masse inn ved A som det strømmer inn ved B. Lar vi størrelsen

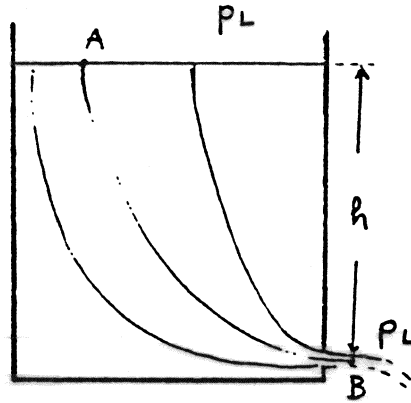
$$Q = \int_{\sigma} \rho \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (4.7)$$

betegne massestrømmen gjennom en vilkårlig snittflate σ , følger det av (4.6) at Q er konstant langs et strømrør.

4.4 Anvendelse av Bernoullis likning

4.4.1 Utstrømning av væske fra en tank

Vi betrakter utstrømningen av en inkompressibel væske gjennom et lite hull i en stor tank. Høyden av vannspeilet i tanken endrer seg da langsomt og utstrømningen kan da regnes som stasjonær (kvasi-stasjonær). Vi ser bort fra friksjonen og bruker Bernoullis likning (4.3) langs en strømlinje som går fra punkt A ved overflaten til et punkt B ved utløpet. Høydeforskjellen mellom de



Figur 4.3: Bernoullis likning benyttet på en strømlinje fra A til B.

to punktene er h . Vi betegner lufttrykket med p_L og setter $\phi_A = gh$ og $\phi_B = 0$. Dette gir

$$\frac{p_L}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2 + gh = \frac{p_L}{\rho} + \frac{1}{2}v_B^2$$

Nå er hastigheten i væsken ved A så liten at leddet $\frac{1}{2}v_A^2$ kan sløyfes i forhold til $\frac{1}{2}v_B^2$. Vi får derfor at hastigheten i væsken ved utløpet er

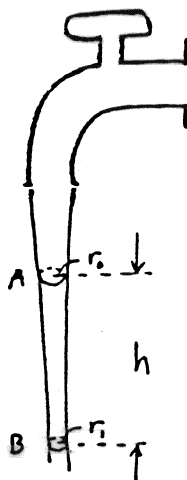
$$v_B = \sqrt{2gh}$$

Dette er Torricelli lov. Den innebærer at en væskepartikkel ved utløpet har en kinetisk energi som tilsvarer tapet i potensiell energi fra A til B. Med andre ord dersom strålen ved utløpet ble rettet oppover, ville den i dette tilfellet kunne nå opp til samme nivå som vannspeilet i tanken. I praksis vil utstrømningshastigheten være noe mindre enn angitt ved Toricelli lov. Hastighetsreduksjonen avhenger både av væskefriksjonen og utformingen av utløpet.

Evangelista Torricelli (1608–1647) fikk sin utdanning i naturvitenskap og matematikk i Roma og ble senere en nær medarbeider av Galilei. Etter dennes død fikk han mesterens professorat i matematikk i Firenze. Torricelli utvidet og videreførte Galilei's grunnleggende arbeider i mekanikk. Virkemåten av barometret som trykkmåler ble beskrevet og forklart av Torricelli.

4.4.2 Innsnevring av vertikal væskestråle

Når vann strømmer ut av en kran med utløpet rettet vertikalt nedover, vil vannpartiklene akselereres, og strålen vil snevne seg inn. Vi regner strålen som sirkulær, og forutsetter at strømhastigheten er uniform over strålens tversnitt. Ved A er radius i strålen r_0 og strømhastigheten $v_A = v_0$ og ved B som ligger en distanse h under A er radius i strålen $r_0 - \Delta r$ og hastigheten er v_B . Vi forutsetter at strømmen er stasjonær, og benytter Bernoullis likning langs en



Figur 4.4: Væskestrømning ut av en kran.

strømlinje som går fra A til B . Vi neglisjerer overflatespenningen og regner trykket i strålen lik lufttrykket p_L . Dette gir

$$\frac{p_L}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2 + gh = \frac{p_L}{\rho} + \frac{1}{2}v_B^2$$

Videre må massestrømmen pr. tidsenhet gjennom strålen være den samme ved A som ved B . Dette medfører at

$$r_0^2 v_A = (r_0 - \Delta r)^2 v_B$$

Fra disse to likningene kan vi eliminere v_B og vi får at

$$\frac{r_0 - \Delta r}{r_0} = \left(1 + \frac{2gh}{v_0^2}\right)^{-\frac{1}{4}}$$

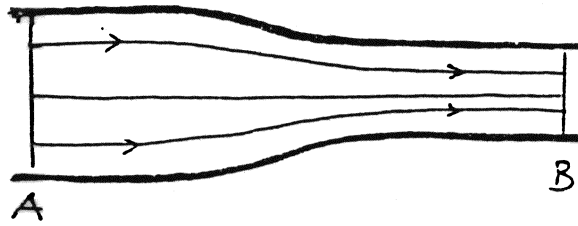
Når v_0 er stor, slik at $2gh/v_0^2 \ll 1$ er

$$\left(1 + \frac{2gh}{v_0^2}\right)^{-\frac{1}{4}} \simeq 1 - \frac{gh}{2v_0^2}$$

Derved får vi at

$$\frac{\Delta r}{r_0} = \frac{gh}{2v_0^2}$$

Under de forutsetninger som vi her har gjort er altså innsnevringen mellom de to punkter på strålen en lineær funksjon av avstanden mellom punktene. Tilsvarende resultater ville man ha fått om man tok hensyn til overflatespenningen, og enkle forsøk med vannkranen på kjøkkenet viser at innsnevringen virkelig er i samsvar med hva vi her har beregnet.



Figur 4.5: Strøm i rør med innsnevring.

4.4.3 Strøm i rør med innsnevring

Vi betrakter en stasjonær strøm av en inkompressibel væske gjennom et rør hvor tversnittet gradvis snevrer seg inn. Ved A er arealet av tversnittet σ_A og ved B σ_B . Aksen i røret er horisontal, og diameteren i røret er så liten at vi kan neglisjere forskjeller i potensiell energi for væskepartiklene. Vi benytter Bernoullis likning langs en strømlinje mellom A og B . Dette gir

$$\frac{p_A}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2 = \frac{p_B}{\rho} + \frac{1}{2}v_B^2$$

Vi forutsetter nå at innsnevringen i røret er så gradvis at vi kan regne hastigheten som uniform over tversnittet av røret. Fra (4.7) får vi da at

$$\sigma_A v_A = \sigma_B v_B$$

Fra disse to likningene kan vi eliminere v_B , og vi får at trykkforskjellen $\Delta p = p_A - p_B$ er

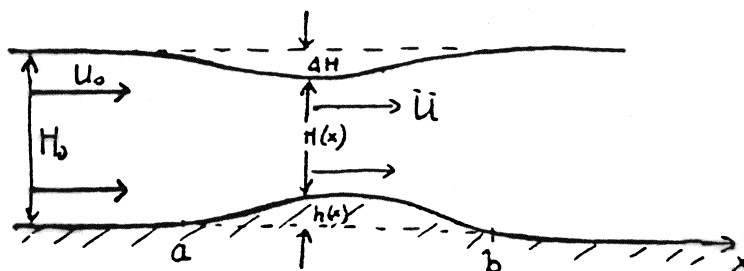
$$\Delta p = \frac{\rho v_A^2}{2} \left[\left(\frac{\sigma_A}{\sigma_B} \right)^2 - 1 \right]$$

Siden $\sigma_B < \sigma_A$, er $\Delta p > 0$ og trykket i røret ved B er mindre enn trykket ved A . Kjenner man v_A , σ_A og σ_B kan trykkforskjellen beregnes. Dersom man har målt trykkforskjellen og man dessuten kjenner σ_A og σ_B , kan man beregne strømhastigheten v_A . Dette kan benyttes til å måle strømhastigheter, og måleinstrumenter som bygger på dette prinsipp blir kalt *venturimeter*.

4.4.4 Strøm i kanaler med ujevn bunn

En inkompressibel væske strømmer stasjonært gjennom en kanal hvor det er en avgrenset forhøyning i bunnen. Utenom forhøyningen er bunnen plan og horisontal. Vi lar x -aksen beskrive den plane delen av bunnen. Høyden av bunnforhøyningen som ligger mellom punktene a og b på x -aksen er $h(x)$, og vanddyper er $H(x)$. Langt oppstrøms fra forhøyningen antar vi at strømmen er uniform og lik U_0 og at vanddyper er H_0 . Dersom bunnforhøyningen er liten og endringene i vanddyper i forbindelse med denne skjer gradvis, kan vi også regne med at strømmen er tilnærmet uniform i et hvert tversnitt over forhøyningen. Vi betegner strømhastigheten med $U(x)$, og benytter Bernoullis likning for en strømlinje langs overflaten, og får

$$\frac{1}{2}U^2 + g(H + h) = \frac{1}{2}U_0^2 + gH_0$$



Figur 4.6: Strøm i kanal med ujevn bunn.

Videre følger det fra kontinuitetslikningen at

$$UH = U_0 H_0$$

Vi eliminerer U fra disse to likningene og får

$$Fr^2 \left[\left(\frac{H_0}{H} \right)^2 - 1 \right] + 2 \left[\frac{H+h}{H_0} - 1 \right] = 0 \quad (4.8)$$

hvor

$$Fr = \frac{U_0}{\sqrt{gH_0}}$$

er en dimensjonsløs størrelse som blir betegnet *Froude-tallet*. Vi skal senere se at $\sqrt{gH_0}$ er forplantningshastigheten for lange bølger i kanalen og Fr er således forholdet mellom strømhastigheten og bølgehastigheten. Froude-tallet er en viktig parameter for å klassifisere strømningstilstander i kanaler.

Dersom $h \ll H_0$ kan vi regne med at overflaten bare deformeres lite på grunn av forhøyningen i bunnen. Vi setter

$$H + h = H_0 - \Delta H$$

hvor ΔH er deformasjonen av vannoverflaten. Regner vi at $\Delta H \ll H_0$ får vi at

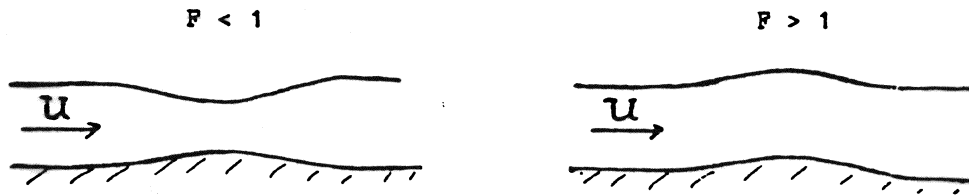
$$\left(\frac{H_0}{H} \right)^2 = \left(1 - \frac{h + \Delta H}{H_0} \right)^{-2} \simeq 1 + 2 \frac{h + \Delta H}{H_0}$$

Innsatt i likning (4.8) gir dette

$$\Delta H = h \frac{Fr^2}{1 - Fr^2} \quad (4.9)$$

Dette viser at vannoverflaten bøyes ned eller heves over bunnforhøyningen avhengig henholdsvis av om $Fr < 1$ eller $Fr > 1$. Uttrykket (4.9) for deformasjonen av vannoverflaten er selvsagt ikke gyldig dersom Fr er lik eller nær lik 1.

William Froude (1808–1882) utdannet i matematikk i Oxford arbeidet i noen år som skipsingeniør. Ble interessert i motstand og stabilitet av skip og begynte å utføre modellforsøk. Fikk bygd en 250 fot lang tauingstank for skipsmodellforsøk nær sitt hjem ved Torquay i Sør-England. Utførte en rekke grunnleggende forsøk for å finne hvordan motstanden avhenger av skipets form, størrelse, og fart. Arbeidet ble vidreført av hans sønn Robert Edmund Froude.



Figur 4.7: Vi får forskjellig overflatedeformasjon avhengig av Froudetallet.

4.4.5 Utstrømning av gass fra en trykkflaske

Som det siste eksemplet på anvendelse av Bernoullis likning skal vi beregne utstrømningshastigheten for en gass fra en gassflaske. Vi antar at utstrømningen foregår gjennom en så liten åpning at utstrømningen kan oppfattes som en stasjonær bevegelse. Trykket og tettheten inne i flasken er p_o og ρ_o , og lufttrykket utenfor flasken er p_1 . Videre antar vi at gassen ikke får tilført varme under utstrømningen, slik at utstrømningen kan betraktes som en isentropisk prosess. Tettheten, ρ_1 , av gassen i utløpsstrålen er derfor gitt ved

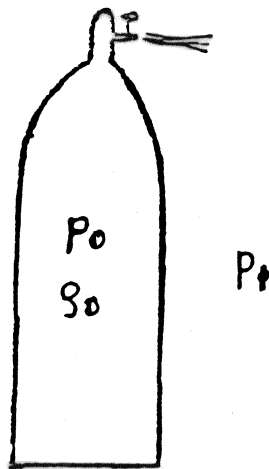
$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_o} \left(\frac{p_o}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Bruker vi Bernoullis likning (4.4) langs en strømlinje som går fra det indre av gassflasken, hvor hastigheten er tilnærmet lik null, til utløpet, får vi

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_o}{\rho_o} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} v^2$$

hvor v er utløpshastigheten. Ved hjelp av disse to likningene finner vi at utløpshastigheten er

$$v^2 = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_o}{\rho_o} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_o} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right]$$



Figur 4.8: Utsrømning fra en trykkflaske.

Ved hjelp disse relasjonene samt tilstandslikningen

$$\rho = \frac{p}{RT} \quad (4.10)$$

kan vi også beregne temperatur fallet i gassen når den strømmer ut av flasken. Vi betegner temperaturen i gassen inne i flasken og i utløpet henholdsvis T_o og T_1 og vi finner

$$T_o - T_1 = T_o \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_o} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \quad (4.11)$$

Dette viser at gassen avkjøles ved utstrømningen og det beror på at energi medgår til utføre arbeid mot lufttrykket. Fra formelen for utstrømningshastigheten vil en finne at selv for moderate trykk i flasken så vil hastigheten overskride lydshastigheten. Det vil da danne seg sjokk ved utløpet og betingelsene om isentropisk prosess er ikke lenger oppfylt. Friksjonen og utformingen av utløpsdysen vil også være viktig i det tilfellet. I praksis vil formelen for utstrømningshastigheten som vi har gitt her bare kunne brukes for små trykkforskjeller hvor $p_o \leq 2p_1$.

4.5 Øvingsoppgaver

1. En homogen inkompressibel væske strømmer friksjonsfritt og stasjonært gjennom et rør med tverrsnitt a . Strømhastigheten er U . Røret grener seg i to jevntykke rør med tverrsnitt b .
 - a) Finn hastigheten i rørgrenene.
 - b) Bestem trykket i rørgrenene når trykket i hovedrøret er p_o .
2. For å skaffe vann er det lagt ut et plastrør fra et vann hvor vannspeilet ligger h meter over stedet (P) hvor det tappes fra røret. Plastrøret er lagt over et lite høydedrag og det har vært nødvendig å pumpe vann gjennom røret for å få det til å renne som i en hevert. Høyeste punkt på røret (A) ligger H meter over tappestedet P .
 - a) Bestem strømhastigheten når vi forutsetter stasjonær friksjonsfri strøm.
 - b) Finn trykket i slangen i punktet A .
 - c) Dersom trykket i A blir lavere enn vannets damptrykk vil gassbobler utvikle seg og eventuelt stanser vannstrømmen. Hva er den største verdien H kan ha dersom temperaturen er $20^\circ C$ og det tilsvarende vandamptrykket er $2.335 \cdot 10^3 Pa$ og lufttrykket er $1.01325 \cdot 10^5 Pa$?
3. Vann strømmer stasjonært i et horisontalt rør med innsnevring. Ved innsnevringen er det knyttet til et vertikalt rør som står i forbindelse med et reservoar. Rørenden etter innsnevringen er åpen og strålen går ut i friluft hvor lufttrykket er p_o . Volumstrømmen gjennom det horisontale røret er Q og tverrsnittet av røret i og utenfor innsnevringen er henholdsvis a og

b. Høyden av det vertikale røret fra vannnivået i bassenget og opp til det horisontale røret er h . Vannet regnes som homogent og inkompressibelt i friksjonsfri strøm.

- a) Vis at vann vil suges fra reservoaret og opp i det horisontale røret dersom:

$$h \leq \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right)$$

- b) Forklar hvordan du ut fra dette kan tenke deg å konstruere en pumpe. Hva vil begrense virkningsgraden av pumpen?

4. I et sirkulært rør med radius $r(x) = \arctan(\alpha x) + \pi$, strømmer det friksjonsfri inkompressibel væske. x er en koordinat langs rør-aksen. Hastighetsfeltet "langt oppstrøms" $x = 0$ (dvs. $x \rightarrow -\infty$) er lik U_0 .

Vis at komponenten av hastighetsfeltet langs røret, u_n , har formen

$$u_n = \frac{U_0 \pi^2}{4(\arctan(\alpha x) + \pi)^2}.$$

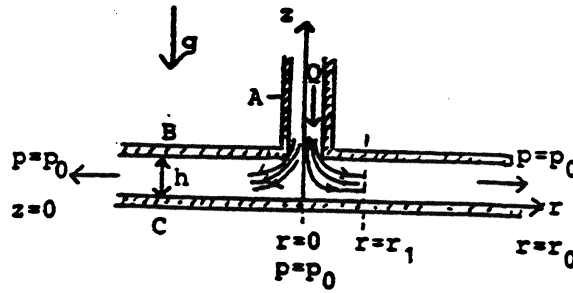
Kommentar: I rør- og kanal-strømningsproblemer er en ofte kun interessert i komponenten av hastighetsfeltet langs røret, u_n , siden de andre komponentene som oftest er små. Kontinuitets-likningen er en skalar likning som da er tilstrekkelig for å bestemme u_n såfremt fluidet er inkompressibelt og strømmingen er stasjonær.

5. En friksjonsfri inkompressibel væske med grunnstrømningshastighet $u_0 \mathbf{i}$ strømmer forbi en sirkulær sylinder med radius a . Hastighetsfeltet er da gitt ved

$$\mathbf{v} = u_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \varphi \mathbf{i}_r - u_0 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \varphi \mathbf{i}_\varphi$$

(r, φ) er sylinder-koordinater. Når $r \rightarrow \infty$, er trykket lik p_∞ . Det er ingen volumkrefter.

- a) Vis at $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{v} = u_0 \mathbf{i}$ og at \mathbf{v} er tangensiell til sylinderoverflaten $r = a$.
- b) Finn trykkfordelingen (vha. Bernoullis likning) rundt sylinderen. (Hint: Følg en strømlinje fra $-\infty$ langs $y = 0$ til $x = -a$ og så til et vilkårlig punkt på sylinderen).
- c) Finn trykk-kraften pr. lengdeenhet langs sylinderen.
6. En homogen inkompressibel væske strømmer stasjonært gjennom et tynt rør A og ut mellom to horisontale, sirkulære, konsentriske flate plater B og C som vist på figuren. B er festet til A , og C holdes fast i en avstand h fra B . Bevegelsen er symmetrisk om z -aksen, og for $r > r_1$ regnes hastigheten horisontal og uavhengig av z . Trykket i rommet utenfor er p_0 .



- a) Vis at trykkfordelingen for $r_1 \leq r \leq r_0$ er

$$p(r) = p_0 - \frac{1}{2} \rho \frac{Q^2}{4\pi^2 h^2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right)$$

der Q er volumtransporten i systemet.

- b) Vis at trykket p_c i punktet $r = 0$, $z = 0$ (stagnasjonspunktet $\mathbf{v} = 0$) er

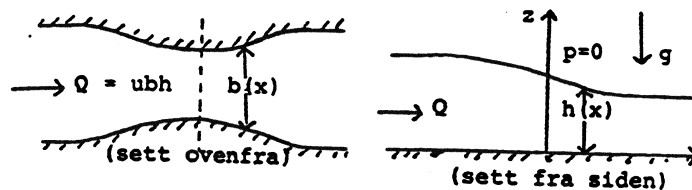
$$p_c = p_0 + \frac{1}{2} \rho \frac{Q^2}{4\pi^2 h^2} \frac{1}{r_0^2}$$

- c) Tegn opp trykkfordelingen på oversiden av platen C for $r_1 \leq r \leq r_0$ og skisser hvordan du tror den ser ut for $0 \leq r \leq r_1$. Sammenlign

$$\Delta p_1 = p_0 - p(r = r_1) \quad \text{og} \quad \Delta p_c = p_c - p_0$$

når $r_1 = \frac{1}{4}r_0$, og anslå uten regning retningen for netto trykk-kraft på platen C .

7. Vann (homogen, inkomp.) strømmer stasjonært i en horisontal, åpen renne med rektangulært tverrsnitt. Renne har en bredde $b = b(x)$ og væskehøyden er $h = h(x)$. Vi regner hastigheten horisontal og konstant over ethvert tverrsnitt. (Variasjonene av b og h er så små at krumningen av strømlinjene kan neglisjeres.)



Vis at Bernoulli-konstanten er den samme for alle strømlinjene. Anvend Bernoullis ligning for en strømlinje langs overflaten til å vise at

$$\frac{dh}{dx} \left(1 - \frac{u^2}{gh} \right) = \frac{Q^2}{gb^3 h^2} \frac{db}{dx}$$

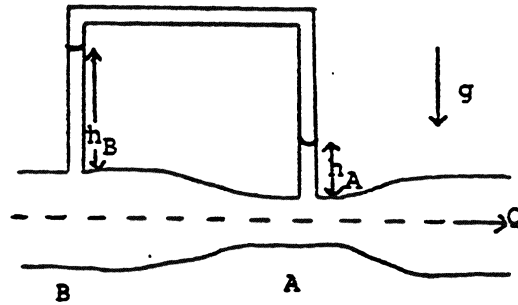
Diskuter denne relasjonen, og skisser $h(x)$ når

- a) $u < \sqrt{gh}$ overalt

b) $u > \sqrt{gh}$ overalt

c) $u < \sqrt{gh}$ når $x < 0$ og $u > \sqrt{gh}$ når $x > 0$

8. Vann (homogen, inkomp.) strømmer stasjonært i et rør som vist på figuren. Volumtransporten i røret er Q og tverrsnittene ved A og B er a og b henholdsvis. Vis at røret kan brukes som et måleapparat for volumtransporten idet Q kan bestemmes ut fra $h = h_B - h_A$.



Apparatet kalles et venturimeter.

Svar: $Q^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} 2gh$

Kapittel 5

Generell definisjon av ∇ -operatoren. Integralsatser

5.1 Generell definisjon av gradient, divergens og virvling

I det foregående har vi definert ∇ -operatoren i kartesiske koordinatsystemer. Gradient, divergens og virvling er imidlertid størrelser som er uavhengige av koordinatsystemet, og det vil derfor være hensiktsmessig å ha definisjoner som ikke er bunnet til et bestemt koordinatsystem. Vi skal nå formulere slike definisjoner, og vi skal benytte disse til å vise hvordan man kan beregne uttrykkene for ∇ -operatorene i andre koordinatsystemer.

Da vi utledet bevegelseslikningen i avsnitt (2.6) beregnet vi trykkraften på et infinitesimalt parallelepiped. Vi fant at trykkraften var

$$-\nabla p d\tau$$

hvor $d\tau$ er volumet av epipedet. Siden trykkraften framkom som resultant av trykket på overflaten av epipedet, kan vi skrive

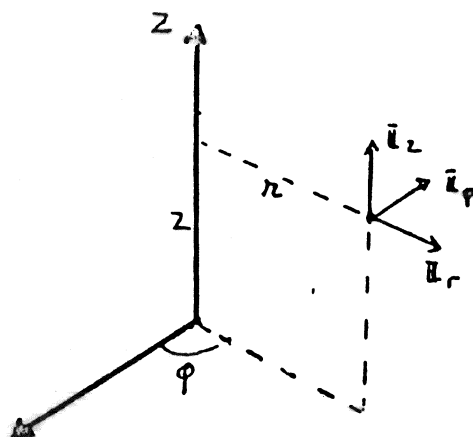
$$\nabla p = \frac{1}{d\tau} \int_{\sigma \rightarrow 0} p d\sigma \quad (5.1)$$

hvor σ er begrensingsflaten for epipedet og $d\sigma$ betegner som før et flatelement i begrensingsflaten. Betegnelsen $\sigma \rightarrow 0$ i integrasjonsgrensen indikerer at epipedet ved grenseovergang går mot et infinitesimalt volumelement. Utledningen av (5.1) er ikke betinget av at p er trykket, og en vil få tilsvarende resultat for en vilkårlig skalar størrelse β . Følgelig må vi ha at gradienten til en skalar kan uttrykkes ved

$$\nabla \beta = \frac{1}{d\tau} \int_{\sigma \rightarrow 0} \beta d\sigma \quad (5.2)$$

Da vi utledet kontinuitetslikningen i avsnitt 2.5, beregnet vi massestrømmen $\rho \mathbf{v}$ gjennom overflaten av et infinitesimalt parallelepiped. Fra resultater i dette avsnitt følger det

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \frac{1}{d\tau} \int_{\sigma \rightarrow 0} (\rho \mathbf{v}) \cdot d\sigma$$

Figur 5.1: *Sylindriske polarkoordinater.*

Tilsvarende resultat ville vi ha fått om vi i stedet for massestrømmen beregnet fluksen $\mathbf{A} \cdot d\sigma$ av en vilkårlig vektor \mathbf{A} gjennom overflaten av epipedet. Divergensen til vektoren \mathbf{A} må derfor kunne skrives

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{d\tau} \int_{\sigma \rightarrow 0} \mathbf{A} \cdot d\sigma \quad (5.3)$$

Går vi frem på tilsvarende måte som ovenfor, kan man også vise at

$$\nabla \times \mathbf{A} = -\frac{1}{d\tau} \int_{\sigma \rightarrow 0} \mathbf{A} \times d\sigma \quad (5.4)$$

Vi vil la de tre uttrykkene (5.2), (5.3) og (5.4) henholdsvis være definisjon av ∇ -operatorene gradient, divergens og virvling. Ved å knytte definisjonen til integraler har vi oppnådd å få koordinatuavhengige definisjoner av ∇ -operatorene. Vi kan nå la volumelementet som vi integrerer over få vilkårlig form, og ved grensen $\sigma \rightarrow 0$ vil vi få bestemt ∇ -operatoren i det punktet som volumelementet degenererer til. Det gjenstår imidlertid å vise at man ved grensen $\sigma \rightarrow 0$ får samme verdi for integralene uavhengig av volumelementets form.

5.2 Polare koordinatsystemer

Frem til nå har vi hovedsakelig benyttet et kartesiske koordinatsystem, men i mange tilfeller vil det være mere hensiktsmessig å benytte andre koordinatsystemer. Vi skal her innføre sylindriske og sfæriske polarkoordinater som henholdsvis kommer til anvendelse i problemer hvor det er sirkulær eller sfærisk geometri.

I et sylindrisk polarkoordinatsystem er koordinatene r , φ og z , og vi betegner enhetsvektorene i radial, asimutal og aksial retning med henholdsvis \mathbf{i}_r , \mathbf{i}_φ og \mathbf{i}_z .

Sammenhengen mellom (r, φ, z) og de kartesiske koordinater (x, y, z) er gitt ved transformasjonsrelasjonene

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad z = z \quad (5.5)$$

og for enhetsvektoren

$$\begin{aligned}\mathbf{i} &= \cos \varphi \mathbf{i}_r - \sin \varphi \mathbf{i}_\varphi \\ \mathbf{j} &= \sin \varphi \mathbf{i}_r + \cos \varphi \mathbf{i}_\varphi\end{aligned}$$

Av (5.5) får en ved partiellderivasjon

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{r} \quad (5.6)$$

De partiellderiverete med hensyn på x, y, z av en skalar $\beta = \beta(r, \varphi, z)$ er

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta}{\partial x} &= \frac{\partial \beta}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta}{\partial y} &= \frac{\partial \beta}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta}{\partial z} &= \frac{\partial \beta}{\partial z}\end{aligned}$$

Ved hjelp av relasjonene (5.6) kan vi skrive

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta}{\partial x} &= \cos \varphi \frac{\partial \beta}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \beta}{\partial y} &= \sin \varphi \frac{\partial \beta}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial \beta}{\partial \varphi}\end{aligned}$$

De relasjonene som her er utledet kan for eksempel brukes til å beregne uttrykket for gradienten til en skalar i sylindriske polarkoordinater. Vi tar da utgangspunkt i definisjonslikningen for gradientvektoren i et kartesisk system

$$\nabla \beta = \frac{\partial \beta}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \beta}{\partial z} \mathbf{k}$$

Ved substitusjon på høyre side i denne likning finner vi etter enkel regning uttrykket for $\nabla \beta$ i sylindriske polarkoordinater (se likning (5.7)).

I et sfæriske polarkoordinatsystem er koordinatene r, φ , og θ , og enhetsvektorene i radial, asimutal og sonal retning er henholdsvis $\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\varphi$ og \mathbf{i}_θ . Sammenhengen mellom (r, φ, θ) og de kartesiske koordinater (x, y, z) er gitt ved transformasjonsrelasjonene

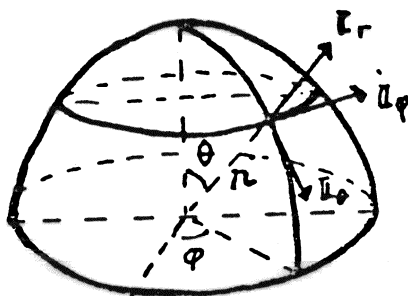
$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

og for enhetsvektorene

$$\begin{aligned}\mathbf{i} &= \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i}_r - \sin \varphi \mathbf{i}_\varphi + \cos \theta \cos \varphi \mathbf{i}_\theta \\ \mathbf{j} &= \sin \theta \sin \varphi \mathbf{i}_r + \cos \varphi \mathbf{i}_\varphi + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{i}_\theta \\ \mathbf{k} &= \cos \theta \mathbf{i}_r - \sin \theta \mathbf{i}_\theta\end{aligned}$$

Derav får man for de partiellderiverete av r med hensyn på x, y og z

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \sin \theta \cos \varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta \sin \varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \cos \theta$$



Figur 5.2: Sfæriske polarkoordinater.

for de partiellderiverte av φ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

og for de partiellderiverte av θ

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{\sin \theta}{r}$$

Ved hjelp av disse formlene kan man nå gå frem på tilsvarende måte som for sylindriske polarkoordinater å først finne uttrykk for de partiellderiverte av en skalar $\beta = \beta(r, \varphi, \theta)$ med hensyn på x, y og z og deretter finne uttrykkene for ∇ -operatorene i sfæriske koordinater.

5.3 ∇ -operatorene i polarkoordinater

De nye definisjonene av ∇ -operatorene som ble innført i avsnitt (5.1) kan benyttes til å beregne uttrykket for disse operatorene i andre koordinatsystemer enn det kartesiske som vi har startet utfra. En beregner da integralene som inngår i definisjonene (5.2–5.4) over et volumelement i det ønskede koordinatsystemet.

I sylindriske og sfæriske polarkoordinatsystem er det enklest å benytte de transformasjonsrelasjonene som ble utledet i forrige avsnitt. Ved å gå frem på tilsvarende måte som vist i eksemplet for gradient kan vi utlede følgende uttrykk for gradient og divergens i polarkoordinater for sylindriske polarkoordinater:

$$\nabla \beta = \frac{\partial \beta}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} \mathbf{i}_\varphi + \frac{\partial \beta}{\partial z} \mathbf{i}_z \quad (5.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (5.8)$$

hvor A_r , A_φ og A_z betegner komponentene av vektoren \mathbf{A} . På tilsvarende måte finner vi for sfæriske polarkoordinater

$$\nabla \beta = \frac{\partial \beta}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} \mathbf{i}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta \quad (5.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) \quad (5.10)$$

hvor A_r , A_φ og A_θ betegner komponentene av vektoren \mathbf{A}

Uttrykkene for virlingen til en vektor i de to polarkoordinatsystemen kan beregnes på tilsvarende måte som for gradient og divergens. Disse uttrykkene finnes i matematiske formelsamlinger om man skulle få bruk for dem.

5.4 Gauss' sats

Vi betrakter et endelig volum τ innenfor en lukket begrensingsflate σ . Vi forutsetter først at volumet er begrenset av en sammenhengende flate slik at det ikke er 'huller' innenfor volumet. Dette volumet tenker vi oss delt opp i en uendelig skare av infinitesimale volumelement. For hvert av disse volumelementene må vi i henhold til (5.3) ha

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{d\tau} \int_{\sigma \rightarrow 0} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

hvor \mathbf{A} er en vilkårlig vektor. La oss integrere $\nabla \cdot \mathbf{A}$ over volumet τ . Fra likningen ovenfor får vi

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau = \sum_{\tau} \left(\int_{\sigma \rightarrow 0} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \right) \quad (5.11)$$

hvor summetegnet \sum_{τ} betegner at vi skal summere flateintegralene av $\mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ for alle de volumelement som volumet er delt opp i. Bidraget til disse flateintegralene fra tilgrensende flateelement i to naboelementer vil være like store, men med motsatt fortegn. Dette er fordi $d\boldsymbol{\sigma}$ har motsatt pil for de to flateelementene etter som de tilhører det ene eller det andre av nabovolumelementene. Bidraget fra tilgrensende flateelementer i nabovolumelementene vil da, når vi summerer over elementene, oppheve hverandre. Bare flateelementer som ikke har noe tilgrensende flateelement innenfor volumet τ vil derfor gi bidrag til summen. Summen over alle volumelementene reduserer seg derfor til et integral av $\mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ over flaten σ som omslutter volumet. Vi får følgende

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau = \int_{\sigma} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (5.12)$$

Dette er *Gauss' sats*. Den sier hvordan et divergensintegral over et volum kan omformes til et flateintegral over volumets begrensingsflate. Skalarproduktet $\mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ kaller vi fluksen av vektoren \mathbf{A} gjennom flaten $d\boldsymbol{\sigma}$. Flateintegralet i (5.12) gir da \mathbf{A} 's fluks gjennom flaten σ og Gauss sats uttrykker dermed at den samlede divergens av en vektor innenfor et område er gitt ved fluksen av vektoren gjennom området begrensingsflate.

Ved å ta utgangspunkt i (5.2) kan vi ved nøyaktig samme resonnement som ledet fram til (5.12) vise at

$$\int_{\tau} \nabla \beta d\tau = \int_{\sigma} \beta d\boldsymbol{\sigma} \quad (5.13)$$

På tilsvarende måte finner vi fra (5.4) at

$$\int_{\tau} \nabla \times \mathbf{A} d\tau = - \int_{\sigma} \mathbf{A} \times d\boldsymbol{\sigma} \quad (5.14)$$

Integralsatsene (5.13) og (5.14) blir også ofte betegnet som Gauss' sats og disse kan også utledes direkte fra (5.12). Setter man for eksempel $\mathbf{A} = \beta \mathbf{i}$, hvor \mathbf{i} er enhetsvektoren langs x -aksen i et kartesisk koordinatsystem, får man fra (5.12)

$$\int_{\tau} \frac{\partial \beta}{\partial x} d\tau = \int_{\sigma} \beta \mathbf{i} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

Tilsvarende formler vil man få for de øvrige to koordinatretningene. Multipliserer man hver av disse likningene med den tilhørende enhetsvektoren og adderer, får man så (5.13). Ved å gå frem på liknende måte kan man også utlede (5.14) direkte fra (5.12).

I utledningen av Gauss sats forutsatte vi at volumet var begrenset av bare en begrensingsflate. Det er imidlertid lett å utlede den tilsvarende sats for det tilfellet at vi innenfor den 'ytre' begrensingsflaten σ har en eller flere indre begrensingsflater, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ som avgrensner 'huller' i feltet. Når vi skal utføre summasjonen på høyre side i (5.11), vil vi foruten bidragene på den ytre begrensingsflate σ også få bidrag fra begrensingsflatene $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$

5.5 Greens sats

Setter vi $\mathbf{A} = \beta \nabla \kappa$, hvor β og κ er skalarer, i Gauss sats (5.12), får vi

$$\int_{\tau} \nabla \cdot (\beta \nabla \kappa) d\tau = \int_{\sigma} \beta \nabla \kappa \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (5.15)$$

Ved hjelp av (1.19) kan integranden i integralet på venstre side i denne likningen skrives

$$\nabla \cdot (\beta \nabla \kappa) = \nabla \beta \cdot \nabla \kappa + \beta \nabla^2 \kappa$$

hvor operatoren ∇^2 er definert ved

$$\nabla^2 \kappa = \nabla \cdot (\nabla \kappa)$$

Lar vi $\frac{\partial \kappa}{\partial n}$ betegne $\nabla \kappa$'s komponent langs enhetsvektoren \mathbf{n} loddrett flateelement $d\boldsymbol{\sigma}$ får vi

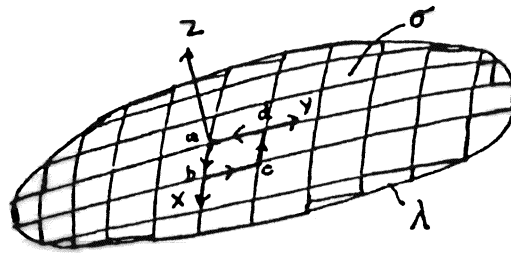
$$\beta \nabla \kappa \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \beta \frac{\partial \kappa}{\partial n} d\sigma$$

Derved kan (5.15) omskrives

$$\int_{\tau} \nabla \beta \cdot \nabla \kappa d\tau = \int_{\sigma} \beta \frac{\partial \kappa}{\partial n} d\sigma - \int_{\tau} \beta \nabla^2 \kappa d\tau \quad (5.16)$$

Denne likningen uttrykker *Greens sats* som spiller en stor rolle i matematisk analyse og feltteori. Et viktig spesialtilfelle av Greens sats får vi ved å sette $\kappa = \beta$. Dette gir

$$\int_{\tau} (\nabla \beta)^2 d\tau = \int_{\sigma} \beta \frac{\partial \beta}{\partial n} d\sigma - \int_{\tau} \beta \nabla^2 \beta d\tau \quad (5.17)$$



Figur 5.3: Flaten inndeles i elementer

5.6 Stokes' sats

Vi betrakter en flate av endelig utstrekning σ , og vi antar at den er begrenset av en sammenhengende begrensingskurve λ . Vi tenker oss flaten delt i små rektangulære flatelementer slik som antydnet på figur 5.3. I første omgang antar vi at elementene har endelig utstrekning. Vi velger ut et slikt flatelement ($abcd$) og legger x - og y -aksen langs sidekanter i flatelementet og med z -aksen normalt til flatelementet. Sidekantene i flatelementet er dx og dy henholdsvis langs x - og y -retningen. Skalarproduktet mellom virvlingen til en vilkårlig vektor \mathbf{A} og vektoren $d\boldsymbol{\sigma} = dx dy \mathbf{k}$ er

$$\nabla \times \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy$$

Vi integrerer denne likningen over et areal som tilsvarer flatelementet

$$\int \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iint \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy$$

På høyre side i denne likningen kan man integrere en gang og derved redusere dobbelintegralet til et enkelt integral. Dette gir

$$\int \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_b^c A_y dy - \int_a^d A_x dx - \int_d^c A_x dx + \int_a^b A_x dx$$

Vi ser at uttrykket på høyre side i denne likningen er sirkulasjonen av vektoren \mathbf{A} om begrensingsflaten for elementet. For *elementet* får vi derfor

$$\int \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (5.18)$$

hvor linjeintegralet er beregnet om elementets begrensingsflate, og integrasjonen er foretatt i positiv omløpsretning. Vi kan nå summere uttrykkene av formen (5.18) for alle elementene som vi har delt flaten σ i. Bidragene til linjeintegralene fra tilgrensende begrensingslinjer i to naboelementer vil være like store og med motsatt fortegn fordi integrasjonsretningen vil være motsatt. Følgelig vil man bare få bidrag til summen fra linjeelementet som ikke grenser inn til naboelementer. Dersom flatelementene gjøres infinitesimale, så vil flatelementene 'fylle' hele området σ , dette vil bli begrenset av en glatt begrensingskurve

λ . Summen av (5.18) over alle flatelementene som flaten σ er delt i, reduserer seg derfor til

$$\int_{\sigma} \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (5.19)$$

hvor sirkulasjonen av \mathbf{A} er beregnet om kurven λ som begrenser flaten σ , og omløpsretningen er i positiv retning. Likningen (5.19) blir kalt *Stokes' sats*.

Ved utledningen av Stokes' sats forutsatte vi at området var begrenset av en begrensingskurve. Dersom det i tillegg til den 'ytre' begrensingskurven λ er en eller flere begrensingskurver $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ som avgrensner 'huller' innenfor området, vil man i tillegg til bidraget fra kurven λ få bidrag til (5.19) fra de øvrige begrensingskurvene. Omløpsretningen for linjeintegralene langs begrensingskurvene

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ må velges slik at en har området som det integreres over til høyre for omløpsretningen. En innser lett at det må være så ved å betrakte en figur som angir flaten med 'ytre' og 'indre' begrensingsflater.

5.7 Øvingsoppgaver

1. Vis at flateintegralet over en lukket flate av en konstant skalar er null. Vis at det samme gjelder for en konstant vektor.
2. I kartesiske koordinater er hastighetsfeltet gitt ved

$$\mathbf{v} = -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j}$$

- a) Finn det tilsvarende uttrykket for \mathbf{v} i polarkoordinater og vis at en kan skrive $\mathbf{v} = \omega \mathbf{k} \times \mathbf{r}$ hvor \mathbf{r} er radius vektor og \mathbf{k} er enhetsvektoren i aksial retning normalt (x, y) planet
 - b) Beregn sirkulasjonen av \mathbf{v} langs begrensingskurven for et flatelement abcd som er del av et sektorsegment. Sidekantene ab og cd er sirkelbuer henholdsvis med lengde $r\Delta\varphi$ og $(r + \Delta r)\Delta\varphi$. og sidekantene bc og ad er deler av stråler fra origo med lengde Δr
 - c) Bruk Stokes sats og finn virvlingen i et vilkårlig punkt i feltet. Kontroller resultatet ved å beregne virvlingen direkte.
3. I kartesiske koordinater er hastighetsfeltet gitt ved

$$\mathbf{v} = \frac{C}{2\pi} \left[-\frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j} \right]$$

hvor C er en konstant

- a) Finn det tilsvarende uttrykket for \mathbf{v} i polarkoordinater
- b) Beregn sirkulasjonen av \mathbf{v} langs begrensingskurven for flatelementet abcd definert i oppgave 1b.
- c) Finn virvlingen i feltet

- d) Beregn sirkulasjonen av \mathbf{v} langs en sirkellinje med sentrum i origo. Hvordan tolker du resultatene i c) og d)?

4. Et strømfelt i jordatmosfæren er gitt i sfæriske polarkoordinater ved

$$\mathbf{v} = f(r, \theta) \mathbf{i}_\varphi$$

hvor enhetsvektoren \mathbf{i}_φ er rettet østover, θ er polavstanden og $f(r, \theta)$ er en vilkårlig funksjon funksjon av r og θ

- a) Vis at feltet representerer en divergensfri strømning.
b) Begrunn at man ved å velge

$$f(r, \theta) = C \frac{\sin 3\theta}{r}$$

hvor C er en positiv konstant får et felt som skjematisk beskriver passat- og vestenvinds-feltet henholdsvis på lavere og høyere bredder på nordlig halvkule, $\theta \leq \frac{\pi}{2}$.

- c) Beregn sirkulasjonen av \mathbf{v} om en passende valgt lukket kurve på kuleflaten og finn deretter vertikalkomponenten av virvlingen i feltet.

Kapittel 6

Virvling og sirkulasjon

6.1 Virvellikningen

Vi har tidligere sett at virvlingen i et punkt i hastighetsfeltet er et uttrykk for rotasjonen av det fluidelementet som er i dette punktet. Siden virvlingen eller rotasjonen er en fundamental egenskap ved feltet, vil vi nå utlede en likning som sier hvordan virvlingen endrer seg i tiden. Denne likningen har betegnelsen *virvellikningen* og den spiller en tilsvarende viktig rolle i fluidmekanikk som spinsatsen i mekanikken for stive legemer.

Vi benytter resultatet fra oppgave (1.11) og skriver bevegelseslikningen (2.13) på formen

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) + \mathbf{c} \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}$$

hvor \mathbf{f} representerer volumkreftene og eventuelle friksjonskrefter, og \mathbf{c} betegner som før virvlingen til hastighetsfeltet. Vi tar virvlingen til vektorene på høyre og venstre side i denne likningen, og benytter oss av at virvlingen til en gradientvektor er identisk null. Derved får vi

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{c} \times \mathbf{v}) = -\nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) + \nabla \times \mathbf{f}$$

Fra (1.20) og (1.16) følger

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) = -\frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p$$

slik at vi kan skrive

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{c} \times \mathbf{v}) = \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p + \nabla \times \mathbf{f} \quad (6.1)$$

Denne likningen er en form av virvellikningen, og den uttrykker hvordan virvlingen endrer seg i feltet.

Vi skal ikke diskutere denne likningen i sin alminnelighet, og nøyer oss med å vise at under visse betingelser så vil virvlingen holde seg på null overalt i feltet.

La oss først anta at massefeltet er *barotrop* slik at tettheten til en hver tid er en funksjon av trykket

$$\rho = \rho(p)$$

Det innebærer at ekvidensflater og isobarflater er sammenfallende og derved er $\nabla\rho$ og ∇p parallelle vektorer, slik at vektorproduktet av disse to vektorene er null. I dette tilfellet vil første leddet på høyre side i likningen (6.1) falle bort. Leddet vil selvsagt også falle bort når tettheten er uniform.

Vi skal videre anta at \mathbf{f} representerer et konservativt kraftfelt, slik at \mathbf{f} kan avledes av et potensial

$$\mathbf{f} = -\nabla\phi$$

Dette vil for eksempel være tilfellet om den kraften består av tyngdekraften eller sentrifugalkraften, men det vil ikke være tilfellet dersom friksjonskrefter eller Coriolis-kraften er tatt med i \mathbf{f} . Dersom vi i denne omgang ser bort fra friksjonskrefter og Coriolis-kraften og antar at \mathbf{f} er en gradientvektor, så vil også siste leddet på høyre side av likningen (6.1) falle bort. Under de forutsetninger som her er gjort, kan derfor (6.1) skrives

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{c} \times \mathbf{v}) = 0 \quad (6.2)$$

Vi ser at denne likningen er tilfredsstillet dersom $\mathbf{c} = 0$. Det betyr at en virvelfri bevegelse er en mulig bevegelsestilstand når feltet er barotrop og fluidet bare er påvirket av konservative krefter. Det gjenstår å vise at dersom bevegelsen er virvelfri ved et tidspunkt, så vil den holde seg virvelfri. La oss anta at ved tidspunkt $t = 0$ så er $\mathbf{c} = 0$ overalt i feltet. Fra (6.2) følger det at også den tidsderiverte av \mathbf{c} ved $t = 0$ er null. Altså

$$\left(\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$$

Ved å derivere (6.2) med hensyn på t kan vi så vise at også de høyere tidsderiverter av \mathbf{c} ved $t = 0$

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{c}}{\partial t^2}\right)_{t=0}, \left(\frac{\partial^3 \mathbf{c}}{\partial t^3}\right)_{t=0}, \text{ o.s.v}$$

alle er null. Det betyr at \mathbf{c} må være null ved ethvert senere tidspunkt $t > 0$. Vi innser dette om vi tenker oss \mathbf{c} utviklet i en Taylor-rekke etter potenser av t omkring tidspunktet $t = 0$.

Vi skal nå omskrive andre leddet på venstre side i likning (6.2) og benytter formelen som er gitt i oppgave 10b og likning 1.17 i kapittel 1

$$\nabla \times (\mathbf{c} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{c} - \mathbf{c} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{c} \nabla \cdot \mathbf{v}$$

Derved kan (6.2) skrives

$$\frac{D\mathbf{c}}{dt} = \mathbf{c} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{c} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (6.3)$$

Figur 6.1: *Strekning og krympning av væskeelement.*

For to-dimensjonal bevegelse av en inkompressibel væske får likning (6.3) en spesielt enkel form. I dette tilfellet er $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ og vektoren \mathbf{c} står normalt på vektoren \mathbf{v} og det medfører at også leddet $\mathbf{c} \cdot \nabla \mathbf{v} = 0$. Det betyr at

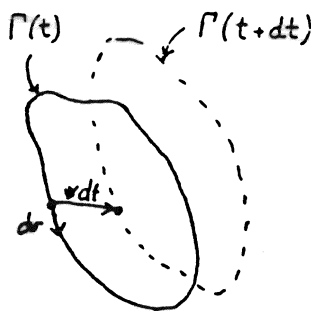
$$\frac{D\mathbf{c}}{dt} = 0 \quad (6.4)$$

Virvlingen er altså bevart for den enkelte væskepartikkel i to-dimensjonal inkompressibel strøm.

Likningen (6.3) sier at dersom man betrakter et lite element (egentlig en partikkel), så vil virvlingen eller rotasjonshastigheten for dette elementet endre seg som følge av to effekter. For det første vil virvlingen øke eller minke avhengig henholdsvis av om elementet trekkes seg sammen ($\nabla \cdot \mathbf{v} < 0$) eller utvider seg ($\nabla \cdot \mathbf{v} > 0$). For det andre vil virvlingen endre seg ved at elementet strekkes eller krympes i virvlingsretningen (rotasjonsaksen). La oss betrakte et element av form som en sirkulær sylinder med akse langs retningen \mathbf{c} som faller sammen med z -aksen. Vi tenker oss at elementet deformeres slik at radius i sylindere enten øker eller minker, mens akse står fast. Dette medfører at dersom fluidet er inkompressibelt ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$), så vil høyden av sylindere henholdsvis avta eller øke i de to tilfellene. I det første tilfellet blir elementet krympet, og i det andre tilfellet blir elementet strukket. Dette betyr at $\mathbf{c} \cdot \nabla \mathbf{v} = c_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}$ er negativ eller positiv avhengig av om elementet krympes eller strekkes. Fra virvellikningen (6.3) følger det derfor at virvlingen øker hvis elementet strekkes og at virvlingen avtar hvis elementet krympes. Vi ser at virvlingsendringen p.g.a. strekning eller krympning av elementet er analogt til den endringen i rotasjonshastigheten som oppstår når treghetsmomentet for et fast legeme avtar eller øker. I to-dimensjonal plan bevegelse av en inkompressibel væske vil et væskeelement hverken kunne strekkes eller krympes. Dette forklarer at virvlingen er bevart for den enkelte væskepartikkel i denne bevegelsesformen.

6.2 Kelvins sats

Stokes' sats sier at det er en forbindelse mellom virvling og sirkulasjon av en vektor. Vi betrakter en flate σ , begrenset av en kurve λ , hvor flaten i sin helhet



Figur 6.2: Materiell kurve som flyter i feltet

ligger i mediet. Dersom hastighetsfeltet er virvelfritt, følger det fra Stokes' sats at sirkulasjonen C av hastighetsvektoren om en vilkårlig kurve λ i feltet er null. Altså

$$C = \oint_{\lambda} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (6.5)$$

når $\nabla \times \mathbf{v} = 0$.

Fra bevegelseslikningen kan man også utlede en likning som sier hvordan sirkulasjonen av en hastighetsvektor endrer seg i tiden. Vi betrakter en materiell kurve λ som består av de samme partiklene, og når fluidet strømmer flyter kurven i feltet. Sirkulasjonen av hastighetsvektoren \mathbf{v} om denne kurven er derfor en funksjon av tiden og vi skriver

$$C(t) = \oint_{\lambda} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

Endringen av sirkulasjon i tiden er

$$\frac{dC}{dt} = \oint \frac{D}{dt} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r})$$

Dette følger umiddelbart fra definisjonen av den materielle deriverte. Nå har vi at

$$\frac{D}{dt} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}) = \frac{D\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{v} \cdot \frac{D(d\mathbf{r})}{dt}$$

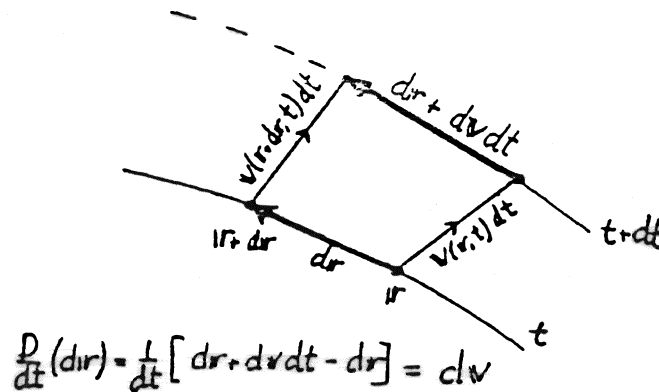
Det andre leddet på høyre side i denne likningen kan skrives som et totalt differensial

$$\mathbf{v} \cdot \frac{D(d\mathbf{r})}{dt} = \mathbf{v} \cdot d\left(\frac{D\mathbf{r}}{dt}\right) = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = d\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right)$$

Siden integralet av et totalt differensial om en lukket kurve er null, får vi

$$\frac{dC}{dt} = \oint \frac{D\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r}$$

Setter vi så inn for akselerasjonen fra bevegelseslikningen, leder det til



Figur 6.3:

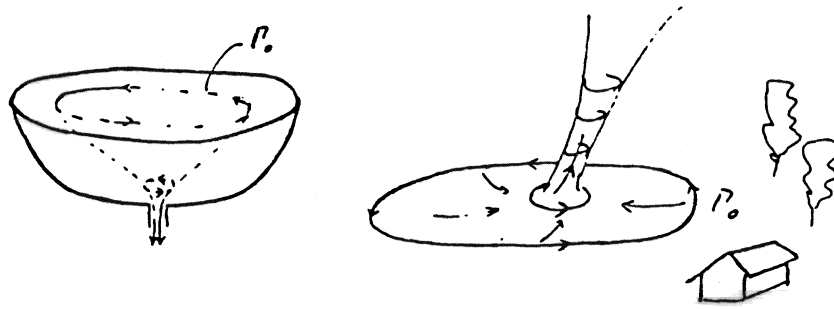
$$\frac{dC}{dt} = - \oint \frac{dp}{\rho} + \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \quad (6.6)$$

Denne generelle likningen uttrykker hvordan sirkulasjonen endrer seg som følge av variasjoner i tetthetsfeltet og virkninger av volum- og friksjonskrefter. Hvis bevegelsen er friksjonsfri og \mathbf{f} kan avledes av et potensial, så vil andre leddet på høyre side i (6.6) være null. Er massefeltet dessuten barotrop, så vil også det første leddet på høyre side i (6.6) være null. Under disse forutsetninger har vi at

$$\frac{dC}{dt} = 0 \quad (6.7)$$

Dette er *Kelvins sats* som sier at sirkulasjonen om en materiell kurve er konstant i friksjonsfri, barotrop strømming hvor kraften \mathbf{f} kan avledes av et potensial. Når bevegelsen har startet fra ro, er $C = 0$ initielt og sirkulasjonen vil forbli null i den etterfølgende bevegelse. Etterat Kelvin hadde utledet (6.7) ble den generelle likningen (6.6) formulert og diskutert av den norske fysikeren Bjerknes. Han var den første som forsto hvilke implikasjoner den generelle sirkulasjonsatsen har for forståelsen av bevegelser i luft og hav.

La oss betrakte en materiell kurve med en gitt sirkulasjon C i et homogen og inkompressibelt fluid. Dersom bevegelsen er slik at omkretsen av kurven avtar, så må i følge Kelvins sats hastighetskomponenten langs kurvetangenten øke. Dette forklarer hvorfor det kan oppstå intense sirkulasjonshastigheter ved utløpet i badekar og i skypumper (virvelvinder). I badekaret er det utstrømmingen som fører til at en materiell kurve som opprinnelig har en stor omkrets blir ført mot utløpet samtidig med at omkretsen avtar. En svak sirkulasjonshastighet ved karetets rand vil derved bli til en intens sirkulasjon i det trange utløpet. I en virvelvind eller skypumpe stiger luften oppover i sentrum. En svak sirkulasjonshastighet langs en materiell kurve langt fra skypumpen vil derved bli til en intens sirkulasjonshastighet når kurven nærmer seg sentret i skypumpen. Konvergens i hastighetsfeltet vil derfor bidra til at vindhastigheten øker inn mot sentrum.



Figur 6.4:

William Thomson, Lord Kelvin (1824–1907) født i Belfast og var professor i naturvitenskap ved Universitetet i Glasgow i hele 53 år. Ble adlet for fortjenestefullt arbeid. Han ga viktige bidrag til utviklingen av termodynamikken og han formulerte blant annet den absolutte temperaturskalaen. I samtiden var han best kjent for å ha forbedret effektiviteten av telegrafkabler. Lord Kelvin skrev omkring 300 vitenskapelige avhandlinger og dekket de fleste områder innen teoretisk fysikk. I hydrodynamikk diskuterte han blant annet virvelbevegelse og ga forklaringen på hvorfor bølgemønstret bak skip får den karakteristiske vifteformen.

Vilhelm Bjerknes (1862–1951) utdannet i Oslo, Paris og Bonn. Arbeidet senere i Stockholm, Leipzig, Bergen og tilslutt igjen i Oslo hvor han var professor i teoretisk fysikk. Det var oppdagelsen av sirkulasjonssatsen som omkring århundreskiftet fikk Bjerknes til å forlate sitt arbeidsfelt i fysikk og ren hydrodynamikk for å vie seg til studiet av bevegelse i luft og vann. Han foreslo tidlig at morgendagens vær måtte kunne beregnes ved integrasjon av de differensiallikninger som styrer atmosfærens bevegelse. På den tiden var dette en ny og revolusjonerende ide. Ideen kunne imidlertid først fullt ut realiseres etter at kraftige elektroniske datamaskiner ble tilgjengelige. Han hadde en usedvanlig evne til å tiltrekke og inspirere flinke studenter og medarbeidere. Under tiden i Bergen skapte forskningsgruppen under Bjerknes' ledelse en ny syklonmodell som ga forklaringen på hvordan vind, temperatur og nedbør var fordelt omkring et stormsentrum. Modellen ble formet etter omfattende analyse av værobservasjoner og den fikk fundamental betydning for utviklingen innen værvarsling. Bjerknes regnes i dag som en av grunnleggerne av moderne meteorologi. Den vitenskapelig innsats han og hans nærmeste medarbeidere utførte er en av de største ytelser vårt land har gitt til utviklingen av den internasjonale vitenskap.

Kapittel 7

Virvelfri strømming

7.1 Virvelfri strømming

Vi har sett at for friksjonsfri og barotrop strømming vil sirkulasjonen være bevart. Det betyr at dersom sirkulasjonen er null i utgangspunktet så vil den også holde seg null i den etterfølgende bevegelse. Når sirkulasjonen er null om enhver lukket kurve i feltet følger det fra Stokes sats at virvlingen er null i feltet.

I mange tilfeller vil det være slik at friksjonsvirkningen har liten innflydelse på strømmingen bortsett fra begrensede soner eller sjikt hvor fluidet grenser inn mot begrensingsflater hvor fluidet tvinges til å hefte mot flaten. For et skip som går gjennom vannet vil for eksempel friksjonsvirkningen være begrenset til et forholdsvis tynt *grensesjikt* langs bunnplatene og dessuten i kjølvannsstrømmen bak skipet. Likeledes vil friksjonsvirkningen i luftstrømmen omkring en flyving være begrenset til et tynt grensesjikt langs vingen. Utenfor grensesjiktet og kjølvannet, vil strømmingen både omkring skipet og flyet være tilnærmet virvelfri. Det finnes mange andre eksempler hvor bevegelsen er virvelfri og bølgebevegelse i vann er et annet viktig tilfelle. For praktiske anvendelser av hydrodynamikk spiller derfor virvelfrie bevegelser en viktig rolle.

7.2 Hastighetspotensialet. Laplace-likningen.

Siden virvlingen til en gradientvektor er identisk null så vil betingelsen om at hastigheten kan skrives som gradienten til en skalarfunksjon

$$\mathbf{v} = \nabla\phi \quad (7.1)$$

vanligvis sikre at strømmen er virvelfri. Skalarfunksjonen ϕ betegner vi *hastighetspotensialet*. Når bevegelsen er virvelfri, eksisterer det alltid et potensiale som hastigheten kan avledes av. Dersom fluidet dessuten kan regnes som inkompressibelt, så er

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Når \mathbf{v} er gitt ved (7.1) følger det at hastighetspotensialet i dette tilfellet må oppfylle *Laplace-likningen*

$$\nabla^2\phi = 0 \quad (7.2)$$

hvor *Laplace-operatoren* ∇^2 er gitt ved $\nabla^2\phi = \nabla \cdot (\nabla\phi)$. I kartesiske koordinater har Laplace-operatoren formen

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (7.3)$$

Uttrykkene for Laplace-operatoren i sylindriske og sfæriske polarkoordinater er henholdsvis

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (7.4)$$

og

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (7.5)$$

hvor r , φ og θ henholdsvis betegner den radielle, asimetale og sonale koordinaten. En kan utlede uttrykkene (7.4) og (7.5) ved å benytte resultatene fra punkt 5.3 og det overlates til leseren å gjøre dette.

I inkompressibel og virvelfri bevegelse tilfredsstiller hastighetspotensialet altså Laplace-likningen. Vi sier derfor at hastighetsfeltet er et Laplacisk felt og selve strømningsformen betegnes ofte *potensialstrømning*.

Pierre Simon Laplace (1749–1827) født i Normandi i en bondefamilie. Ble tidlig lagt merke til på grunn av usedvanlige analytiske evner og ble 18 år gammel professor i matematikk ved Ecole Militaire i Paris. Kjent for sine arbeider innen beregninger av planetbaner (celest mekanikk). Formulerte de grunnleggende likninger for beregning av tidevann. Arbeidet også med overflatebølger. Ble som Lagranges vist stor respekt under skiftende politiske forhold i Frankrike. Hadde flere ansvarsfulle stillinger under Napoleon, men Napoleon bemerket: “Matematiker av første klasse, men en middelmådig administrator som tok med seg inn i administrasjonen sansen for det infinitesimale”

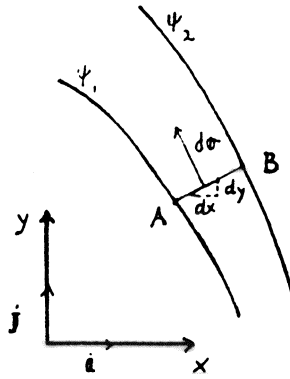
7.3 Strømfunksjonen for plan strømning

Dersom strømmen kan regnes som inkompressibel og strømningstilstanden er slik at bevegelsen foregår i et plan, er det naturlig å innføre strømfunksjonen. La oss anta at bevegelsen foregår i x , y -planet og at hastighetskomponentene langs de to aksene er henholdsvis u og v . Vi definerer *strømfunksjonen* ψ slik at

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7.6)$$

Ved dette valget av strømfunksjon ser vi at hastighetsfeltet er divergensfritt. Dersom hastigheten er gitt ved (7.6), så representerer dette feltet en mulig bevegelsesform for en inkompressibel væske. Likningen til å bestemme strømlinjene finner vi ved å benytte (1.5). Dette gir

$$u dy - v dx = 0 \quad (7.7)$$



Figur 7.1: Strømrør i plan strøm.

Ved innsetting fra (7.6) får vi at dette uttrykket kan skrives som et totalt differensial

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy = 0$$

En strømlinje er derfor gitt ved en konstant verdi av strømfunksjonen

$$\psi(x, y, t) = \text{konstant} \quad (7.8)$$

Ved hjelp av likning (7.7) kan vi gi en fysikalsk tolkning av strømfunksjonen. Vi betrakter en stasjonær strøm i et strømrør begrenset av to nabostrømlinjer hvor strømfunksjonen henholdsvis har verdien ψ_1 og ψ_2 . Volumstrømmen gjennom et snitt σ fra A til B normalt på strømrøret er

$$Q = \int_{\sigma} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

hvor $d\boldsymbol{\sigma}$ er et flatelement i snittet σ og vektoren $d\boldsymbol{\sigma}$ er rettet normalt snittflaten. Regner vi retningen av $d\boldsymbol{\sigma}$ positiv mot venstre i forhold til retningen AB , har vi at

$$d\boldsymbol{\sigma} = -dy\mathbf{i} + dx\mathbf{j}$$

Ved å innføre strømfunksjonen kan vi derfor skrive

$$Q = \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi = \psi_2 - \psi_1 \quad (7.9)$$

Volumstrømmen gjennom strømrøret (i retning mot venstre i forhold til retningen AB) er derfor lik differansen mellom strømfunksjonens verdier på de to strømlinjene som begrenser strømrøret.

Det er viktig å være klar over at strømfunksjonen kan innføres for to-dimensjonal bevegelse uavhengig av om strømmen er virvelfri. I plan bevegelse er virvlingen rettet normalt bevegelsesplanet og komponenten av virvlingen er

$$c = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \nabla^2 \psi$$

Dette viser at virvlingen er den Laplaciske til strømfunksjonen. Hvis bevegelsen foruten å være divergensfri, også er virvelfri, blir

$$\nabla^2 \psi = 0$$

I dette tilfellet tilfredstiller strømfunksjonen, på samme måte som hastighetspotensialet, Laplace-likningen. Ved å sammenlikne uttrykkene for hastighetskomponentene gitt ved (7.1) og (7.6) finner vi at det eksisterer en forbindelse mellom strømfunksjonen og hastighetspotensialet for plan bevegelse. Relasjonen mellom ϕ og ψ er

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7.10)$$

som går under navnet Cauchy-Riemann relasjonene etter den den franske matematikeren Baron Augustin Louis de Cauchy (1789-1857) og den tyske matematikeren Georg Friedrich Riemann (1826-1866).

7.4 Løsninger av Laplace-likningen i to dimensjoner

I kartesiske koordinater har den to-dimensjonale Laplacelikningen formen

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (7.11)$$

Visse polynomer hvor leddene er potenser av x og y er i dette tilfellet løsninger av likningen. Vi lar ϕ_o , ϕ_1 , ϕ_2 osv. betegne polynomene hvor indekset angir graden av polynomet. Ved innsetting i (7.11) ser vi at likningen er tilfredstilt dersom

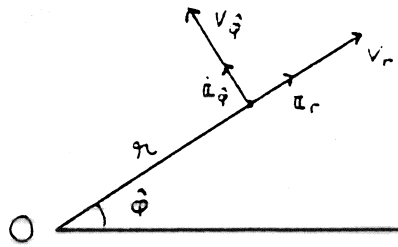
$$\begin{aligned} \phi_o &= A_o \\ \phi_1 &= A_1(x + a_1y) \\ \phi_2 &= A_2(x^2 + a_2xy - y^2) \\ \phi_3 &= A_3(x^3 - 3a_3x^2y - 3xy^2 + a_3y^3) \\ &\dots\dots \end{aligned} \quad (7.12)$$

hvor A_o , A_1, \dots , og a_1, a_2, \dots , er konstanter eller eventuelt funksjoner av tiden. Det overlates til leseren å finne formen på høyere ordens polynomer som tilfredstiller likningen (7.11). Ved å benytte relasjonene (7.10) kan vi nå finne uttrykkene for strømfunksjonen som tilsvarende (7.12). Resultatet er

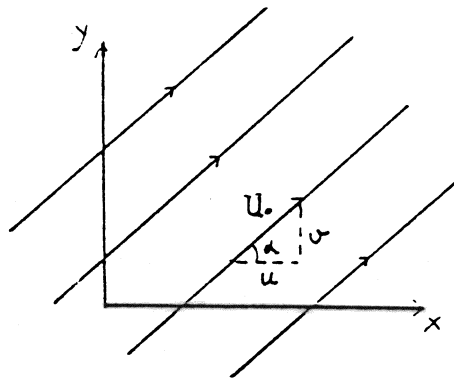
$$\begin{aligned} \psi_o &= A_o \\ \psi_1 &= A_1(a_1x - y) \\ \psi_2 &= A_2(\frac{1}{2}a_2x^2 - 2xy - \frac{1}{2}a_2y^2) \\ \psi_3 &= A_3(-a_3x^3 - 3x^2y + 3a_3xy^2 + y^3) \\ &\dots\dots \end{aligned} \quad (7.13)$$

I plane sylindriske polarkoordinater har Laplace-likningen formen

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (7.14)$$



Figur 7.2: Polarkoordinater.



Figur 7.3: Rettlinjet strøm.

Ved innsetting i (7.14) ser vi at

$$\phi = A \ln r \quad (7.15)$$

og

$$\phi = A\varphi \quad (7.16)$$

er løsninger hvor A kan være konstant eller eventuelt avhenger av tiden. Strømhastigheten er bestemt ved

$$\mathbf{v} = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\mathbf{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\mathbf{i}_\varphi$$

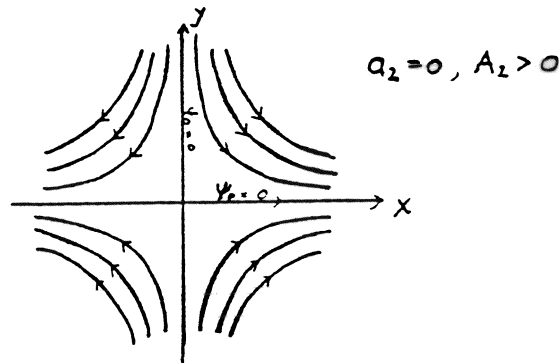
hvor \mathbf{i}_r og \mathbf{i}_φ er enhetsvektorer i radiell og asimutal retning.

La oss se på den fysiskalske tolkningen av noen av strømfeltene gitt ved (7.12), (7.13), (7.15) og (7.16).

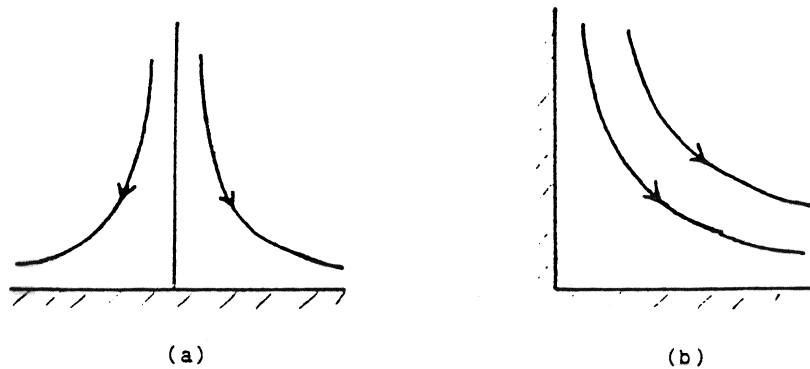
7.4.1 Rettlinjet strøm

Til feltet ϕ_1, ψ_1 svarer hastighetskomponentene er $u = A_1, v = a_1 A$. Feltet representerer en uniform rettlinjet strøm U_0 , hvor strømretningen danner vinkelen α med x -aksen og

$$\tan \alpha = \frac{v}{u} = a_1$$



Figur 7.4: Stagnasjonsfelt.



Figur 7.5: Strøm mot vegg og i hjørne

Strømhastigheten er

$$U_o = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{A_1}{\cos \alpha}$$

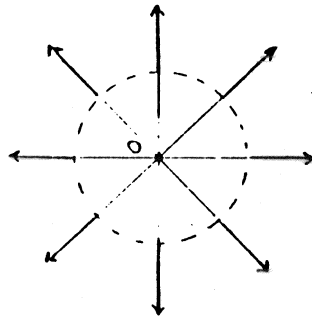
7.4.2 Stagnasjonstrøm

For feltet ϕ_2, ψ_2 er hastighetskomponentene $u = A_2(2x + a_2y)$, $v = A_2(a_2x - 2y)$. Strømlinjene er gitt ved $\psi = \psi_o = \text{konstant}$, og likningen for strømlinjene blir

$$\frac{1}{2}A_2a_2(x^2 - y^2) - 2A_2xy = \psi_o$$

Formen på strømlinjebildet blir forskjellig etter hvordan konstantene a_2 og A_2 velges. Ved å velge $a_2 = 0$ og $A_2 \neq 0$ blir strømlinjene hyperbler med x - og y -aksen som asymptoter. For $\psi_o = 0$ degenererer hyperblene til aksene og strømlinjebildet for $A_2 > 0$ blir da som skissert på figur 7.4. For $A_2 < 0$ vil strømlinjene ha samme form, men retningen av strømmen vil være motsatt.

I origo er strømhastigheten null og vi sier at dette punktet er et stagnasjonspunkt i feltet. Funksjonene ϕ_2, ψ_2 kan brukes til å beskrive strømmen i nærheten av stagnasjonspunkter. Siden x - og y -aksen danner et sett av strømlinjer, kan vi for eksempel tenke oss at deler av disse representerer faste vegger. Vi kan da

Figur 7.6: *Kildefeltet.*

få strømlinebildet for en strøm inn mot en 'vegg' og for strøm i et rettvinklet 'hjørne'. I praksis vil friksjonsvirkningen være stor særlig nær veggen hvor friksjonen medfører at hastigheten er null. I tilfellet (a) vil friksjonsvirkningen være begrenset til et tynt lag nær veggen (grensesjikt) og det virvelfrie feltet gir god beskrivelse av strømmen utenfor dette tynne sjiktet. I tilfellet (b) vil friksjonsvirkningen blant annet medføre at det vil oppstå en eller flere virvler ved hjørnet og strømmen kan avvike betydelig fra det virvelfrie feltet også langt fra hjørnet.

7.4.3 Kilde og sluk

For feltet gitt ved (7.15) er hastighetskomponentene

$$v_r = A \frac{1}{r} \quad v_\varphi = 0$$

Hastigheten er overalt i feltet rettet radielt fra origo (O) og den avtar omvendt proporsjonal med avstanden fra O . Strømhastigheten er rettet utover eller innover fra O avhengig av om A er positiv eller negativ. Strømlinebildet ser ut som på figur 7.6. Vi sier at feltet tilsvarende en *kilde* i O for $A > 0$ og et *sluk* i O for $A < 0$. Utstrømningen eller innstrømningen finner vi ved å integrere volumstrømmen over en sirkel om O med radius r . Dette gir

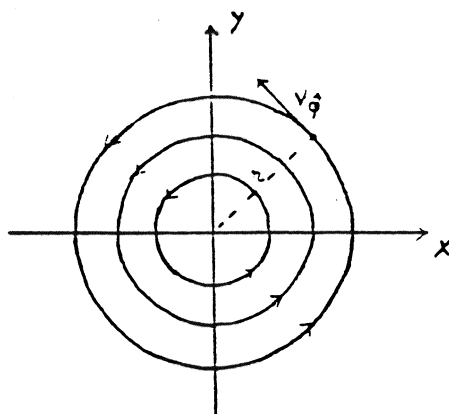
$$Q = \int_0^{2\pi} v_r r d\varphi = 2\pi A$$

7.4.4 Punktvirvel

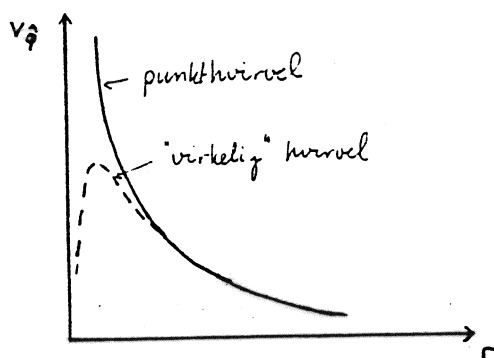
For feltet gitt ved (7.16) er hastighetskomponentene i radiell og asimutal retning henholdsvis

$$v_r = 0 \quad v_\varphi = \frac{A}{r}$$

Hastigheten er rettet normalt på radius vektor fra origo (O), og den avtar omvendt proporsjonal med avstanden fra O . Strømlineene som i dette tilfellet blir sirkler med sentrum i O er skissert i figur 7.7. I punktet O hvor $r = 0$



Figur 7.7: Punktvirvelfeltet.



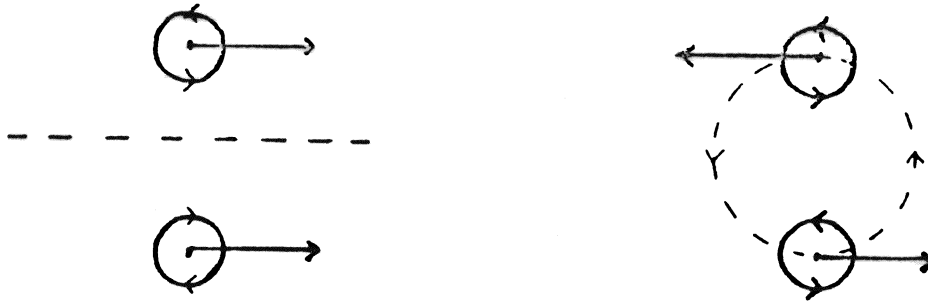
Figur 7.8: Sirkulasjonshastigheten som funksjon av avstanden fra sentret.

er hastigheten uendelig stor, og dette punktet må selvfølgelig utelates om man skal gi feltet en fysikalsk tolkning. Overalt utenfor origo er feltet virvelfritt, men hastighetssirkulasjonen om en lukket kurve som omgir O er forskjellig fra null. Velger vi å integrere hastigheten langs en sirkel med sentrum i O og radius r finner vi at hastighetssirkulasjonen er

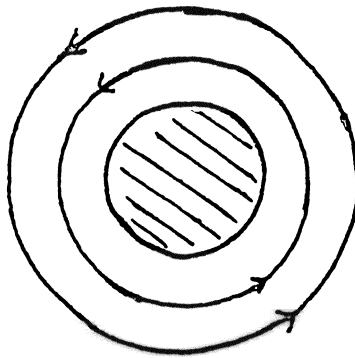
$$C = \int_0^{2\pi} v_\varphi r \, d\varphi = 2\pi A$$

Ved å benytte Stokes' sats kan man lett vise at hastighetssirkulasjonen har den samme verdi for enhver kurve som omslutter O .

Sirkulasjonen er positiv eller negativ avhengig av fortegnet på A . Fordi feltet er virvelfritt vil et væskeelement (untatt i O) ikke rotere, og det overlates til leseren å forklare hvorfor. Et væskeelement i O vil imidlertid rotere med uendelig stor vinkelhastighet. Av den grunn sier vi at feltet representerer en *punktvirvel*. Feltet er en primitiv modell av en virkelig virvel for eksempel intense virvler i atmosfæren (sykloner) eller virvler i tynne væskelag hvor de dominerende strømhastigheter tilnærmet tilsvarende plan bevegelse. I disse virvlene vil hastigheten avta på grunn av friksjonsvirkningen når man kommer nær inn mot sentret i virvelen slik som antydnet på figur 7.8. Er man tilstrekkelig



Figur 7.9: To punktvirvler som beveger i hverandres felt



Figur 7.10: Virvelfri sirkulasjon omkring sylinder.

langt fra sentret, så vil hastigheten imidlertid ofte variere på samme måten som i punktvirvelen.

Punktvirvler vil bevege seg under påvirkning av hverandre ved at virvlene driver i hastighetsfeltet satt opp av nabovirvlene. To virvler av samme styrke, men med motsatt sirkulasjon, vil for eksempel bevege seg rettlinjet fremover, mens de holder samme avstand fra hverandre (virvelpar). To virvler av samme styrke, men med samme sirkulasjon, vil rotere omkring hverandre som planeter.

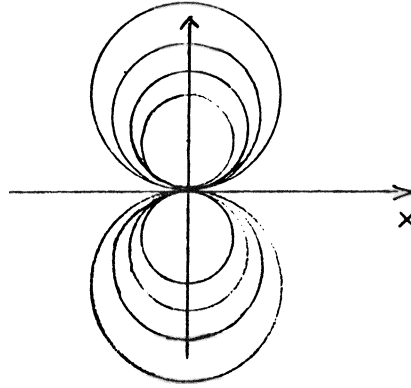
Begge bevegelsesformer kan iaktas i naturen eller i eksperiment. I tre-dimensjonal bevegelse kan virvelringer være mulig (røykringer).

Siden strømlinjene i punktvirvelfeltet er sirkler, kan også feltet representere en sirkulasjon om en fast sylinder, slik som antydnet i figur 7.10.

7.4.5 Dipolfeltet

Siden Laplace-likningen er lineær vil en sum av to eller flere løsninger av likningen også være en løsning. Ved å addere potensialene for en kilde og et sluk som ligger nær hverandre får vi for eksempel dipolfeltet som spiller en viktig rolle i flere anvendelser.

Vi legger et sluk i punktet $(a, 0)$ og en kilde i $(-a, 0)$ hvor a er positiv. Settes



Figur 7.11: Dipolfeltet.

styrken av kilden og sluket til $\frac{B}{2a}$ kan potensialet skrives

$$\phi = -\frac{B}{2a} \ln[(x-a)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}} + \frac{B}{2a} \ln[(x+a)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}$$

Ved å bruke regneregler for logaritmfunksjonen kan dette uttrykket omskrives

$$\phi = \frac{B}{4a} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \quad (7.17)$$

Vi skal nå finne grenseverdien for ϕ når $a \rightarrow 0$ og forutsetter at $x^2 + y^2 \gg a^2$. Derved får vi at

$$\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \approx 1 + \epsilon \quad (7.18)$$

hvor

$$\epsilon = \frac{4ax}{x^2 + y^2} \quad (7.19)$$

er en svært liten størrelse. Nå har vi at

$$\ln(1 + \epsilon) \cong \epsilon \quad (7.20)$$

for $\epsilon \ll 1$. Derved kan potensialet (7.17) skrives

$$\phi = \frac{Bx}{x^2 + y^2} \quad (7.21)$$

Dette er potensialet for dipolfeltet som altså fremkommer ved en grenseovergang hvor en kilde og en sluk med uendelig stor styrke legges uendelig nært hverandre. Den tilhørende strømfunksjonen er

$$\psi = \frac{By}{x^2 + y^2} \quad (7.22)$$

og en kan lett verifisere dette ved å bruke Cauchy-Riemann betingelsene (7.10). Likningen for strømlinjene er gitt ved $\psi = \psi_o = \text{konstant}$. Etter enkel regning får man

$$x^2 + \left(y - \frac{B}{2\psi_o}\right)^2 = \left(\frac{B}{2\psi_o}\right)^2$$

Dette viser at strømlinjene er sirkler med sentrum på y -aksen og med x -aksen som tangent (figur 7.11). En sier derfor at denne dipolen har x -aksen som dipolakse. Vi skal senere se at dipolfeltet kan brukes til å beskrive strøm omkring en sylinder.

Dipolfeltet opptrer også i andre grener av fysikk. I elektromagnetisme kan for eksempel de magnetiske feltlinjene omkring en magnetstav representeres ved et dipolfelt.

7.5 Løsning av Laplace-likningen i tre-dimensjoner. Pulserende kule

Vi skal her begrense oss til å betrakte en enkel løsning i sfæriske kulekoordinater, og vi skal anta at feltet avhenger kun av den radielle koordinaten r . I dette tilfellet kan Laplace-likningen ifølge (7.5) skrives

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0$$

Ved innsetting ser vi at likningen er oppfylt dersom

$$\phi = A \frac{1}{r} \tag{7.23}$$

hvor A er en konstant.

Strømhastigheten er i dette tilfellet rettet i radiell retning, og hastigheten er

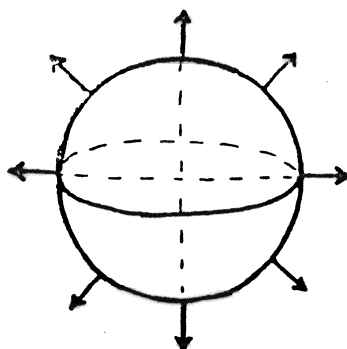
$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{A}{r^2}$$

Strømhastigheten avtar med kvadratet av avstanden fra sentret, og strømmen er rettet utover fra sentret dersom $A < 0$ og innover mot sentret dersom $A > 0$. Feltet representerer altså en *kilde* eller et *sluk* i tre-dimensjoner. Volumstrømmen, Q , ut eller inn finner vi ved å integrere over en kuleflate med areal $4\pi r^2$. Siden v_r er konstant over kuleflaten, er

$$Q = -\frac{A}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = -4\pi A$$

Da løsningen (7.23) ikke eksisterer i origo ($r = 0$), kan dette punktet ikke være en del av det fysiske feltet. Utelukker vi dette punktet ved for eksempel å betrakte strømmen utenfor en kule med radius a om origo, vil hastigheten på kuleflaten være

$$v_r = -\frac{A}{a^2}$$

Figur 7.12: *Pulserende kule.*

normalt på overflaten. Positiv A svarer til at kulen trekker seg sammen, negativ A til at den utvider seg. En kule som trekker seg sammen eller utvider seg i en homogen, inkompressibel væske, vil altså frembringe et strømfelt gitt ved hastighetsfeltet (7.23). Er A en periodisk funksjon av tiden, får vi feltet om en pulserende kule.

7.6 Andre løsninger av Laplace-likningen

Det finnes en rekke løsningsmetoder som gir andre løsninger enn de vi her har diskutert, og vi skal blant annet studere noen slike løsninger i kapitlet om bølger. Før vi går videre skal vi bare nevne at dersom ϕ er en løsning av Laplace, så vil også $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ være løsning av den samme likningen. Vi innser dette dersom vi deriverer likningen (7.2) med hensyn på x . Vi kan benytte dette til å lage nye løsninger ut fra de løsningene vi allerede har funnet foran.

I plane sylinderkoordinater er $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$. Ved å derivere (7.15) med hensyn på x , finner vi en ny løsning av Laplace-likningen

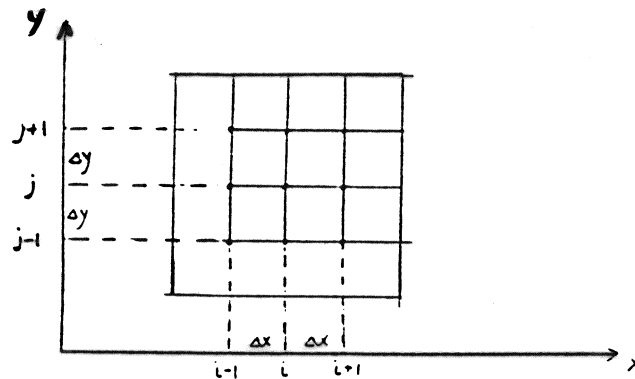
$$\phi = \frac{\partial}{\partial x} (A \ln r) = A \frac{x}{r^2} \quad (7.24)$$

Vi gjenkjenner dette feltet som dipolfeltet som vi tidligere har behandlet i avsnitt (7.4.5).

I sfæriske kulekoordinater er $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$. Ved å derivere (7.23) med hensyn på x finner vi

$$\phi = \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{1}{r} \right) = -A \frac{x}{r^3} \quad (7.25)$$

som ny løsning av Laplace-likningen i det tre-dimensjonale tilfellet. Flere løsninger ville ha fremkommet ved ytterligere derivasjoner med hensyn på x . De løsningene som følger av derivasjon av potensialet (7.23) spiller en så viktig rolle at de har fått eget navn (Legendre polynomer). På samme måten som vi har fått laget nye løsninger ved å derivere grunnløsningen med hensyn på x , ville også nye løsninger kommet frem ved å derivere med hensyn y eller z . Av alle disse løsningene skal vi her nøye oss med å gi uttrykkene (7.24) og (7.25), som



Figur 7.13: Gitternettet for endelige differanser

vi senere skal benytte henholdsvis når vi skal bestemme potensialstrømningen omkring en sylinder og en kule.

7.7 Numerisk løsning av Laplace-likningen

Ved hjelp av hurtige regnemaskiner er det mulig å finne numeriske løsninger av Laplace-likningen med stor nøyaktighet. Man benytter da for eksempel endelige differanse-metoder ('finite difference') hvor uttrykkene for de deriverte blir representert ved endelige differanser. Vi skal illustrere dette ved å løse den to-dimensjonale Laplace-likningen for strømfunksjonen ψ . La oss betrakte kartesiske koordinater x og y

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

Feltet deles i et rutenett med like store ruter hvor sidene i rutene er Δx og Δy . Vi gir hjørnet av rytene nummer slik at tallet i og j henholdsvis angir nummereringen i x - og y -retning. Strømfunksjonens verdi i punktet (i, j) angis med $\psi_{i,j}$. Den deriverte av ψ med hensyn på x mellom punktene (i, j) og $(i+1, j)$ tilnærmes med

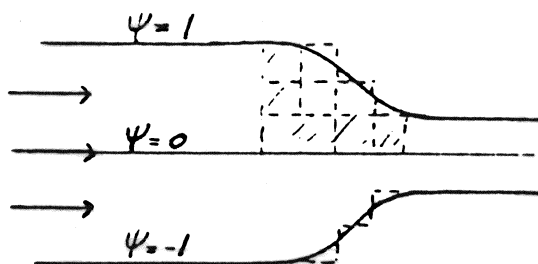
$$\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{\Delta x}$$

På tilsvarende måte finner vi et tilnærmet uttrykk for $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ mellom punktene $(i-1, j)$ og (i, j)

$$\frac{\psi_{i,j} - \psi_{i-1,j}}{\Delta x}$$

Ut fra disse to uttrykkene får vi at $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ i punktet (i, j) kan tilnærmes med

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)_{i,j} \simeq \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$



Figur 7.14: Gitternettet i kanal med innsnevring.

For den andre deriverte av ψ med hensyn på y i punktet (i, j) følger det på samme måte

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right)_{i,j} \simeq \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}$$

Innsetning i Laplace-likningen gir når vi velger $\Delta x = \Delta y$

$$\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} - 4\psi_{i,j} = 0 \quad (7.26)$$

Dette er altså en endelig differanse form av Laplace-likningen. Med $i = 1 \dots N$ og $j = 1 \dots M$ representere (7.26) et sett av ordinære algebraiske likninger for verdien av strømfunksjonen i gitterpunktene. Ved å innføre endelige differanser for de deriverte har vi altså oppnådd å få den partielle differensiallikningen for ψ overført til et sett av vanlige likninger.

Vi skal vise hvordan denne likningen kan benyttes til å finne strømlinjebildet ved uniform strøm gjennom en innsnevring i en rett kanal hvor innsnevringen er symmetrisk om midtlinjen som antydnet på figur 7.14. Veggene og midtlinjen er strømlinjer karakterisert ved faste verdier av strømfunksjoner som vi velger som angitt på figuren. I kanalen legges det inn et rutenett slik at veggene i kanalen tilnærmes med en ujevn rand. På grunn av symmetri egenskapene i feltet er det tilstrekkelig å betrakte et område som angitt på figur 7.14.

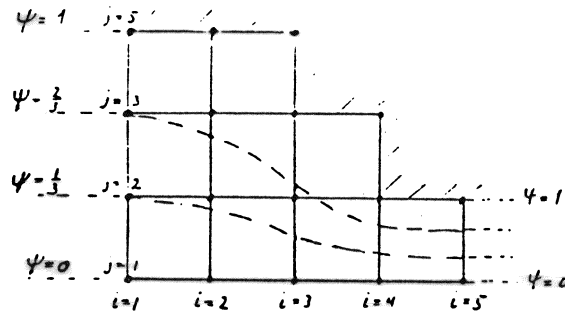
Vi velger rutenettet og nummereringen slik som antydnet i figur 7.15. Verdien av strømfunksjonen må beregnes i 3 punkter, nemlig punktene (2,2), (3,2) og (2,3). I de øvrige punktene er strømfunksjonen kjent. For å fremskaffe tre likninger for de tre ukjente størrelsene $\psi_{2,2}$, $\psi_{3,2}$ og $\psi_{2,3}$ setter vi henholdsvis $i = 2$ og $j = 2$, $i = 3$ og $j = 2$ samt $i = 2$ og $j = 3$ inn i likning (7.26). Etter å ha sett inn verdien for strømfunksjonen i de punktene hvor den er kjent, får vi

$$\begin{aligned} \psi_{3,2} + \psi_{2,3} - 4\psi_{2,2} + \frac{1}{3} &= 0 \\ \psi_{2,2} - 4\psi_{3,2} + 2 &= 0 \\ \psi_{2,2} - 4\psi_{2,3} + \frac{8}{3} &= 0 \end{aligned}$$

Løsningen av disse gir

$$\psi_{2,3} = \frac{65}{84} \simeq 0.77 \quad \psi_{3,2} = \frac{51}{84} \simeq 0.61 \quad \psi_{2,2} = \frac{9}{21} \simeq 0.43$$

På grunnlag av disse verdiene kan strømlinjene skisseres slik antydnet som på figur 7.15.



Figur 7.15: På grunnlag av beregnede verdier kan strømfunksjonen skisseres.

Med et mer finmasket rutenett enn hva vi her har valgt, vil en oppnå større nøyaktighet i løsningen. Dette vil føre til et større likningssett med flere ukjente verdier av strømfunksjonen, og man blir fort avhengig av hurtige regnemaskiner for å løse likningssettet.

Den beregningsteknikken som vi her har skissert for Laplace-likningen er selvsagt ikke begrenset til fenomener som kan beskrives ved denne likningen. Med liknende teknikk er det mulig å lage beregningsskjema for bevegelseslikningen og kontinuitetslikningen og løse det tilhørende settet av endelig differanse-likninger ved hjelp av datamaskiner. Utviklingen av store og hurtige super datamaskiner i løpet av de siste 10–15 år har gjort det mulig å beregne selv komplekse strømningsfenomener ved denne teknikken. Det er for eksempel nå mulig med god nøyaktighet å simulere strømmen av olje og gass i reservoarer og i rørledninger, strømmen om skip og fly i fart og de storstilte strømmene i atmosfæren. Utviklingen av levende grafikk og visualiseringsteknikker i tilknytning til datamaskiner gjør det mulig å fokusere undersøkelsen på interessante detaljer i de simulerte strømningsfeltene. Simuleringsmodeller som baserer seg på endelig differanse representasjon av de differensiallikningen som styrer prosessen er blitt et viktig redskap både innen anvendelser og forskning og numeriske modellene har i mange tilfeller erstattet tradisjonelle simuleringer ved hjelp av laboratoriemodeller.

Superdatamaskiner: Cray X-MP er et eksempel på en slik maskin som ble innkjøpt til Norge i 1987 med midler bevilget av offentlige forskningsråd og privat industri. Maskinen er plassert ved regnearklegget ved NTH i Trondheim og brukere ved universitetene i Oslo, Bergen og Tromsø er knyttet til maskinen via hurtige telekommunikasjonslinjer for dataoverføring. Maskinen er skreddersydd for å løse store likningssett av den typen som fremkommer ved endelig differanse representasjon av differensiallikninger. Den kan utføre 235 milliarder talloperasjoner i sekundet i hver av de to prosessorene og den har en lagringskapasitet i primærminnet på 128 Megabyte. Så rart det enn høres er signalhastigheten for elektriske impulser mellom de forskjellige deler av maskinens hjerne en begrensende faktor for maskinens hurtighet. Denne signalhastigheten er nær lik lysets hastighet. Selv om dette er en kolossal hastighet går signalene så

mange ganger at og fram inne i maskinen at den totale gangtiden for signalet blir forholdsvis lang. For å redusere gangtiden mest mulig er de forskjellige enhetene i maskinen pakket så nært sammen som overhode mulig. Sentralenheten i en slik supermaskin er derfor forbausende liten og den må kjøles med flytende edelgasser for å hindre overopphetning på grunn av varmeutviklingen i de elektriske kablene. Selv om Cray X-MP er en kraftig maskin finnes det i dag enda mere avanserte maskiner i bruk og nye generasjoner av superdatamaskiner er under konstruksjon

7.8 Trykklikningen for virvelfri bevegelse

La oss for enkelhets skyld anta at tettheten ρ er uniform, og at væsken er påvirket av ytre krefter som kan avledes av et potensiale Φ . Siden virvlingen er null, kan bevegelseslikningen skrives

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) - \nabla \Phi$$

Innfører vi hastighetspotensialet og setter $\mathbf{v} = \nabla \phi$ kan bevegelseslikningen omformes slik at

$$\nabla \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{p}{\rho} + \Phi \right] = 0$$

Ved integrasjon følger det fra denne likningen at

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{p}{\rho} + \Phi = f(t)$$

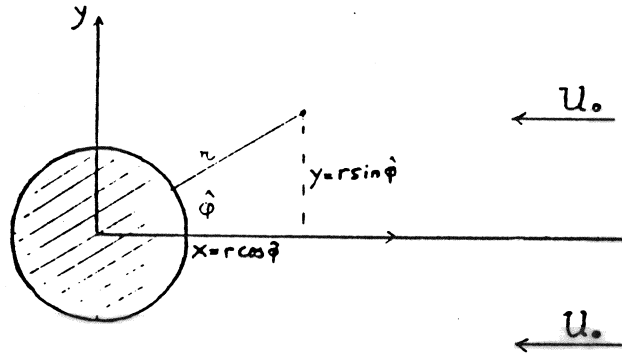
hvor $f(t)$ er funksjon av tiden (eventuelt en konstant). Funksjonen $f(t)$ er bestemt ved størrelsen

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{p}{\rho} + \Phi$$

i et punkt i feltet. Er $f(t)$ kjent, kan trykket beregnes etter formelen

$$\frac{p}{\rho} = - \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \Phi \right] + f(t) \quad (7.27)$$

Dette er *Eulers trykklikning* for trykket i en homogen, inkompressibel væske hvor bevegelsen er virvelfri. I litteraturen blir også likningen (7.27) ofte betegnet som Bernoullis likning. For å understreke at de to trykklikningene gjelder under forskjellige forhold vil vi gi likningene (4.3) og (7.27) hvert sitt navn. Det må nevnes at det ikke er nødvendig å forutsette at tettheten er uniform for å utlede en trykklikning for virvelfri bevegelse. Dersom tettheten ikke er uniform, går en frem på liknende måte som i avsnitt 4.2.

Figur 7.16: *Sylinder i uniform strøm.*

7.9 Strømning omkring sylinder

Ved å addere potensialene for rettlinjet strøm og dipolfeltet kan man finne potensialet for strøm omkring en sirkulær sylinder. Fra resultatene i de foregående avsnitt følger det umiddelbart at hastighetspotensialet

$$\phi = Ax + B \frac{x}{r^2} \quad (7.28)$$

hvor A og B er konstanter, og $r^2 = x^2 + y^2$ er løsningen av den to-dimensjonale Laplace-likningen. Strømfunksjonen som tilsvarer potensialet (7.28) er

$$\psi = -Ay + B \frac{y}{r^2} \quad (7.29)$$

Dette innser vi ved å benytte Cauchy-Riemann relasjonene (7.10). Ved et passende valg av konstantene A og B vil (7.27) og (7.28) representere feltet omkring en sirkulær sylinder som står rolig i en uniform strøm U_o . Vi velger strømretningen motsatt av x -retningen, og sentrum av sylindren legges i origo som angitt på figur 4.7. Radius av sylindren betegner vi med a .

Langt borte fra origo ($r \rightarrow \infty$) har potensialet (7.27) formen

$$\phi = Ax$$

Vi må altså velge konstanten

$$A = -U_o$$

Vi innfører nå polarkoordinater (r, φ) definert ved transformasjonsrelasjonene

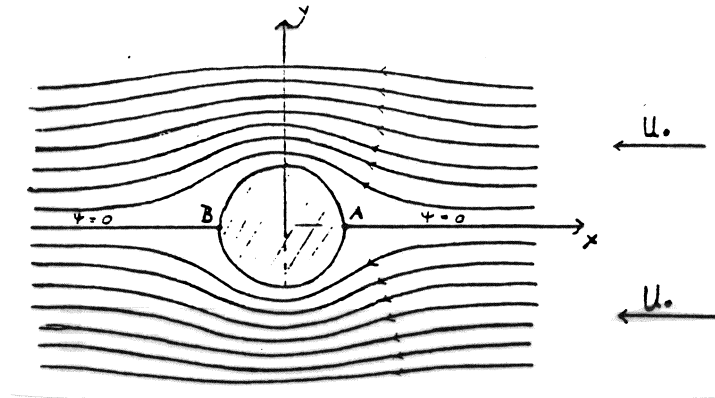
$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (7.30)$$

og får at de tilhørende hastighetskomponentene kan skrives

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\left(U_o + \frac{B}{r^2}\right) \cos \varphi$$

og

$$v_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = \left(U_o - \frac{B}{r^2}\right) \sin \varphi$$



Figur 7.17: Strømlinjer rundt en sylinder i uniform strøm.

I følge grenseflatebetingelsen for friksjonsfri strøm ved en ugjennomtrengelig sylinder må vi ha at

$$v_r = 0 \quad \text{for} \quad r = a$$

Dette gir

$$B = -U_0 a^2$$

Med disse verdier for A og B er (7.28) og (7.29) henholdsvis hastighetspotensialet og strømfunksjonen for en sirkulær sylinder som står stille i en uniform strøm.

Likningen for strømlinjene kan nå skrives

$$\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)y = \frac{\psi_0}{U_0} \quad (7.31)$$

Strømlinjen $\psi_0 = 0$ består av x -aksen ($|x| \geq a$) og sylinderflaten. Ved å velge positive og negative verdier av ψ_0 med samme tallverdi, ser vi at strømlinjebildet er symmetrisk om x -aksen. Likningen (7.31) viser også at feltet er symmetrisk om y -akse og at strømlinjebildet er likt på opp- og ned-strømsiden av sylinderen. Strømlinjebildet er skissert i figur 7.17.

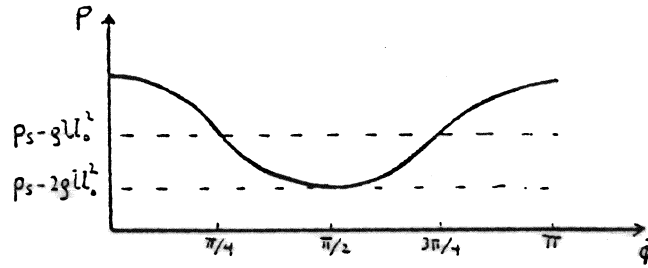
Setter man inn for konstanten B i uttrykket for hastighetskomponentene får man at strømhastigheten langs sylinderflaten er gitt ved

$$v_r = 0, \quad v_\varphi = 2U_0 \sin \varphi \quad (7.32)$$

Dette viser at hastigheten er null i punktene A og B hvor φ henholdsvis har verdien 0 og π . Fordi hastigheten er null, betegnes disse punktene som *stagnasjonspunkter* i hastighetsfeltet. I punktene C på sylinderflaten hvor $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ er $v_\varphi = 2U_0$. Hastigheten i C er altså dobbelt så stor som i den innkommende strømmen langt borte fra sylinderen.

Lar vi p_s betegne trykket i stagnasjonspunktene, så følger det fra Eulers trykklikning at trykket i feltet er gitt ved

$$p = p_s - \frac{\rho}{2} v^2$$



Figur 7.18: Trykkfordelingen langs sylinderflaten.

hvor tettheten ρ i væsken forutsettes å være uniform. Setter man inn for hastigheten finner man at trykket langs sylinderflaten er

$$p = p_s - 2\rho U_o^2 \sin^2 \varphi$$

Trykket er altså størst i stagnasjonspunktene, og trykket har minimumsverdi $p_s - 2\rho U_o^2$ for $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ dvs. i punktene merket C på figur 7.17. Som referanseverdi for trykket kan man også innføre trykket p_o i den uforstyrrede strømmen og

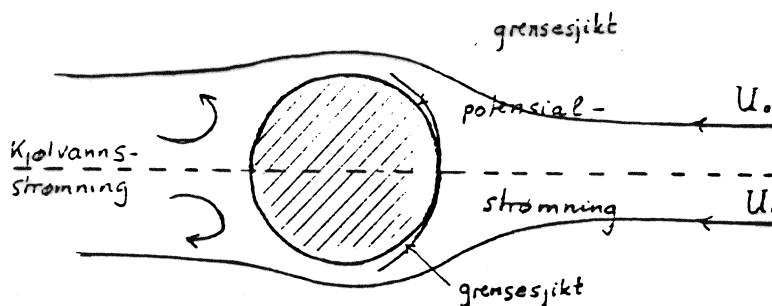
$$p_o = p_s - \frac{\rho}{2} U_o^2$$

Trykket langs sylinderflaten er derved gitt ved

$$\frac{p - p_o}{\frac{\rho}{2} U_o^2} = 1 - 4 \sin^2 \varphi$$

Trykkfordelingen langs sylinderflaten er skissert i figur 7.18. Man har altså samme trykkfordeling på le- og lo-siden av sylindere. En viktig konsekvens av dette er at det virker ingen netto trykk-kraft på sylindere.

Ved uniform potensialstrømning virker det med andre ord ingen motstand på sylindere. Dette resultatet er i åpenbar motstrid til de mest dagligdagse erfaringer. At potensialstrøm ikke kunne forklare hvordan strømningsmotstand oppstår var lenge et uforklart paradoks (d'Alambertske paradoks) i fluidmekanikk. Forklaringen kom først når man også tok hensyn til friksjonen. På grunn av friksjonsvirkningen vil det i alle virkelige væsker eller gasser oppstå kjølvannsstrømning bak en sylindere (se figur 7.19). Dersom strømhastigheten er stor vil friksjonsvirkningen på lo-siden av sylindere være begrenset til et tynt grensesjikt. Kjølvannstrømning vil føre til trykkforskjeller mellom lo- og le-siden som igjen vil lede til at det virker en motstandskraft på sylindere i strømmens retning. Likevel vil potensialfeltet gi en god beskrivelse av strømforholdene utenfor grensesjiktet på lo-siden av sylindere. I et senere kapittel skal vi komme nærmere tilbake til motstandskraftens størrelse og hvordan den er bestemt av strømforholdene etc.



Figur 7.19: Grensesjikt og kjølvannsstrømning.

Til nå har vi bare funnet hastighetspotensialet og strømfunksjonen for feltet om en sylinder som er holdt fast i en uniform strøm. Ved en enkel transformasjon kan vi også bestemme hastighetspotensialet for en sylinder som beveger seg rettlinjet med fart U_0 i x -retning i en væske som forøvrig er i ro. Strømhastigheten i dette feltet fremkommer om man adderer hastigheten U_0 (i x -retning) til feltet for en fastholdt sylinder i uniform strøm. Hastighetspotensialet for feltet frembrakt av en sylinder som beveger seg rettlinjet blir følgende

$$\phi = -U_0 \frac{a^2}{r^2} x \quad (7.33)$$

Det vil selvfølgelig heller ikke i dette tilfellet virke noen motstandskraft på sylindren.

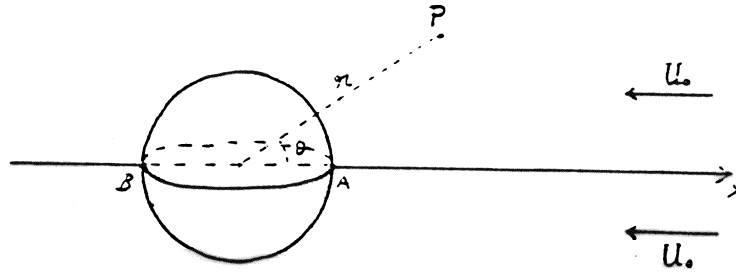
Ved tidsavhengig strøm eller akselerert bevegelse av sylindren vil forholdene bli anderledes. Potensialene vil selvfølgelig bli av tilsvarende form som i de foregående tilfellene, men med den forskjell at U_0 nå er en funksjon av t . Beregner man trykk-kraften på sylinderflaten vil man finne at det nå virker en motstandskraft rettet mot akselerasjonsretningen. Vi skal komme nærmere tilbake til dette i det avsnittet hvor vi behandler motstand på legemer i strøm mer inngående. Det overlates til leseren som øvelse å finne kraften på sylindren når U_0 er en funksjon av tiden.

7.10 Kule i strøm

Vi betrakter først en kule med radius a som er holdt fast i en uniform strøm U_0 . Vi velger strømretningen motsatt av x -retningen og sentrum av kulen legges i origo som angitt på figur 7.20. Vinkelen mellom x -aksen og radius vektor til et vilkårlig punkt P i feltet betegnes med θ . På grunn av aksesymmetrien venter vi at feltet bare avhenger av koordinatene r og θ . Hastighetspotensialet

$$\phi = -U_0 \left(r + \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^2} \right) \cos \theta \quad (7.34)$$

som er sammensatt av det translatoriske feltet og feltet (7.25) er en løsning av Laplace-likningen. Den radielle hastighetskomponenten som tilsvarer poten-



Figur 7.20: Kule i ro i uniform strøm.

sialet (7.34) er

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -U_o \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \cos \theta$$

som viser at strømmen tilfredstiller den kinematiske grenseflatebetingelsen

$$v_r = 0$$

på kuleflaten $r = a$. Tangensialhastigheten ved kuleflaten er

$$v_\theta(r = a) = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{3}{2} U_o \sin \theta$$

Det er altså stagnasjonspunkter for $\theta = 0$ og $\theta = \pi$ (A og B på figur 7.20). Der-
som p_s betegner trykket i stagnasjonspunktene, så får vi fra Eulers trykklikning
at trykket på kuleflaten er

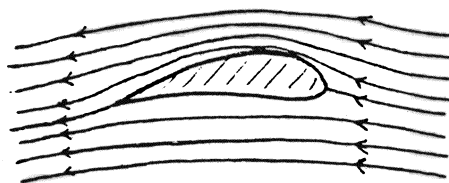
$$p = p_s - \frac{9}{8} \rho U_o^2 \sin^2 \theta$$

hvor ρ er tettheten i væsken. Dette viser at trykkforholdene er like på le- og
lo-siden og det er derfor ingen motstandskraft som virker på kule. På samme
måte som for sylinder i strøm vil friksjonsvirkningen føre til at det oppstår
kjølevannstrømning bak kule. På lo-siden av kule vil friksjonsvirkningen ho-
vedsaklig være begrenset til et tynt grensesjikt langs kuleflaten og feltet (7.34)
vil gi en god beskrivelse av strømforholdene utenfor dette grensesjiktet.

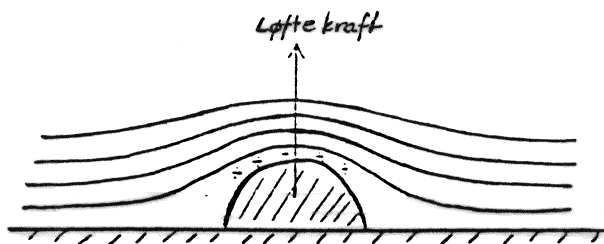
Ved å addere et translatorisk felt $U_o r \cos \theta$ til potensialet (7.34) får vi hast-
ighetspotensialet for bevegelsen frembrakt av en kule som beveger seg med
hastighet U_o gjennom en væske som forøvrig er i ro.

$$\phi = -\frac{U_o a^3}{2 r^2} \cos \theta \quad (7.35)$$

Både potensialet (7.34) og (7.35) vil oppfylle Laplace-likningen og grenseflate-
betingelsene på kuleflaten selv om U_o er en funksjon av t . Disse potensialene
kan derfor også brukes henholdsvis for fastholdt kule i tidsavhengig strøm og
for kule i akselerert bevegelse.



Figur 7.21: Strøm rundt et vingeprofil.



Figur 7.22: Løftekraft på en halvsylinder

7.11 Strømning om flyving

Både for sylinder og kule i strøm vil potensialstrømningen bare gi en god beskrivelse av strømforholdene på lo-siden. For strømlinjeformede legemer kan potensialstrømningen imidlertid gi en god beskrivelse av strømforholdene rundt hele legemet, selv sagt da bortsett fra et tynt grensesjikt nær legemet. Strøm omkring en vingeprofil er et eksempel på en slik strømning og strømlinjene er skissert på figur 7.21. Vi skal ikke gå nærmere inn på hvordan man bestemmer hastighetspotensialet for en slik bevegelse.

På grunn av formen på profilet vil strømhastigheten bli større og derved trykket mindre på oversiden enn på undersiden av vingen. Resultatet blir en netto trykk-kraft som løfter vingen (og flyet). Tilsvarende løftekraft virker på en halvsylinder som ligger på et plant underlag mens væsken strømmer forbi. Vi innser dette ved å betrakte den øvre delen av strømningsbilde i figur 7.17 med den tilhørende trykkfordelingen langs sylinderflaten. Løftekraften medfører at reaksjonskraften mot underlaget avtar. For enkelte biler kan denne effekten ha betydning for veigrepet, særlig når farten blir stor.

7.12 Øvingsoppgaver

1. Gitt hastighetsfeltet

$$\mathbf{v} = A[2xy \mathbf{i} + (a^2 + x^2 - y^2)\mathbf{j}]$$

hvor A og a er konstanter.

- a) Begrunn hvorfor det eksisterer en strømfunksjon og et hastighetspotensiale for dette feltet

b) Finn strømfunksjonen og skisser strømlinjene

2. Et hastighetsfeltet er gitt ved

$$\mathbf{v} = a[x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}]$$

hvor $a = a(t)$ er funksjon av tiden.

- Hvorfor eksisterer det et hastighetspotensiale for dette feltet? Finn potensialet.
- Hvorfor eksisterer det ikke en strømfunksjon?
- Vis hvordan en allikevel kan finne strømlinjene og skisser strømlinjebildet.

3. En vanlig benyttet måte for å finne løsninger av Laplace-likningen er ved separasjon av variable. Anta at hastighetspotensialet i to dimensjoner $\phi = \phi(x, y)$ kan skrives $\phi = F(x) \cdot G(y)$ hvor F og G er funksjoner henholdsvis av x og y .

- Bestem F og G slik at $\nabla^2\phi = 0$
- Gjør det samme for polarkoordinater i to dimensjoner hvor $\phi = \phi(r, \varphi)$.

4. I en rettlinjet uniform strøm plasseres en to-dimensjonal kilde. Strømhastigheten er U og volumstrømmen for kilden er Q .

- Sett opp hastighetspotensialet.
- Finn strømfunksjonen og skisser strømlinjebilde.

5. En friksjonsfri, homogen, inkompressibel væske strømmer stasjonært rundt en sirkulær sylinder med radius a . Bevegelsen er hvirvelfri. Langt fra sylindere er trykket p_0 og hastigheten lik U . Sirkulasjonen av hastigheten langs en vilkårlig lukket kurve som omslutter sylindere er lik C . Vi innfører polar-koordinater (r, φ) med origo i sylindere sentrum. Det er ingen volumkrefter som virker på væsken. Væskens tetthet er ρ .

- Sett opp randbetingelsene for hastighetspotensialet ϕ .
- Søk løsning på formen

$$\phi(r, \varphi) = F(r) \cos \varphi + A\varphi$$

og bestem $F(r)$ og A .

- Finn stagnasjonspunktene.
- Vis at kraften på sylindere er har verdi ρUC og retning normalt på grunnstrømmens retning.

6. En (uendelig lang) sylinder med radius a beveger seg i en rettlinjert bane med hastigheten $U(t)$ i et inkompressibelt fluid. Uendelig langt fra sylindren er fluidet i ro. Bevegelsen er to-dimensjonal og ble startet fra ro, og det er ingen volumkrefter. Vi innfører et fast aksekors xy med enhetsvektorer \mathbf{i} og \mathbf{j} . Sylindrens sentrum beveger seg langs x -aksen i positiv retning og koordinaten for sentrum av sylindren er $x_0(t)$ slik at $\frac{dx_0}{dt} = U$.

- a) Fluidet antas friksjonsfritt. Begrunn at bevegelsen da er virvelfri.
 b) Vi innfører polarkoordinater $\bar{r}, \bar{\varphi}$ m.h.p. sylindrens sentrum og betegner hastighetskomponentene i væsken med v_r og v_φ . Vis at grenseflatebetingelsen ved sylinderflaten $\bar{r} = a$ kan skrives

$$v_r = U \cos \bar{\varphi}$$

$$\text{og at } \bar{r} = [(x - x_0)^2 + y^2]^{1/2}.$$

- c) Vis at hastighetspotensialet som oppfyller grenseflatebetingelsen er

$$\phi = -\frac{Ua^2 \cos \bar{\varphi}}{\bar{r}}$$

- d) Vis at ϕ også kan skrives

$$\phi = -\frac{Ua^2 \bar{x}}{r^2}$$

$$\text{hvor } \bar{x} = x - x_0.$$

- e) Vis at trykket på sylinderflaten $\bar{r} = a$ er gitt ved

$$p = f(t) + \frac{1}{2}\rho U^2 + \rho \dot{U} a \cos \bar{\varphi} + \rho U^2 \cos^2 \bar{\varphi}.$$

- f) Vis at kraften pr. lengdeenhet på sylindren er $-\pi a^2 \rho \dot{U} \mathbf{i}$.
 g) Sylindrens masse pr. lengdeenhet er M . Vis at kraften pr. lengdeenhet som skal til for å holde bevegelsen i gang er lik

$$(M + M') \dot{U} \mathbf{i}$$

$$\text{der } M' = \pi a^2 \rho. M' \text{ kalles addert masse.}$$

7. En halvkule med radius a ligger på et plant underlag i en stasjonær strøm av en homogen inkompressibel væske. Strømmen langt bort fra kula er uniform og rettet parallelt med planet og strømhastigheten er U . Vi antar friksjonsfri strømming i hele feltet.

- a) Begrunn hvorfor vi kan regne at strømmingen er virvelfri og finn hastighetspotensialet.
 b) Beregn trykkraften på kula.
 c) Bruk resultatene til å anslå hvor fort en kan kjøre med en VW boble før løftkraften overskrider 25 % av bilens vekt. Bilens masse settes lik 1000 kg og $a = 2 \text{ m}$.

8. Finn strømfunksjonen og tegn strømlinjene for følgende hastighetspotensial

a) $\varphi = x^2 - y^2$

b) $\varphi = \theta$

9. Vis generelt at dersom φ' er potensialet i et aksekors (X, Y) med hastighet $U\mathbf{i}$ (U konstant) så er potensialet φ i et aksekors (x, y) som står stille gitt ved

$$\varphi = \varphi' + Ux$$

(Hint: Vis at hastighetsfeltene i de to systemene oppfyller $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + U\mathbf{i}$ ut fra at posisjonvektorene oppfyller $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + Ut\mathbf{i}$.)

Utfør så matematisk transformasjonen fra potensialet for en fast sylinder i strøm til potensialet for i sylinder som beveger seg med konstant hastighet $U\mathbf{i}$.

Kapittel 8

Impuls- og energilikningen

8.1 Transportteoremet

Vi skal først utlede noen regler for derivasjon av integraler hvor både integrand og integrasjonsgrenser avhenger av den variable som vi skal derivere med hensyn på. La oss anta at en skalar størrelse $\beta = \beta(x, y, z, t)$ skal integres over et volum τ med begrensingsflate σ hvor disse størrelsene er funksjoner av t . Integralet kan skrives

$$I = \int_{\tau} \beta d\tau \quad (8.1)$$

Når man skal derivere dette uttrykket med hensyn på t kan man tenke seg først å holde τ fast og derivere integranden, dertil kommer bidraget ved at β er fast mens randen endrer seg

Dette uttrykkes ved Leibnitz derivasjonsregel

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\tau} \beta d\tau \right) = \int_{\tau} \frac{\partial \beta}{\partial t} d\tau + \int_{\sigma} \beta \mathbf{v}_{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (8.2)$$

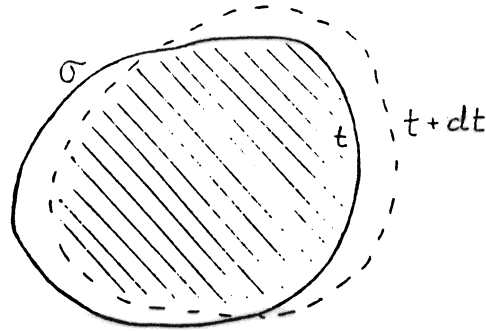
hvor \mathbf{v}_{σ} er hastigheten av flaten σ . Det første leddet på høyre side i (8.2) forstår en intuitivt, det andre leddet er imidlertid vanskeligere å forstå. Vi skal derfor begrunne denne derivasjonsregelen nærmere.

Ved tiden t er volumet $\tau(t)$ og ved et senere tidspunkt $t+dt$ er dette volumet $\tau(t+dt)$. Endringen av integralet I i tiden dt er

$$dI = \int_{\tau(t+dt)} \beta d\tau - \int_{\tau(t)} \beta d\tau$$

Denne differansen består av to deler dI_1 og dI_2 . Den første delen, dI_1 skyldes at bidraget innenfor den delen av området som er felles (skravert område i figur 8.1) kan ha endret seg ved at β har endret seg i tiden. Den andre delen, dI_2 skyldes at $\tau(t+dt)$ og $\tau(t)$ dekker forskjellige områder fordi begrensingskurven har flyttet seg. Det første bidraget er

$$dI_1 = \left(\int_{\tau_f} \beta d\tau \right)_{t+dt} - \left(\int_{\tau_f} \beta d\tau \right)_t$$



Figur 8.1: Volumendringen bestemt av flatens hastighet.

hvor τ_f er volumet av det området som er felles. I grensen $dt \rightarrow 0$ går er $\tau_f \rightarrow \tau$ og

$$dI_1 = \int_{\tau} \frac{\partial \beta}{\partial t} d\tau dt$$

Volumet av det området som ikke er felles er bestemt ved bevegelsen av flaten σ i tidsromet dt . Det fremgår av figur 8.2 at et volumelement innenfor dette volumet er

$$d\tau = (\mathbf{v}_{\sigma} dt) \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

Bidraget dI_2 til endringen av integralet blir derfor den samlede endring innenfor det området som ikke er felles, slik at

$$dI_2 = \int_{\sigma} \beta(\mathbf{v}_{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\sigma}) dt$$

Derved får vi at

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\tau} \frac{\partial \beta}{\partial t} d\tau + \int_{\sigma} \beta \mathbf{v}_{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

som beviser riktigheten av (8.2).

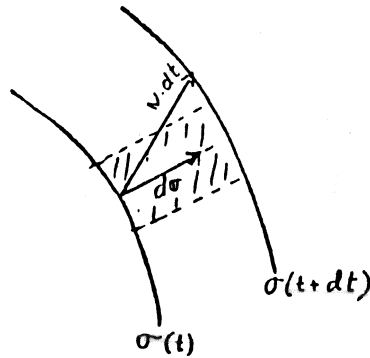
En liknende regel gjelder også for integraler av vektorer og en innser dette ved å bruke (8.2) for hver komponent. For derivasjon av integralet av en vektor \mathbf{A} kan vi altså skrive:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\tau} \mathbf{A} d\tau \right) = \int_{\tau} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} d\tau + \int_{\sigma} \mathbf{A} \mathbf{v}_{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (8.3)$$

For et materielt volum $\tau = \tau_m$ som består av de samme fluidpartiklene og som flyter med feltet er $\mathbf{v}_{\sigma} = \mathbf{v}$ hvor \mathbf{v} er felthastigheten.

Bruker man Leibnitz regel for å finne den tidsderiverte av et integral over et materielt volum får regelen en spesiell form og det er vanlig å referere til dette uttrykket som *transportteoremet*. Med $\mathbf{A} = \rho \mathbf{v}$ får vi for eksempel transportteoremet for bevegelsesmengde

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\tau_m} \rho \mathbf{v} d\tau \right) = \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) d\tau + \int_{\sigma} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (8.4)$$



Figur 8.2: Volumets endring i et lite tidsintervall.

I første integral på høyre side er τ holdt fast og τ betegner derfor et geometrisk fast volum som faller sammen med τ_m ved det tidspunktet som betraktes. Vi kan derfor flytte tidsderivasjonen utenfor integraltegnet

$$\int_{\tau} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) d\tau = \frac{d}{dt} \left(\int_{\tau} \rho \mathbf{v} d\tau \right) \quad (8.5)$$

Følgelig kan transportteoremet (8.4) også skrives

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\tau_m} \rho \mathbf{v} d\tau \right) = \frac{d}{dt} \left(\int_{\tau} \rho \mathbf{v} d\tau \right) + \int_{\sigma} \rho \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (8.6)$$

hvor det er underforstått at τ betegner et fast geometrisk volum.

På tilsvarende måte kan en formulere transportteoremet for en skalar. Transportteoremet kan brukes til å formulere alle de grunnleggende likninger for fluiddynamikk på integralform. Vi skal her benytte teoremet til å utlede impulslikningen.

8.2 Impulslikningen

Setter man opp bevegelseslikningen for den samlede væske- eller gass-mengde innenfor et visst volum fremkommer det en likning som kalles impulslikningen. Impulslikningen er altså en integrert form av bevegelseslikningen og den kommer som vi skal se til nytte i mange anvendelser. Impulslikningen kan utledes direkte fra bevegelseslikningen på formen (2.13) eller fra Newtons lov for et system av partikler. Den siste måten gir en bedre forståelse for det fysikalske innholdet i likningen, men krever at vi er fortrolig med bruken av transportteoremet. Vi skal innledningsvis bruke denne måten til å utlede likningen på, men vi skal også i avsnitt 1.4 gi en mere direkte utledning som ikke krever kjenskap til transportteoremet.

Vi betrakter den samling av fluidpartikler med volum τ_m som ved et gitt tidspunkt t fyller et geometrisk avgrenset volum τ med begrensingsflate σ . Bevegelsesmengden for dette systemet av partikler er

$$\mathbf{I} = \int_{\tau_m} \rho \mathbf{v} d\tau$$

I følge Newtons lov så er endringen i bevegelsesmengde for systemet lik summen av de ytre kreftene som virker på systemet. Ser vi bort fra friksjonskrefter, vil de ytre kreftene som virker på fluidet innenfor σ bestå av trykk-krefter langs begrensingsflaten

$$\mathbf{P} = - \int_{\sigma} p d\boldsymbol{\sigma}$$

og volumkrefter

$$\mathbf{F} = - \int_{\tau} \rho \nabla \Phi d\tau$$

Vi har da forutsatt at volumkreftene kan avledes av et potensial Φ . Newtons lov sier altså at

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\tau_m} \rho \mathbf{v} d\tau \right) = \mathbf{P} + \mathbf{F} \quad (8.7)$$

Når vi skal utføre denne tidsderivasjonen må vi huske på at både integranden og volumet som vi integrer over avhenger av tiden. Siden vi følger et materielt volum kan transportteoremet (8.6) brukes og volumintegralet over det materielle volumet kan derved erstattes med et volumintegral over et geometrisk fast volum og et flateintegral over volumets begrensingsflate.

$$\int_{\tau} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) d\tau + \int_{\sigma} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P} + \mathbf{F} \quad (8.8)$$

Dette er impulslikningen som sier:

Endringen av bevegelsesmengde innenfor et geometrisk fast volum plus netto strøm av bevegelsesmengde ut gjennom volumets begrensingsflate er lik resultanten av flate- og volumkrefter som virker på fluidet innenfor volumet

Ved anvendelse av impulslikningen på denne formen betegnes ofte volum og begrensingsflate henholdsvis *kontrollvolum* og *kontrollflate*. For stasjonær strøm er

$$\int_{\tau} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) d\tau = 0 \quad (8.9)$$

og impulslikningen kan skrives

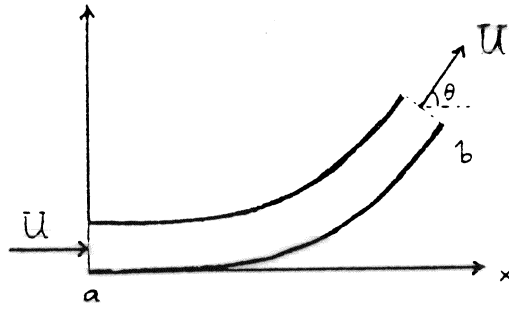
$$\mathbf{I} = \mathbf{P} + \mathbf{F} \quad (8.10)$$

hvor

$$\mathbf{I} = \int_{\sigma} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

er strømmen av bevegelsesmengde gjennom kontrollflaten.

For å oppnå stasjonære forhold kan det noen ganger være hensiktsmessig å velge et kontrollvolum som beveger seg med konstant hastighet \mathbf{v}_o . Det vil



Figur 8.3: Stasjonær strøm gjennom rørbend.

da lønne seg å beskrive bevegelsen i et aksekors som følger kontrollvolumet. I forhold til dette aksekors vil felthastigheten være

$$\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_o$$

og strømmen av bevegelsesmengde gjennom kontrollflaten blir

$$\mathbf{I} = \int_{\sigma} \rho \mathbf{v}_{rel} \mathbf{v}_{rel} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (8.11)$$

Med dette uttrykket for \mathbf{I} kan en så benytte impulslikningen (8.10) som gjelder for stasjonære forhold.

8.3 Eksempler på bruk av impulslikningen

8.3.1 Stasjonær strøm gjennom rørbend

Røret har tverrsnitt A og strømhastigheten U er konstant gjennom røret. Ved innløpet av bendet (a) er strømmen rettet i x -retningen og ved utløpet (b) danner strømretningen vinkelen θ med x -aksen. Vi legger et kontrollvolum begrenset av rørveggen og snittflatene ved a og b. Strømmen av bevegelsesmengde gjennom kontrollflaten utgjøres da av strømmen gjennom snittflatene (det er ingen strøm gjennom rørveggen). Følgelig er

$$\mathbf{I} = -\rho AU^2 \mathbf{i} + \rho AU^2 (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j})$$

Dette kan skrives

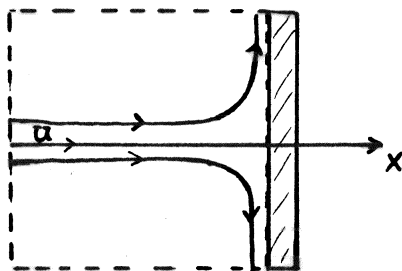
$$\mathbf{I} = \dot{M} \Delta \mathbf{v}$$

hvor $\dot{M} = \rho UA$ er massestrømmen pr. tidsenheten gjennom røret og $\Delta \mathbf{v} = U[(\cos \theta - 1)\mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}]$ er differansen mellom hastighetsvektoren ved utløpet og ved innløpet.

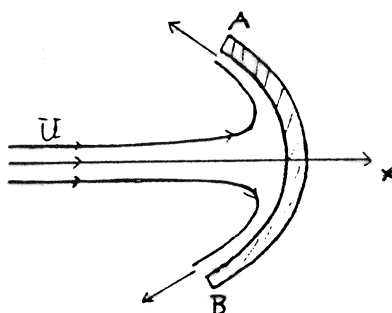
Ser vi bort fra eventuelle volumkrefter (f.eks. tyngdekraften) får vi fra impulslikningen (8.10) at resultanten av trykk-kreftene som virker på fluidet er

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} = \dot{M} \Delta \mathbf{v}$$

For å beregne reaksjonskraften på rørveggen må vi kjenne trykket i fluidet ved a og b. Ofte vil dette bidra lite, og reaksjonskraften på rørveggen vil være tilnærmet gitt ved $-\dot{M} \Delta \mathbf{v}$.



Figur 8.4: Strøm mot faste plater og skovler.



Figur 8.5: Strøm mot en skovle.

8.3.2 Strøm mot faste plater og skovler

En stråle med tverrsnitt A hvor hastigheten i fluidet er U kommer vinkelrett mot en plan plate og avbøyes langs flaten som antydnet på figuren. Vi lar kontrollvolumet være begrenset av den stiplede kurven og deler av platen. Strålen er rettet langs x -aksen. Vi har da at strømmen av bevegelsesmengde i x -retning gjennom kontrollflaten er

$$\mathbf{I} = -\dot{M}U\mathbf{i}$$

hvor

$$\dot{M} = \rho UA$$

er massestrømmen pr. tidsenhet i strålen. Ser vi bort fra eventuelle volumkrefter, får vi fra impulslikningen (8.10) at resultatanten av trykk-kreftene som virker på fluidet er

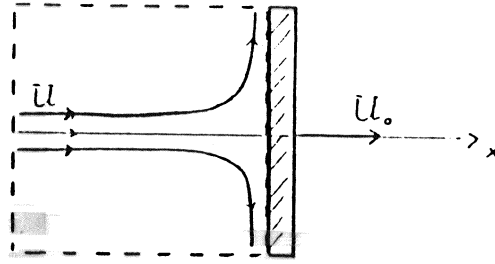
$$\mathbf{P} = -\dot{M}U\mathbf{i}$$

Reaksjonskraften \mathbf{R} på platen er

$$\mathbf{R} = -\mathbf{P} = \dot{M}U\mathbf{i}$$

Dersom platen er krummet som en skovle, slik at strålen bøyes tilbake, vil det bety at en får en strøm av bevegelsesmengde i negativ x -retning. Størrelsen vil avhenge av strømrretningen ved endene av skovelen. Dersom skovelen er utformet slik at strømmen avbøyes 180° , vil endringen i bevegelsesmengde være

$$\mathbf{I} = -2\dot{M}U\mathbf{i}$$



Figur 8.6: Strøm mot bevegelig plate.

og kraften på skovelen er i dette tilfellet

$$\mathbf{R} = 2\dot{M}U\mathbf{i}$$

Dobbelt så stor som kraften på en plan plate.

8.3.3 Strøm mot bevegelig plate. Effektoverføring

Dersom strålen kommer inn mot en flate som beveger seg, vil kraften på platen bli avhengig både av strømhastigheten U og platens hastighet U_0 . Det vil i dette tilfellet være hensiktsmessig å beskrive bevegelsen ut fra et aksekors som er fast i forhold til platen slik at man fortsatt kan bruke impulslikningen på formen (8.10). Vi legger kontrollvolumet som antydnet ved den stiplede linjen på figuren, og lar kontrollvolumet bevege seg med samme hastighet som platen. Ved å benytte likning (8.11) får vi at strømmen av bevegelsesmengde i x -retning er

$$\mathbf{I} = -\rho A(U - U_0)^2\mathbf{i}$$

hvor A er tverrsnittsarealet av strålen. Kraften på platen i x -retning blir derfor

$$\mathbf{R} = -\mathbf{I} = \rho A(U - U_0)^2\mathbf{i}$$

Arbeidet pr. tidsenhet (effekten) som utføres av denne kraften er

$$\dot{W} = \mathbf{R} \cdot U_0\mathbf{i} = \rho AU_0(U - U_0)^2$$

Effektoverføringen er størst når $U_0 = \frac{1}{3}U$ og

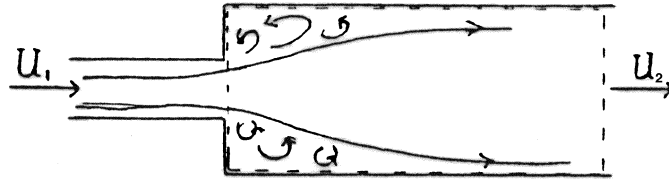
$$\dot{W}_{\max} = \frac{4}{27}\dot{M}U^2$$

hvor \dot{M} som før betegner massestrømmen i strålen. Siden energistrømmen pr. tidsenhet gjennom strålen er

$$\frac{1}{2}\dot{M}U^2$$

betyr det at selv med den størst mulig effektoverføring blir bare 30% av energien i strålen utnyttet.

Ved å gjøre platen skålformet slik som antydnet på figuren, vil en større del av energien i strålen overføres. Formen på skovlene i strømningsmaskiner har derfor stor betydning for energioverføringen.



Figur 8.7: Strøm i rørutvidelse.

8.3.4 Strøm gjennom rørutvidelse. Trykktap

Når en væske strømmer gjennom et rør med en brå utvidelse av tverrsnittet vil det oppstå virvler i en sone nedstrøms fra utvidelsen. Langt nedstrøms vil det imidlertid innstille seg en strømprofil hvor hastigheten er tilnærmet uniform over rørets tverrsnitt. Vi lar A_1 og A_2 betegne tverrsnittet henholdsvis i den trange og vide delen av røret. Strømhastigheten er U_1 før utvidelsen og U_2 langt nedenfor rørutvidelsen. Trykket i væsken på de samme stedene betegnes henholdsvis med p_1 og p_2 . Vi legger et kontrollvolum som antydnet ved den stiplede linjen på figuren og bruker impulslikningen i rørets lengderetning. Vi forutsetter at vi kan se bort fra friksjonskrefter langs rørveggen og at strømmen er stasjonær. Vi finner

$$\mathbf{I} = (-\rho U_1^2 A_1 + \rho U_2^2 A_2) \mathbf{i}$$

hvor \mathbf{I} er enhetsvektoren i strømretningen. Trykket på kontrollflaten som ligger ved rørutvidelsen viser seg å være tilnærmet lik trykket i den trange delen av røret. Derfor er

$$\mathbf{P} = (p_1 A_2 - p_2 A_2) \mathbf{i}$$

Fra impulslikningen er $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ og vi finner

$$p_2 - p_1 = \rho U_2 (U_1 - U_2)$$

Det er altså en trykkøkning fra den trange til den vide delen av røret. Trykkøkningen er imidlertid mindre enn hva en ville få om man anvendte Bernoullis likning til å beregne trykkforskjellen. Impulslikningen gir altså et trykktap ved overgangen fra den trange til den vide delen av røret. Dette henger sammen med at energi går tapt på grunn av virveldannelse ved rørutvidelsen. For å kunne anvende Bernoullis likning, kan det ikke være energitap i væsken på grunn av friksjon. Impulslikningen gir imidlertid en bedre beskrivelse av forholdene selv i dette tilfellet fordi energitapet skyldes indre friksjonskrefter som ikke gir bidrag i impulslikningen.

8.4 Alternativ måte for å utlede impulslikningen

For et friksjonsfritt fluid som er påvirket av krefter avledet av et potensial Φ kan bevegelseslikningen skrives

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p - \rho \nabla \Phi \quad (8.12)$$

Første leddet på venstre side av likningen kan vi omskrive slik at

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{dt} = \frac{D}{dt}(\rho\mathbf{v}) - \frac{D\rho}{dt}\mathbf{v}$$

Benytter vi kontinuitetslikningen og regneregler for ∇ -operatoren får vi

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{v}) + \mathbf{R} \quad (8.13)$$

hvor

$$\mathbf{R} = \nabla \cdot (\rho u\mathbf{v})\mathbf{i} + \nabla \cdot (\rho v\mathbf{v})\mathbf{j} + \nabla \cdot (\rho w\mathbf{v})\mathbf{k}$$

Vi substituerer med (8.13) i (8.12) og integrerer likningen over et fast volum τ som har begrensingsflate σ . Ved å benytte Gauss sats på hver av komponentene i integralet av vektoren \mathbf{R} får vi

$$\int_{\tau} \mathbf{R} d\tau = \int_{\sigma} \rho\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma})$$

Etter hva vi før har sett er dette strømmen av bevegelsesmengde ut gjennom flaten σ . De øvrige integralene som inngår lar seg også lett gjenkjenne, og vi kommer igjen frem til impulslikningen (8.8).

8.5 Energilikninger for mekanisk energi og total energi

Den totale energien for en viss mengde av et fluid kan deles inn i kinetisk energi, potensiell energi og indre energi. Den kinetiske og potensielle energi er makroskopiske energiformer knyttet henholdsvis til felthastigheten og posisjonen. Som oftest er den potensielle energien stillingsenergi i tyngdefeltet. Den indre energien er derimot knyttet til den uordnede molekylære bevegelsen og til kraftvirkningen mellom de enkelte molekylene.

Ifølge energiprinsippet vil den totale energien endre seg som følge av arbeidet som utføres av krefter som virker på fluidet samt tilførsel av varme fra omgivelsene. Dersom vi ser bort fra friksjonskrefter og bare regner med trykkets arbeid kan likningen som uttrykker dette formuleres:

$$\frac{d}{dt}(T + V + E) = Q - \int_{\sigma} p\mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (8.14)$$

Trykkets arbeid er her representert ved integralet over flaten σ som begrenser fluidet, Q er tilført varme og E betegner den indre energien for fluidet. Den kinetiske energien og den potensielle energien er er definert henholdsvis ved

$$T = \int_m \frac{\mathbf{v}^2}{2} dm \quad (8.15)$$

og

$$V = \int_m \Phi dm \quad (8.16)$$

hvor $\Phi = gz$ er potensialet pr. masseenhet, dm er et masseelement og m er den totale massen av fluidet. Vi antar at integrasjonen til enhver tid foretas over den samme massen. Fluidet fyller volumet τ med begrensingsflaten σ som således flyter i feltet.

Summen av den kinetiske og den potensielle energien kalles ofte for den *mekaniske energien* og det kan også utledes en energilikning som viser hvordan den mekaniske energien endrer seg. Bevegelseslikningen (8.12) multipliseres skalert med hastighetsvektoren \mathbf{v} og en får

$$\rho \frac{D}{dt} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \Phi \right) = -\mathbf{v} \cdot \nabla p \quad (8.17)$$

Det er forutsatt at potensialet Φ er uavhengig av tiden slik at

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

og

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \Phi = \frac{D\Phi}{dt}$$

Vi har også benyttet at

$$\mathbf{v} \cdot \frac{D\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{D\mathbf{v}^2}{dt}$$

Endringen i den mekaniske energien pr. tidsenhet for hele fluidet innenfor volumet τ finner vi ved å integrere (8.17).

$$\int_m \frac{D}{dt} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \Phi \right) dm = - \int_{\tau} \mathbf{v} \cdot \nabla p d\tau$$

hvor $dm = \rho d\tau$ er massen av volumelementet $d\tau$ og m er som før den totale massen av fluidet. Vi understreker igjen at integrasjonen til enhver tid foretas over den samme massen og at volumet τ og dets begrensingsflate således ikke er geometrisk fast, men flyter i feltet. Integrasjonen til venstre for likhetstegnet betyr at vi skal summere endringene pr. tidsenhet av størrelsen $\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \Phi$ for alle partiklene, som væske eller gassmengden tenkes å bestå av. Denne summen må være lik endringen pr. tidsenhet av summen av $\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \Phi$ for samtlige partikler. Altså er

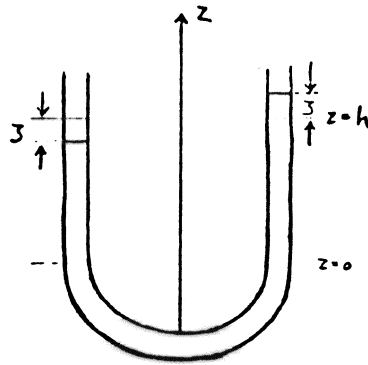
$$\int_m \frac{D}{dt} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \Phi \right) dm = \frac{d}{dt} (T + V)$$

hvor T og V er definert i (8.15–8.16). Derved følger det at endringen i mekanisk energi pr. tidsenhet er

$$\frac{d}{dt} (T + V) = - \int_{\tau} \mathbf{v} \cdot \nabla p d\tau \quad (8.18)$$

Dette er energilikningen for fluidets mekaniske energi. Leddet på høyre side av denne likningen representerer *trykkets ytre arbeid* dvs. den delen av trykkets arbeid som går til å endre den mekaniske energien. Vi har at

$$\mathbf{v} \cdot \nabla p = \nabla \cdot (p\mathbf{v}) - p\nabla \cdot \mathbf{v}$$



Figur 8.8: Svingninger i et U-rør.

Setter vi dette inn i integralet på høyre side i likning (8.18) og benytter Gauss sats får vi

$$\frac{d}{dt}(T + V) = \int_{\tau} p \nabla \cdot \mathbf{v} d\tau - \int_{\sigma} p \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (8.19)$$

Andre leddet på høyre side i (8.19) er det **totale** arbeidet som trykket utfører pr. tidsenhet på fluidet innefor flaten σ . Det første leddet på samme side av likhetstegnet er den delen av trykkets arbeid som er knyttet til ekspansjon (eller kontraksjon) av fluidet. For å se betydningen av dette leddet substraherer vi likningen (8.19) fra likningen for endringen av totalenergien (8.14). Dette gir en likning som viser hvordan den indre energien endre seg.

$$\frac{dE}{dt} = Q - \int_{\tau} p \nabla \cdot \mathbf{v} d\tau \quad (8.20)$$

Av denne likningen følger det at den indre energien for et friksjonsfritt fluid kan bare endre seg som følge av tilført varme og ved ekspansjon eller kontraksjon i feltet. For en inkompressibel væske vil endringen i indre energi bare skje ved tilført varme.

8.6 Eksempel på anvendelse av den mekaniske energilikningen. Svingninger i kommuniserende rør

Vi betrakter et u-rør fylt med en homogen væske med tetthet ρ . Røret har tverrsnitt A . De åpne grensene av røret er vertikale og ved likevekt er væskehøyden h i de vertikale rørendene. Væsken settes i bevegelse og utfører svingninger om likevektsstillingen (figur 8.8). Vi forutsetter at hastigheten er uniform over rørets tverrsnitt. Dersom overflaten forflyttes en distanse ζ som er en funksjon av t så er altså væskens hastighet $\dot{\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$. Den kinetiske energien for væskemengden er

$$T = \frac{\rho}{2} LA \dot{\zeta}^2$$

hvor L er lengden av røret som er fylt med væske. For å finne den potensielle energien er det tilstrekkelig å betrakte de vertikale rørendene fordi vi forutsetter

at den krumme delen alltid er fylt med væske. Væsken i denne delen av røret har derfor en konstant potensiell energi V_0 . Den potensielle energien for hele væsken er altså

$$V = V_0 + \int_0^{h+\zeta} \rho g z A dz + \int_0^{h-\zeta} \rho g z A dz$$

som gir

$$V = V_0 + \rho g A h^2 + \rho g A \zeta^2$$

Nå utfører ikke trykket noe netto arbeid på væskeoverflaten i de to vertikale rørendene og siden væsken også er inkompressibel følger det fra energilikningen (8.19)

$$\frac{d}{dt}(T + V) = 0$$

Dette gir

$$\ddot{\zeta} = -\frac{2g}{L}\zeta$$

Væsken utfører altså harmoniske svingninger om likevektsstillingen og perioden er

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$$

I praksis vil friksjon føre til at svingningene dempes. Særlig for tynne rør vil friksjonsvirkningen bli stor.

8.7 Øvingsoppgaver

- En ekspanderende gass fyller et rett sirkulært rør med tverrsnittsareal q mellom en fast plan bunnflate $x = 0$ og et plan gassfront ved $x = \ell(t)$ når x akse er lagt langs rørets lengdeakse. Ved tiden $t = 0$ er $\ell = \ell_0$ og tettheten av gassen er konstant $\rho = \rho_0$. Hastigheten i gassen er rettet i x -retning og gitt ved $u = ax$ hvor a er en konstant. Vi antar tettheten i gassen bare er en funksjon av t , $\rho = \rho(t)$.
 - Bestem $\ell(t)$ og $\rho(t)$.
 - Beregn endringen i bevegelsesmengde pr. tidsenhet for gassen både ved å bruke transportteoremet og direkte uten bruk av teoremet.
- En homogen inkompressibel væske strømmer stasjonært gjennom en rør-innsnevring. Tverrsnittsarealet av røret før og etter innsnevringen er henholdsvis S_A og S_B . Strømhastigheten ved snittflaten S_A er U_0 og trykket er p_0 .
 - Finn strømhastigheten og trykket i røret ved snittflaten S_B når $S_B = \frac{1}{2}S_A$.
 - Formuler impulslikningen for et kontrollvolum som består av rørvæggen og de to snittflatene S_A og S_B og finn reaksjonskraften som må brukes for å holde røret i ro.

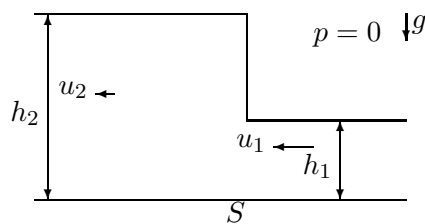
3. En rett sirkulær sylinder med radius a holdes i ro i en uniform stasjonær og rettlinjjet væskestrøm hvor fristrøms hastigheten er U_o og sylinderaksen er vinkelrett på strømmen. Bak sylindere danner det seg en kjølvannsstrøm og vi antar at den er symmetrisk om en akse i strømrretningen gjennom sentrum av sylindere. Vi antar først at kjølvannet har en bredde $2a$ og at strømhastigheten innenfor dette området er neglisjerbar i forhold til fristrøms hastigheten U_o utenfor kjølvannet.

- a) Begrunn hvorfor vi kan regne med at det ikke er trykkgradienter i feltet langt borte fra sylindere.
- b) Legg et kontrollvolum med snittflater normalt strømmen langt foran og bak sylindere. Sett opp impulslikningen for kontrollvolumet og bestem kraften som må brukes for å holde sylindere i ro.
- c) Hva blir kraften dersom strømsprofilen bak sylindere er

$$U(y) = U_o \left[1 - \exp\left(-\frac{y^2}{a^2}\right) \right]$$

hvor y -aksen er rettet på tvers av strømmen og punktet $y = 0$ ligger på aksene gjennom sentrum nedstrøms fra sylindere?

- 4. Et rett jevntykt rør går over i en Y-formet forgrening hvor hver av rørgreningene er rette og jevntykke. Tverrsnittsarealet i hovedrøret er S_A og rørgreningene S_B . Vinkelen mellom aksene i hovedrøret og aksene i rørgreningene er θ . Gjennom rørsystemet flyter det en stasjonær strøm av en homogen inkompressibel væske. Strømhastigheten i hovedrøret er U_o og trykket er p_o . Finn resultatanten av trykkraften på veggene i rørsystemet.
- 5. En homogen, inkompressibel, friksjonsfri væske strømmer stasjonært i en rett kanal.



Anta rettlinjjet uniform strøm ovenfor og nedenfor S , og en (tilnærmet) diskontinuerlig endring av h ved S . Vi regner med at trykket er hydrostatisk: $p = -\rho g z + \text{konst.}$ x -aksene legges langs bunnen av kanalen.

- a) Finn relasjoner mellom u_1 , h_1 , u_2 og h_2 ved å bruke kontinuitets- og impulslikning.
- b) Vis at dersom væsken taper mekanisk energi ved S , så må $h_2 > h_1$.

Kapittel 9

Bølger i fluider

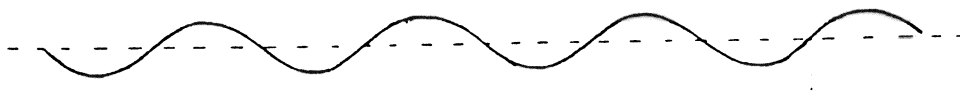
9.1 Bølgebevegelse.

I fluider kan det opptre forskjellige former for bølgebevegelse, og vi kjenner alle eksempler på det fra det daglige liv. Den fysikalske årsaken til bølgebevegelsen kan være forskjellig. *Lydbølger* i luft og vann er knyttet til kompressibiliteten eller de elastiske egenskaper ved fluidet. *Overflatebølger* i vann og sjø skyldes tyngdekraften eller overflatespenninger. I atmosfæren og i havet og i innsjøer kan det opptre *interne tyngdebølger* på grunn av tetthetssjiktningen. Selv om den fysikalske årsaken er forskjellig, har de forskjellige former for bølgebevegelse mange felles trekk. For all bølgebevegelse gjelder det at bølgene forplanter seg gjennom mediet med en karakteristisk hastighet og at bølgene kan gjenkjennes på steder som ligger langt fra det stedet hvor bølgene ble skapt. Bølger overfører altså energi med en bestemt signalhastighet.

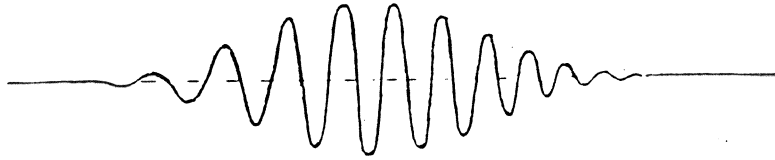
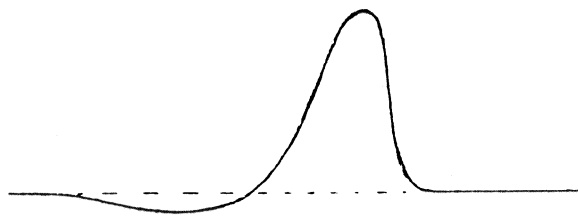
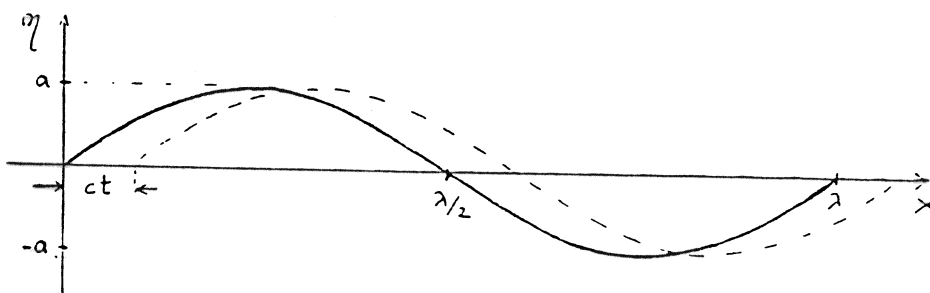
Med bølger tenker vi umiddelbart på et regelmessig *bølgetog* som består av en bølgekomponent med karakteristisk bølgelengde og frekvens. Ofte får man å gjøre med *bølgegrupper* som er bølgetog av begrenset utstrekning hvor amplituden til de individuelle bølgene i gruppen varierer fra forkant til bakkant av gruppen, og med *bølgepulser* som består av en enslig bølgetopp. Et regelmessig bølgetog kan beskrives ved en harmonisk funksjon, og vi lar η representere en eller annen karakteristisk størrelse ved bølgebevegelsen. η kan for eksempel være hevingen eller senkningen av vannflaten på grunn av overflatebølger eller forrykningen av luftpartiklene når en lydbølge passerer forbi. For *plane bølger* som forplanter seg i x -retningen har vi

$$\eta = a \sin k(x - ct) \quad (9.1)$$

hvor a er *bølgeamplituden*, k er *bølgetallet*, og c er *fasehastigheten* som er den



Figur 9.1: *Bølgetog*

Figur 9.2: *Bølgegruppe*Figur 9.3: *Bølgepuls*Figur 9.4: *Bølgeforplantning.*

hastighet som bølgene forplanter seg med. Bølgelengden λ er gitt ved relasjonen

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

og *bølgeperioden* er

$$T = \frac{\lambda}{c}$$

Det er ofte hensiktsmessig å innføre vinkelfrekvensen (vinkelhastigheten) ω som er

$$\omega = kc$$

Funksjonen (9.1) er for $t=0$ fremstilt grafisk med heltrukket kurve i 9.4. Ved et senere tidspunkt t har bølgen flyttet seg en distanse ct mot høyre (stiplet kurve), men selve bølgeformen er uendret.

Vi sier at (9.1) representerer en *harmonisk* bølgekomponent. Ved å addere flere harmoniske bølgekomponenter med forskjellig amplitude og forskjellig bølgelengde kan vi få dannet bølgegrupper eller bølgepulser. Matematisk henger dette sammen med at man kan fremstille forskjellige funksjoner ved å summere harmoniske funksjoner (Fouriers teorem).

9.2 Lydbølger i væsker og gasser

Vi skal begrense oss til å betrakte plane lydbølger som forplanter seg i x -aksens retning. Dersom vi ser bort fra tyngdekraften som har ubetydelig innvirkning på kortperiodiske lydbølger, kan bevegelseslikningen skrives

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (9.2)$$

og kontinuitetslikningen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} \quad (9.3)$$

Trykket og tettheten i fluidet **før** det forstyrres av lydbølgen betegnes henholdsvis med p_0 og ρ_0 , og vi forutsetter at disse størrelser er konstante gjennom hele mediet. På grunn av lydbølgene oppstår det en liten trykkperturbasjon (lydtrykk) p' og en tetthetsperturbasjon ρ' og dessuten en liten strøm u . Alle disse størrelsene vil være funksjoner av x og t . Vi har

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p' \\ \rho &= \rho_0 + \rho' \end{aligned}$$

Siden perturbasjonsstørrelsene forutsettes å være små vil vi *linearisere* bevegelseslikningen og kontinuitetslikningen med hensyn på disse størrelsene. Det innebærer at vi sløyfer alle ledd som er produktet av to perturbasjonsstørrelser med den begrunnelse at produktleddene vil være små sammenliknet med de

øvrige ledd i likningen. Vi skal senere se hvilke betingelser dette legger på de løsninger vi finner. Den lineariserte formen av (9.2) og (9.3) er

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \quad (9.4)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} \quad (9.5)$$

For å få et sluttet sett av likninger må vi benytte tilstandslikningen som gir en forbindelse mellom p' og ρ' . Det er av den grunn viktig å vite hvordan temperaturen varierer. Vi venter at i områder med trykkøkning ($p' > 0$) vil temperaturen øke, og i områder med trykkfall ($p' < 0$) vil temperaturen avta. Newton som var den første til å beregne lydbølgens hastighet, antok at varmen ble ledet så hurtig at temperaturforskjellene ble utjevnet. Han regnet derfor med at tilstandsendringen i lydbølger er isotherm. Dette fører til feil verdi av lydhastigheten. Senere forsto Laplace at man må regne med isentropiske tilstandsendringer. Dette betyr at den enkelte partikkel i fluidet ikke mister eller mottar varme av betydning fra de omliggende partiklene, og at varmestrømmen fra de oppvarmede områdene til de avkjølte områdene i mediet er neglisjerbar. Dette er tilfelle så lenge som bølgelengden for lydbølgene er lang sammenliknet med den midlere fri veilengde. For lange bølger blir temperaturgradientene små og dette igjen fører til at varmestrømmen blir liten. For hørbar lyd vil derfor tilstandsendringene med god tilnærming kunne regnes som isentropiske. For en isentropisk tilstandsendring eksisterer det alltid en barotropirelasjon (kfr. 2.25) som vi kan skrive

$$\rho = \rho(p)$$

Om vi tar med bare første leddet i en Taylor utvikling av denne funksjonen omkring ρ_0 og p_0 , får vi derfor

$$\rho - \rho_0 \cong \left(\frac{d\rho}{dp} \right)_0 (p - p_0)$$

som kan skrives

$$\rho' = \left(\frac{d\rho}{dp} \right)_0 p' \quad (9.6)$$

hvor indekset betegner verdier av den deriverte ved tilstanden ρ_0, p_0 . Likningen (9.6) uttrykker at det i første tilnærming er en lineær relasjon mellom trykk- og tetthetsperturbasjonen. Vi har tidligere (se avsnitt 2.8) definert kompressibiliteten κ_s ved konstant entropi for en ideal gass, og vi har i sin alminnerlighet at

$$\kappa_s = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp}$$

Dersom vi lar κ_{s0} betegne kompressibiliteten ved tilstanden ρ_0, p_0 , så kan (9.6) skrives

$$\rho' = \rho_0 \kappa_{s0} p' \quad (9.7)$$

Ved hjelp av (9.7) kan vi eliminere ρ' fra (9.5) slik at vi får to likninger hvor bare u og p' inngår. Ved derivasjon av disse likningene henholdsvis med hensyn på x og t får vi

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0 \quad (9.8)$$

hvor

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \kappa_{s0}}}$$

Likning (9.8) er den endimensjonale *bølgelikningen*, og ved innsetting ser vi at den har løsningen

$$p' = p_m \sin k(x - ct) \quad (9.9)$$

hvor den maksimale trykkperturbasjonen (lydtrykket) p_m og bølgetallet k kan velges fritt. Bølgens forplantningshastighet er imidlertid fast og bestemt ved kompressibiliteten og tettheten i mediet. Dette betyr at forplantningshastigheten for lydbølger med liten amplitude er uavhengig av bølgeperioden eller bølgelengden. Vi sier at lydbølgene er *ikke-dispersive*. Dette innebærer at alle harmoniske bølgekomponenter forplanter seg med den samme hastighet og en bølgepuls vil derfor forplante seg med uendret form. Vi innser dette fordi

$$p' = f(x - ct)$$

hvor f er en vilkårlig funksjon av argumentet $x - ct$, medfører at f er en løsning av bølgelikningen. At en bølgepuls forplanter seg med uendret form, har den viktige praktiske konsekvens at et lydsignal kan oppfattes på samme måte på forskjellige avstander fra lydkilden. Hadde det ikke vært slik, ville vi hatt betydelig vannskeligere for å kommunisere med hverandre hved hjelp av lyd. Ved å benytte likning (9.4) finner vi at hastighetsperturbasjonen som tilsvarer lydtrykket (9.8) er

$$u = u_m \sin k(x - ct)$$

hvor $u_m = \frac{p_m}{\rho c}$ er den maksimale strømhastigheten i tilknytning til lydbølgen. En innser at dette er riktig for eksempel ved å sette uttrykkene u og p' inn i (9.4). Vi kan nå finne en betingelse for at lineariseringen av likningene (9.2) og (9.3) vil være gyldig. Et typisk ikke-lineært ledd er

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = u_m^2 k \sin k(x - ct) \cos k(x - ct)$$

Dette leddet kan sammenliknes med et typisk lineært ledd, for eksempel

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u_m k c \cos k(x - ct)$$

Forholdet mellom det første og det siste av disse leddene er maksimalt

$$M = \frac{u_m}{c}$$

Skal lineariseringen være gyldig, må $M \ll 1$ dvs. strømhastigheten må være mye mindre enn lydshastigheten. Størrelsen M kalles *Mach-tallet* og spiller en viktig rolle ved klassifikasjon av strøm hvor kompressibiliteten i fluidet er av betydning.

- $M < 1$ Subsonisk (underlyds)
- $M \cong 1$ Transsonisk
- $M > 1$ Supersonisk (overlyds)
- $M \gg 1$ Hypersonisk

Tabell 9.1: Parametere for lydbølger med frekvens 440 Hz (enstrøken A) ved atmosfæretrykk og temperatur $15^\circ C$

Medium	c m/s	$p_m(N/m^2)$ ved 60db	ρ g/cm^3	$u_m \times 10^5$ m/s	$T \cdot 10^2$ s	λ m
luft	341	0.028	$1.06 \cdot 10^{-3}$	7.74	2.27	0.775
vann	1465	0.028	0.9991	$1.91 \cdot 10^{-6}$	2.27	3.330

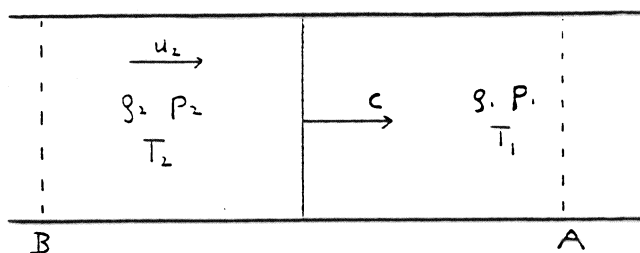
Strømningen i tilknytning til lineære lydbølger er altså subsonisk ($M \ll 1$). Ved Mach-tall større enn 1 vil ikke-lineære effekter være svært viktige, og i nærheten av overlydsfly og kraftige eksplosjoner vil det av den grunn opptre sjokkbølger.

Samhørende verdier for bølgeparametrene for lydbølger av 60 decibel (db) styrke som i luft tilsvarer lyd av moderat intensitet (vanlig talehøyde), er gitt i tabellen. Tabellen viser også perioden og bølgelengden for lydbølger med frekvens 440 Hz som tilsvarer enstrøken A (kammertonen). (1 Hertz (Hz) = 1 svingning pr. sekund).

Verdiene for c og ρ gjelder ved atmosfæretrykk $p_0 = 1.013 \cdot 10^5 Pa$ og temperatur $15^\circ C$.

9.3 Sjokkbølger

Sjokkbølger er karakterisert ved meget bratte bølgefronter, og trykk, tetthet og temperatur øker meget raskt når bølgen passerer forbi. Bølgefrontens tykkelse er av størrelsesorden den midlere fri veilengde for molekylene, og vi kan derfor oppfatte sjokkbølgene som en diskontinuerlig endring i de tilstandsvariable ρ , p



Figur 9.5: Sjokkfront i rør.

Tabell 9.2: Data for plane sjokkbølger i ideal gass.
 c_2 betegner lyd hastigheten bak sjokkbølgen.

β	T_2/T_1	ρ_1/ρ_2	c/c_1	u_2/c_1	u_2/c_2
1.0	1.23	1.62	1.36	0.52	0.47
2.0	1.42	2.14	1.65	0.87	0.73
3.0	1.60	2.50	1.89	1.10	0.90
5.0	1.95	3.08	2.30	0.55	1.11
∞	∞	6.00	∞	∞	1.89

og T . Vi skal her utlede noen relasjoner som må gjelde for plane sjokkbølger, og vi skal betrakte en sjokkbølge som forplanter seg med konstant hastighet. I eksperiment (sjokkrør) kan slike bølger genereres for eksempel ved at det åpnes for et trykk-kammer med stort trykk ved enden av røret. Trykk, tetthet og temperatur har verdiene p_1 , ρ_1 , T_1 og p_2 , ρ_2 , T_2 henholdsvis foran og bak sjokkbølgen. Sjokkbølgen beveger seg med hastighet c inn i deler av røret hvor gassen er i ro. Bak sjokkbølgen regner vi med en uniform hastighet u_2 . Vi betrakter et område av røret som ligger mellom snittflatene A og B henholdsvis foran og bak sjokkbølgen. Vi benytter nå impulslikningen på volumet begrenset av røret og snittflatene. Dette gir

$$\rho_2 u_2 c - \rho_2 u_2^2 = -p_1 + p_2$$

Videre må vi ha at økningen av masse innenfor volumet er lik transport av masse inn gjennom snittflaten ved B .

$$(\rho_2 - \rho_1)c = \rho_2 u_2$$

Disse to relasjonene betegnes ofte som *Rankine-Hugoniot sjokkbølgerelasjoner* etter engelskmannen Rankine og franskmannen Hugoniot som utledet relasjonene uavhengig av hverandre. Ved endel omforming finner vi

$$c = \left(\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

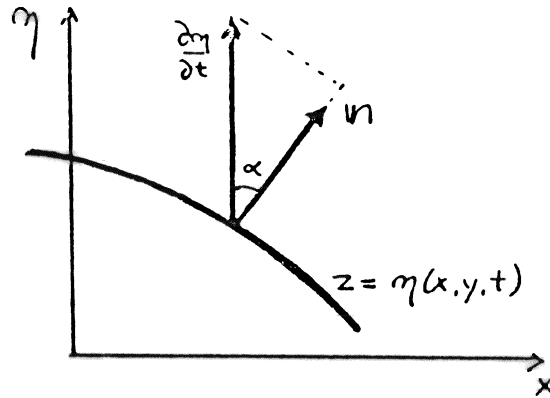
og

$$u_2 = \frac{p_2 - p_1}{\rho_1 c}$$

Sjokkets styrke defineres ofte ved den relative trykkstigningen

$$\beta = \frac{p_2 - p_1}{p_1}$$

Selv om sjokkets styrke er kjent, gir ikke sjokkbølgerelasjonen nok informasjon slik at man kan bestemme sjokkbølgehastigheten c og strømhastigheten u_2 . For å kunne gjøre det er det nødvendig med termodynamiske betraktninger. Ved å benytte energilikningen og tilstandslikningen vil en finne at i sjokkbølgen vil mekanisk energi omdannes til indre energi (varme) og at bare slike sjokkbølger hvor trykket øker ($\beta > 0$) er mulige. En finner også at sjokkbølgens hastighet, c , alltid er større enn den lokale lyd hastigheten c_1 , foran sjokkbølgen. Tabellen viser noen data for plan sjokkbølge i en ideal gass. Bølgen forplanter seg inn i områder hvor gassen er i ro.



Figur 9.6: Grenseflatebetingelsen ved overflaten.

9.4 Grenseflatebetingelsene ved en væskeoverflate

Når vi skal beregne forplantningshastighet og strømhastigheter i overflatebølger, får vi bruk for grenseflatebetingelsene ved en bevegelig væskeoverflate. Vi ser bort fra fordampning og antar at det er ingen strøm av væske gjennom overflaten. Det betyr at væskepartiklens hastighet normalt flaten er lik flatens hastighet i normalretning og at væskepartiklene derfor beveger seg bare i tangensiell retning relativt flaten. Vi skal uttrykke dette matematisk gjennom den kinematiske grenseflatebetingelse. Vi lar væskeoverflaten være beskrevet ved funksjonen

$$z = \eta(x, y, t)$$

hvor η står for hevingen eller senkningen av overflaten i forhold til horisontalplanet xy . Enhetsvektoren normalt til overflaten har komponenter

$$\mathbf{n} = \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) / l$$

hvor

$$l = \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Vektoren \mathbf{n} danner vinkelen α med vertikalen og

$$\cos \alpha = \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = \frac{1}{l}$$

Flatens hastighet i z -retning er $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ og komponenten av flatens hastighet i \mathbf{n} -retning er derfor

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} \cos \alpha = \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{1}{l}$$

Komponenten av væskenshastighet i \mathbf{n} -retning er

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \left(-u \frac{\partial \eta}{\partial x} - v \frac{\partial \eta}{\partial y} + w \right) / l$$

For at det ikke skal være noen gjennomstrømming gjennom overflaten må disse to hastighetskomponentene være like. Dette gir etter forkortning med $1/l$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -u \frac{\partial \eta}{\partial x} - v \frac{\partial \eta}{\partial y} + w$$

som igjen kan skrives

$$\frac{D\eta}{dt} = w \quad \text{for } z = \eta \quad (9.10)$$

Dette er den *kinematiske grenseflatebetingelsen* ved en bevegelig flate.

Den kinematiske grenseflatebetingelsen kan utledes på en alternativ og enklere måte, men hvor den fysiske betingelsen ikke kommer fram så eksplisitt. En tar den partikkelderiverte av flatelikningen $z - \eta(x, y, t) = 0$ og dette gir

$$\frac{Dz}{dt} = \frac{D\eta}{dt}$$

Nå er $\frac{Dz}{dt} = w$ ved $z = \eta(x, y, t)$ og vi får derved direkte betingelsen (9.10). Denne utledningen av grenseflatebetingelsen er forøvrig helt analog til fremgangsmåten benyttet i oppgave 2.10.7 for å utlede den kinematiske betingelsen ved en fast vegg.

Dersom vi ser bort fra overflatespenningen som bare har betydning for meget korte bølger $\lambda < 2 \text{ cm}$, så må ifølge den dynamiske grenseflatebetingelsen trykket i væsken være lik trykket over væsken (atmosfæretrykket). Betegner vi atmosfæretrykket med p_0 , så har vi altså at

$$p = p_0 \quad \text{for } z = \eta$$

Ved virvelfri bevegelse av en homogen inkompressibel væske er trykket i væsken gitt ved Eulers trykklikning (7.27). Velger vi z -aksen vertikal og antar at tyngden er den eneste ytre kraft, får vi fra (7.27)

$$p = -\rho \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + gz \right] + f(t)$$

hvor φ er hastighetspotensialet og $f(t)$ er en funksjon av tiden som er bestemt ved forholdene i et punkt i væsken. Setter vi inn i den dynamiske grenseflatebetingelsen og redefinerer $f(t)$ slik at konstanten p_0 og tettheten ρ_0 inngår i funksjonen, så leder det til

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + g\eta = f(t) \quad \text{for } z = \eta \quad (9.11)$$

Dette er den *dynamiske grenseflatebetingelsen* ved overflaten av en homogen inkompressibel væske hvor bevegelsen er hvirvelfri.

9.5 Linearisering av grenseflatebetingelsene

Vi skal her begrense oss til å betrakte bølger med så liten amplitude at grenseflatebetingelsene kan lineariseres. I betingelsene (9.10) og (9.11) kommer ikke-lineariteten inn på to forskjellige måter. For det første har man produktledd som for eksempel $u \frac{\partial u}{\partial x}$ eller $(\nabla \varphi)^2$. For det andre skal leddene som inngår i grenseflatebetingelsene evalueres for $z = \eta$, og dette gir også opphav til ikke-lineære ledd. Dersom vi, for eksempel, betrakter vertikalhastigheten w ved $z = \eta$, så kan en ved Taylor-utvikling skrive

$$w(x, y, z = \eta, t) = w(x, y, z = 0, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{z=0} \eta + \dots$$

Siden det andre leddet er et produktledd av små størrelser, så vil vi ved linearisering kunne sette

$$w(x, y, z = \eta, t) \cong w(x, y, z = 0, t)$$

Etter dette blir den lineariserte formen av den kinematiske grenseflatebetingelsen

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = w \quad \text{for } z=0 \quad (9.12)$$

Denne betingelsen sier at ved $z = 0$ så er vertikalhastigheten for flaten og for væsken like stor.

På tilsvarende måte kan vi linearisere leddene som inngår i den dynamiske grenseflatebetingelsen, og vi får at den lineariserte formen av denne betingelsen kan skrives

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\eta = f(t) \quad \text{for } z=0 \quad (9.13)$$

Denne likningen kan skrives

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi + \int_{t_0}^t f(t) dt \right) + g\eta = 0$$

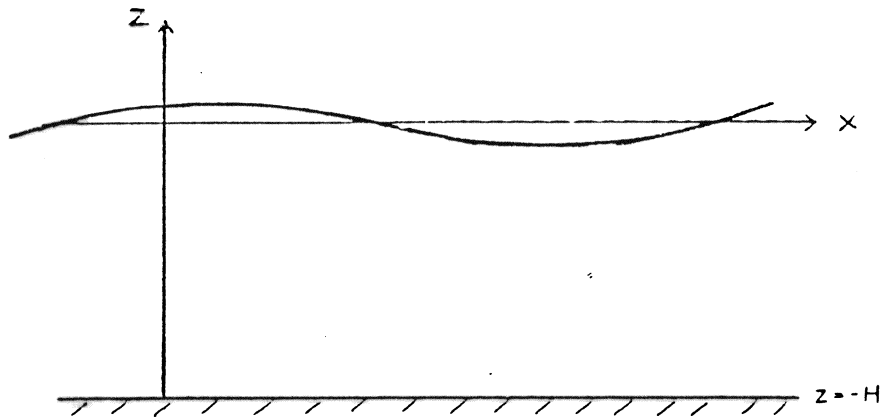
Dersom φ er en løsning av Laplace likningen så vil også $\varphi' = \varphi + \int_{t_0}^t f(t) dt$ være en løsning og siden $\nabla \varphi' = \nabla \varphi$ vil de to løsningene φ og φ' tilsvare samme hastighetsfelt. Den inhomogene grenseflatebetingelsen (9.13) kan følgelig skrives

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\eta = 0$$

Hvor vi for enkelhets skyld har sløffet merket på potensialet i den siste likningen.

9.6 Tyngdebølger ved en væskeoverflate. Overflatebølger

Bortsett fra meget korte bølgelengder ($\lambda < 1\text{cm}$) så er friksjonens innvirkning på overflatebølger meget liten, og friksjonens innvirkning på hastighetsfeltet



Figur 9.7: Overflatebølger

er hovedsaklig begrenset til tynne grensesjikt nær overflaten eller ved bunnen. Bølgebevegelsen kan derfor med god tilnærming regnes som irrotasjonell, og hastighetsfeltet er bestemt av et hastighetspotensiale som oppfyller Laplace-likningen. For plane bølger hvor bevegelsen foregår i xz -planet, venter vi at hastighetspotensialet er en periodisk funksjon av x og t , og vi søker derfor løsninger av Laplace-likningen (7.11) av formen

$$\varphi = \hat{\varphi}(z) \cos k(x - ct)$$

Ved innsetting i (7.11) får vi

$$\frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial z^2} = k^2 \hat{\varphi}$$

Løsningen av denne differensiallikningen kan uttrykkes ved eksponentialfunksjonen

$$\hat{\varphi} = Ae^{kz} + Be^{-kz}$$

eller hyperbolikusfunksjonene

$$\hat{\varphi} = A \sinh kz + B \cosh(kz)$$

hvor A og B er integrasjonskonstanter. Likeledes vil

$$\hat{\varphi} = A \sinh k(z + H) + B \cosh k(z + H)$$

hvor H er vanddypt som antas konstant, være en løsning av likningen. Hvilken av disse tre løsningsformene en skal velge i et gitt problem avhenger av grenseflatebetingelsene. For bølger på et væskelag med midlere vanddypt H og med plan horisontal bunn $z = -H$ er det hensiktsmessig å velge den siste av de tre nevnte løsningsformene. Dersom væskelaget er meget dypt, $H \rightarrow \infty$, vil det derimot være naturlig å velge den første løsningsformen med $B = 0$.

I henhold til avsnitt (9.5) kan de lineariserte grenseflatebetingelsene ved væskeoverflaten skrives

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad \text{for } z=0$$

og

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \text{for } z=0$$

Dersom vi innskrenker oss til å betrakte bølger hvor bunnen er plan og horisontal, så må vertikalhastigheten ved bunnen være null

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{for } z=-H$$

Siden φ er en harmonisk funksjon av t og x , må også η være en harmonisk funksjon av de samme variable for at grenseflatebetingelsene ved overflaten skal være oppfylt. Vi innser lett at

$$\eta = a \sin k(x - ct)$$

er det eneste mulig valg. Det gjennstår nå å bestemme integrasjonskonstantene A og B slik at alle grenseflatebetingelsene er oppfylt. Dette fører til

$$\varphi = -\frac{ac}{\sinh(kH)} \cosh k(z + H) \cos k(x - ct) \quad (9.14)$$

og

$$c^2 = \frac{g}{k} \tanh(kH) \quad (9.15)$$

Vi har altså funnet at plane overflatebølger kan forplante seg langs en væskeoverflate og fasehastigheten er gitt ved (9.15). Siden c avhenger av bølgetallet (og bølgelengden) så vil overflatebølgene i alminnerlighet være *dispersive* og de adskiller seg på den måte fra lydbølger. Den horisontale og den vertikale hastighetskomponenten i bølgebevegelsen er

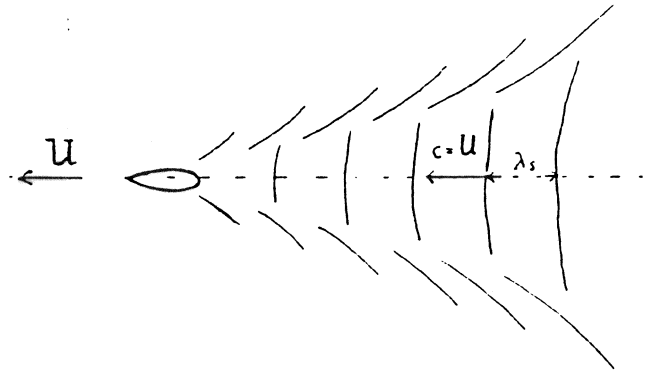
$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{ack}{\sinh(kH)} \cosh k(z + H) \sin k(x - ct)$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{ack}{\sinh(kH)} \sinh k(z + H) \cos k(x - ct)$$

Når vi skal diskutere bevegelsesformen er det hensiktsmessig å skille mellom to tilfeller. I det første tilfellet betrakter vi *bølger på dypt vann* slik at $\lambda \ll H$ dvs. $kH \gg 1$. Eksempelvis for $kH = 2$ som tilsvarer en bølgelengde $\lambda = \pi H$, er $\tanh(kH) = 0.964$. Med $\tanh(kH) = 1$ blir fasehastigheten

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad (9.16)$$

Vi ser av dette uttrykket at lange bølger vil forplante seg hurtigere enn korte bølger. Vi kan iaktta dette på forskjellig vis.



Figur 9.8: Skipsbølgemønster bak et skip.

Når vi for eksempel kaster en stein i vannet, så vil det etter en tid dannes et regelmessig bølgetog med ringformede bølgetopper som brer seg utover fra det stedet hvor steinen traff vannflaten. Ser vi godt etter vil vi oppdage at de lengste bølgene forplanter seg foran i toget, og at de **lange bølgene etterfølges av gradevis kortere bølger**.

Bak et skip som går med jevn fart, U , og på stø kurs, vil man kunne ha system av bølger slik som skissert på figur 9.8. Rett bak skipet har man et bølgesytem som tilnærmet består av plane bølger med bølgetopper på tvers av fartsretningen (hekkbølger). Fra baugen eller siden vil det også stråle ut bølger i vifteform (baugbølger). Sett fra skipet synes bølgemønstret å være stasjonært og den enkelte bølgetopp beholder en fast posisjon i forhold til skipet. For hekkbølgene må derfor forplantningshastigheten være lik skipets hastighet, altså $c = U$. Benytter vi (9.16) finner vi at bølgelengden for hekkbølgene er

$$\lambda_s = 2\pi \frac{U^2}{g}$$

Bølgelengden for hekkbølgene avhenger derfor av skipets fart slik at bølgelengden er størst når farten er stor. Skipsbølgemønstret kommer i noen tilfelle tydelig frem på satellittbilder. Fra bilde kan man bestemme bølgelengden λ_s og skipets fart kan anslås selv i fjerntliggende farvann! Satellitter kan derfor benyttes til overvåking av skipstrafikken.

For bølger på dypt vann hvor $kH \gg 1$, er

$$\frac{\cosh k(z+H)}{\sinh(kH)} = \frac{e^{kz} + e^{-kz}e^{-2kH}}{1 - e^{-2kH}} \cong e^{kz}$$

og

$$\frac{\sinh k(z+H)}{\sinh(kH)} = \frac{e^{kz} - e^{-kz}e^{-2kH}}{1 - e^{-2kH}} \cong e^{kz}$$

Hastighetskomponentene for bølger på dypt vann er derfor

$$u = acke^{kz} \sin k(x - ct)$$

$$w = -acke^{kz} \cos k(x - ct)$$

og den maksimale hastigheten er

$$u_m = (u^2 + w^2)^{\frac{1}{2}} = acke^{kz}$$

Hastigheten avtar altså eksponensielt nedover i dypet. I et dyp som tilsvarer en bølgelengde, $z = -2\pi/k$, er strømmen mindre enn $2/1000$ av hva den er ved overflaten. **Bølgebevegelsen er altså knyttet til en sone nær overflaten med tykkelse mindre enn en bølgelengde.**

Tabell 9.3: Data for bølger på dypt vann ($a/\lambda = 0.05$).

λ (m)	c (m/s)	T (s)	a (m)	u_{m0} (m/s)
0.25	0.62	0.40	0.0125	0.195
0.50	0.88	0.57	0.025	0.275
1.00	1.25	0.80	0.05	0.395
5.00	2.79	1.79	0.25	0.875
10.00	3.95	2.53	0.50	1.24
25.00	6.25	4.00	1.25	1.97
50.00	8.84	5.66	2.50	2.78
100.00	12.50	8.00	5.00	3.93

Det kan være av interesse å finne forflytningen av den enkelte væskepartikkel på grunn av bølgebevegelsen. Vi har tidligere utledet en formel (2.4), som gjør det mulig i prinsippet å beregne forflytningen når hastighetsfeltet er kjent. Vi betrakter en væskepartikkel som ved tidspunktet t_0 har posisjon x_0, z_0 . Posisjonen ved et senere tidspunkt t er x og z , og vi har fra (2.4)

$$x - x_0 = \int_{t_0}^t u(x, z, t) dt$$

$$z - z_0 = \int_{t_0}^t w(x, z, t) dt$$

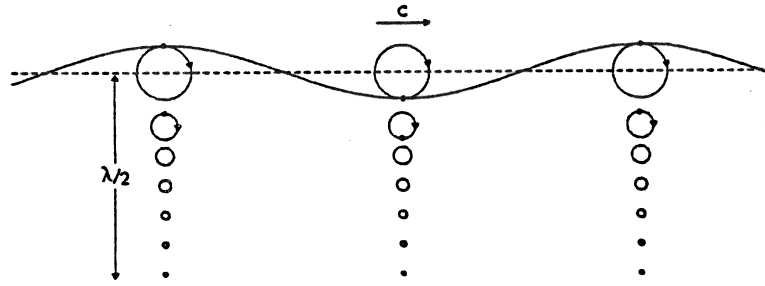
Siden forflytningene er små, kan vi sette $x = x_0$ og $z = z_0$ i integranden. Dette tilsvarer at vi tar med første leddet i en Taylor rekkeutvikling av integranden i omegnen av x_0, z_0 og tilnærmelsen vi gjør er i samsvar med lineariseringene som er gjort tidligere. Ved integrasjon finner vi

$$x - x_0 = ae^{kz_0} \cos k(x_0 - ct) + K_1$$

$$z - z_0 = ae^{kz_0} \sin k(x_0 - ct) + K_2$$
(9.17)

hvor K_1 og K_2 er integrasjonskonstanter. Vi innfører nå den midlere posisjon for partikkelen. Vi definerer middelverdien over en periode ved

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} x(t) dt$$



Figur 9.9: Partikkelbaner i bølger på dypt vann.

På tilsvarende måte bestemmes også \bar{z} . Ved å midle likningene (9.17) får vi

$$\bar{x} - x_0 = K_1$$

$$\bar{z} - z_0 = K_2$$

siden midlet av en periodisk funksjon er null. Ved hjelp av disse relasjonene kan integrasjonskonstantene elimineres fra (9.17) slik at

$$x - \bar{x} = ae^{kz_0} \cos k(x_0 - ct)$$

$$z - \bar{z} = ae^{kz_0} \sin k(x_0 - ct)$$

Ved kvadrering og summering av uttrykkene fremkommer

$$(x - \bar{x})^2 + (z - \bar{z})^2 = a^2 e^{2kz_0}$$

Dette viser at væskepartiklene går i sirkelformede baner med radius ae^{kz_0} . På samme måte som hastighetsfeltet avtar radius i banen eksponensielt nedover i dypet. Partikkelbanen og omløpsretningen i banene for bølger på dypt vann er skissert i figur (9.9).

I det andre tilfellet betrakter vi lange bølger på grunt vann slik at $\lambda \gg H$ og $kH \ll 1$. Da gjelder med god tilnærming $\tanh kH \cong kH$. Derved kan uttrykket c for fasehastigheten forenkles og vi får

$$c = \sqrt{gH}$$

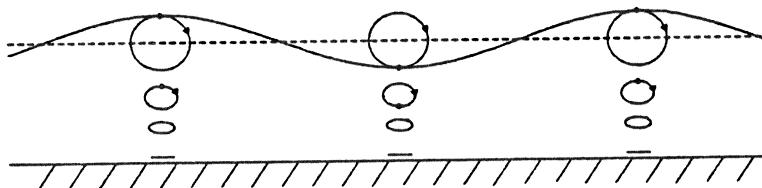
For lange bølger på grunt vann er fasehastigheten altså uavhengig av bølglengden. I motsetning til overflatebølger på dypt vann er lange overflatebølger på grunt vann ikke-dispersive. I grunne vannpytter vil en derfor kunne se bølgepulser som brer seg over relativt lange strekninger uten at bølgeformen forandres vesentlig. Fasehastigheten avhenger av vanddypet slik at bølgene forplanter seg hurtigere over dypt vann enn over områder hvor vanddypet er grunnere. Dette kan gi opphav til avbøyningsfenomener, og denne effekten planlegges utnyttet for å fokusere bølgeenergien i bølgekraftverk.

Dersom $kH \ll 1$, er

$$\cosh k(z + H) = \cosh kH \left(1 + \frac{z}{H}\right) \cong 1$$

$$\sinh k(z + H) = \sinh kH \left(1 + \frac{z}{H}\right) \cong kH \left(1 + \frac{z}{H}\right)$$

$$\sinh(kH) \cong kH$$



Figur 9.10: Partikkelbaner i bølger på grunt vann.

For lange bølger på grunt vann er derfor hastighetskomponentene

$$u = \frac{ac}{H} \sin k(x - ct)$$

$$w = -\frac{ac}{H} k(z + H) \cos k(x - ct)$$

Horisontalhastigheten er derfor tilnærmet konstant gjennom væskelaget. Vertikalhastigheten er liten, og den varierer lineært fra null ved bunnen til en maksimalverdi ved overflaten som er kH . Partikkelbanene blir følgelig langstrakte ellipser som ved bunnen degenerer til rette linjer slik som antydnet i figur 9.10. Fra den lineariserte formen av Eulers trykk-likning får vi at trykket i væsken er

$$p = -\rho \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + gz \right] + p_0$$

For lange bølger på grunt vann er

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \cong -g\eta$$

og vi får at trykket i væsken

$$p = p_0 + \rho g(\eta - z)$$

Dette viser at trykket på et hvert sted i væsken tilsvarer vekten av den overliggende væske. I lange bølger på grunt vann er det altså en *hydrostatisk trykkfordeling*.

9.7 Lineariseringsbetingelser. Ikke-lineære effekter

For lydbølger estimerte vi størrelsesorden for et typisk ikke-lineært ledd i bevegelseslikningen og fant en betingelse for å sløyfe leddet. På tilsvarende måte kan vi gå fram for overflatebølger. For bølger på dypt vann vil vi finne at de ikke-lineære leddene er små i forhold til de lineære leddene dersom bølgesteilheten

$$a/\lambda \ll 1$$

For lange bølger på grunt vann er det tilsvarende kravet at bølgeamplituden er liten i forhold til vanddypet

$$a/H \ll 1$$

Dette kravet innebærer selvsagt også at bølgesteilheten er liten. Det er imidlertid vanskelig å angi en fast grense for når lineær bølge teori ikke lenger gir en god beskrivelse av forholdene. Dette skyldes at selv om de ikke lineære leddene er små så vil disse leddene kunne ha en **kumulativ virkning**. Etter en viss tid vil en derfor kunne få utviklet bølgeformer som ikke lar seg beskrive med lineær teori. Av bølgefenomen som ikke lar seg beskrive ved hjelp av lineær bølge teori kan en i første rekke nevne

- usymmetriske bølgeformer (bratte bølgefronter)
- bølgebrytning
- drift (strøm) pga. bølgebevegelsen.

For overflatebølger på dypt vann vil bølgebrytning inntreffe dersom bølgesteilheten $a/\lambda > 0.1$. Siden de ikke lineære leddene i likningen er viktige når man skal beskrive de fenomen som her er nevnt, blir betingelsen *ikke lineære effekter* ofte benyttet.

9.8 Interne (indre) tyngdebølger

I atmosfæren, havet og i innsjøer avtar tettheten i alminnerlighet gradvis oppover i vertikalretningen. Noen ganger er tetthetsvariasjonen begrenset til smale horisontale soner som skiller mellom vann eller luftmasse med forskjellig tetthet. Eksempler på dette er skillet mellom brakkvann og salt bunnvann i fjorder og skille mellom varmt overflatevann og kaldt bunnvann i innsjøer. Dette skillet kan ofte påvises, og det har fått navnet *sprangsjikt*. I væsker og gasser hvor det er tetthetssjiktning i vertikalen kan det opptre meget kompliserte bølgefenomen hvor tyngdekraften eller oppdriftskraften pga. tetthetssjiktninger er årsaken. Her skal vi nøye oss med å behandle det enkle tilfellet at vi har plan bølgebevegelse på skilleflaten mellom to væskelag med forskjellig tetthet. Denne bølgebevegelsen vil som vi skal se ha mye til felles med overflatebølger. Vi forutsetter at væsken i de to lagene ikke blandes slik at skilleflaten er vel definert. Vi antar at skilleflaten har en bølgeform

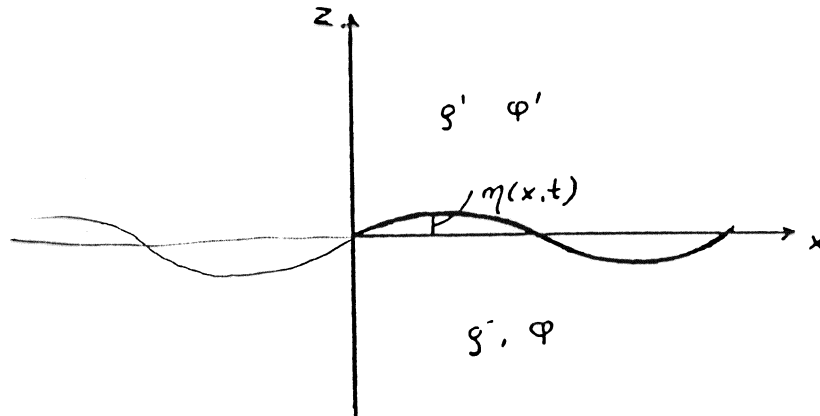
$$\eta = a \sin k(x - ct)$$

Tettheten i det øvre og det nedre væskelaget betegnes henholdsvis med ρ' og ρ . Vi forutsetter også at bevegelsen er **hvirvelfri** og lar φ' og φ stå for hastighetspotensialet i øvre og nedre væskelag henholdsvis. Vi antar videre at bølgebevegelsen er slik at vi kan linearisere grenseflatebetingelsene og vi får følgende at

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi'}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \text{for } z=0 \quad (9.18)$$

og

$$\rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\eta \right) = \rho' \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial t} + g\eta \right) \quad \text{for } z=0 \quad (9.19)$$



Figur 9.11: Indre bølger på skilleflaten mellom to væskelag med forskjellig tetthet.

For å komme frem til denne formen av den dynamiske grenseflatebetingelsen har vi som tidligere vist, trukket tidsfunksjonen i Eulers likning inn i hastighetspotensialene. Vi vil her for enkelhets skyld betrakte bølger med så kort bølgelengde at vi kan regne at tykkelsen av væskelagene ikke har noen innflytelse på bølgebevegelsen. Derfor kan vi regne at væskelagene er av uendelig utstrekning og at bevegelsen dør ut for $z \rightarrow \pm\infty$. Dette kan vi uttrykke ved kravene

$$\begin{aligned}\varphi &\rightarrow 0 \quad \text{for } z \rightarrow -\infty \\ \varphi' &\rightarrow 0 \quad \text{for } z \rightarrow +\infty\end{aligned}$$

Benytter vi resultater fra avsnitt 9.6 får vi at hastighetspotensialet må ha formen

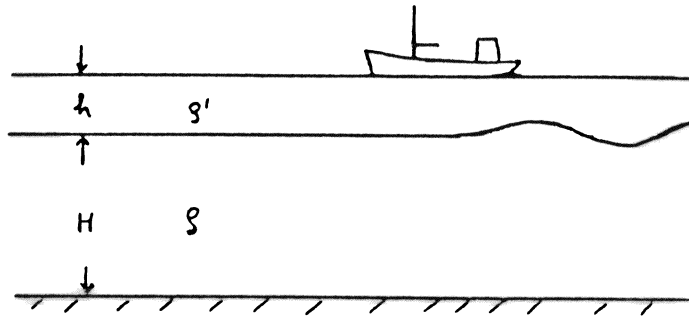
$$\begin{aligned}\varphi &= Ae^{kz} \cos k(x - ct) \\ \varphi' &= Be^{-kz} \cos k(x - ct)\end{aligned}$$

hvor A og B er konstanter. Ved å benytte grenseflatebetingelsene (9.17) og (9.18) finner vi

$$\begin{aligned}B &= -A = ac \\ c &= \sqrt{\frac{\rho - \rho' g}{\rho + \rho' k}}\end{aligned}$$

Av dette siste uttrykket ser vi at fasehastigheten for bølgene avhenger av tyngdens akselerasjon og bølgetallet på samme måte som for overflatebølger. Størrelsen av fasehastigheten er imidlertid redusert med en faktor $(\frac{\rho - \rho' g}{\rho + \rho' k})^{\frac{1}{2}}$ i forhold til fasehastigheten for overflatebølger. De tetthetsforskjeller som opptrer i naturen er som regel svært små, og det betyr at de interne bølgene beveger seg meget sakte i forhold til overflatebølger. Det kan ofte være hensiktsmessig å innføre en redusert tyngdeakselerasjon definert ved

$$g^* = \varepsilon g$$



Figur 9.12: Indre bølger generert av båt.

hvor $\varepsilon = 2(\rho - \rho')/(\rho + \rho')$ betegner den relative tetthetsforskjellen mellom lagene. Fasehastigheten kan derved skrives

$$c = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{g^*}{k}} \quad (9.20)$$

En tolags modell med et overflatelag av tykkelse h og et bunnlag med tykkelse H vil i mange tilfeller representere forholdene i havet eller i innsjøer når det er et velutviklet sprangsjikt. Vanligvis er overflatelaget relativt tynt ($h \ll H$), og typiske verdier for ε ligger omkring 10^{-2} i fjorder (fersk vann over salt sjøvann) og 10^{-3} i dype innsjøer i sommerhalvåret. I en slik tolags modell vil det opptre både overflatebølger og interne bølger. Dersom bølgelengden er relativt kort $\lambda < 2h$, vil overflatebølger bare føre til ubetydelige forstyrrelser av skilleflaten mellom de to lagene. Likeledes vil bølger på skilleflaten bare føre til små forstyrrelser av overflaten. Grunnen til dette er at bevegelsen avtar eksponentielt i vertikalretningen slik at når $\lambda < 2h$ vil hastigheten være redusert med en faktor 0.04 eller mindre over en distanse h . For korte bølger $\lambda < 2h$ vil derfor fasehastigheten for overflatebølger og interne bølger med god tilnærming være gitt ved (9.16) og (9.19). De indre bølgene kan lett genereres for eksempel av et skip, og disse bølgene kan være tilstede uten at det er merkbare forstyrrelser på overflaten. For å generere bølgene kreves energi, og skipet vil derfor bli utsatt for en ekstra motstandskraft som synes å opptre uten noen påviselig årsak. Dersom bølgelengden er så stor at en må ta hensyn til væskelagenes tykkelse, vil regningen bli mer omstendelig enn i det tilfellet som vi har behandlet her. Det byr imidlertid ikke på noen prinsipielle vanskeligheter å finne bevegelsen også i dette tilfellet. Når bølgelengden er meget større enn vanddypet, kan en regne at trykket er hydrostatisk, og vi skal bare gi noen resultater som gjelder under denne forutsetning. Vi har også forutsatt at bølgeamplituden er så liten at likningene kan lineariseres. Dersom A betegner bølgeamplituden ved skilleflaten mellom de to lagene, vil en finne at

$$\frac{a}{A} = \frac{\varepsilon}{1 + \frac{h}{H}}$$

De interne bølgene som er knyttet til tetthetssjiktningen vil altså fortsatt føre til meget små forstyrrelser på overflaten. Fasehastigheten for de interne bølgene

er

$$c = \sqrt{\frac{\varepsilon gh}{1 + \frac{h}{H}}}$$

Foruten de interne bølgene vil det kunne oppptre 'rene' overflatebølger som er nærmest upåvirket av tetthetssjiktningen. Hastighetsfeltet og partikkelbevegelsen for disse bølgene vil være omtrent som for lange bølger i et homogent væskelag, og fasehastigheten er

$$c = \sqrt{g(h + H)}$$

Fasehastigheten for overflatebølgene er altså meget større enn fasehastigheten for de interne bølgene.

9.9 Gruppehastighet

I det foregående har vi studert egenskapene ved bølgetog som består av en harmonisk bølgekomponent, og vi har bestemt fasehastigheten for slike bølgetog. En bølgegruppe består som før nevnt av flere bølgekomponenter, og dersom bølgene er dispersive, så vil en bølgegruppe bevege seg med en hastighet som avviker fra fasehastigheten for bølgekomponentene som bølgene er sammensatt av. For å demonstrere dette skal vi betrakte bølgegruppen som fremkommer ved å addere to bølgekomponenter med samme amplitude, men med litt forskjellig bølgelengde og frekvens. Vi innfører for enkelhetsskyld vinkelhastigheten som er definert ved $\omega = kc$ og lar de to bølgekomponentene være uttrykt ved

$$\eta_1 = \frac{1}{2}a \sin[(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t]$$

og

$$\eta_2 = \frac{1}{2}a \sin[(k - \Delta k)x - (\omega - \Delta\omega)t]$$

hvor $2\Delta k$ og $2\Delta\omega$ er henholdsvis forskjellen i bølgetall og vinkelhastighet. Vi adderer de to bølgekomponentene, og ved hjelp av formelen for summen av to sinusfunksjoner kan vi skrive

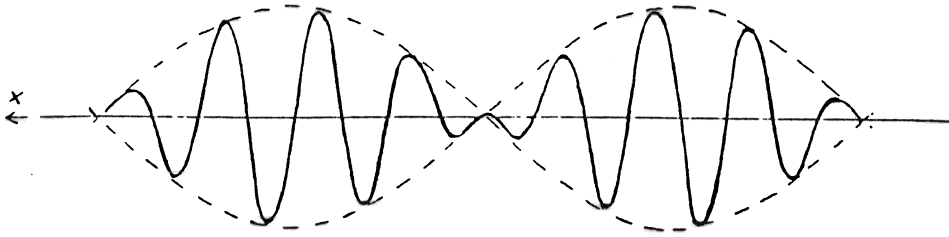
$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = a \cos \Delta k \left(x - \frac{\Delta\omega}{\Delta k} t \right) \sin k(x - ct)$$

Dette viser at η er et amplitudemodulert bølgetog som består av en serie av bølgegrupper slik som antydnet på figur 9.13. De individuelle bølgene i gruppene vil forplante seg med fasehastighet c mens selve gruppene vil forplante seg med *gruppehastigheten* som er gitt ved

$$c_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \cong \frac{d\omega}{dk}$$

Setter vi $\omega = ck$ og deriverer, får vi

$$c_g = c + k \frac{dc}{dk}$$



Figur 9.13: Bølgegrupper.

For ikke dispersive bølger er $\frac{dc}{dk} = 0$ og $c_g = c$. Dersom bølgene er dispersive, vil derimot gruppehastigheten være forskjellig fra fasehastigheten. For overflatebølger finner vi at

$$c_g = c$$

For lange bølger på grunt vann og

$$c_g = \frac{1}{2}c$$

for bølger på dypt vann.

9.10 Øvingsoppgaver

1. a) Sett opp kontinuitets- og bevegelses-likning for et kompressibelt fluid når det ikke virker volumkrefter.

For hørbar lyd vil tilstandsendringene med god tilnærming kunne regnes som isentropiske slik at vi har en barotropi-relasjon

$$\varrho = \varrho(p)$$

(I luft kan vi f.eks. sette $p/\varrho^\gamma = C$ der C er en konstant og $\gamma = 1.4$).
Bruk dette til å eliminere tettheten i grunnlikningene.

- b) Anta at lydbølgen gir små tre-dimensjonale perturbasjoner $(p', \varrho', \mathbf{v}')$ omkring likevekts-tilstanden $p = p_0$, $\varrho = \varrho_0$ og $\mathbf{v} = 0$. Sett $p = p_0 + p'$ osv. inn i grunnlikningene og lineariser. Vis at trykk-perturbasjonen oppfyller bølgelikningen og at hastighetspotensialet φ for forstyrrelsen oppfyller samme likning der

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_0 = 1 / \left(\frac{\partial \varrho}{\partial p} \right)_0$$

$()_0$ refererer seg til likevektstilstanden (ϱ_0, p_0) .

- c) Anta at lydbølgen brer seg kulesymmetrisk ut i rommet fra en lyd-kilde. Ved kulesymmetri har vi

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right)$$

der r er avstanden fra et rompunkt til kilden. Vis at bølgelikningen har løsning på formen

$$p' = \frac{1}{r} \{f(r - ct) + g(r + ct)\}$$

hvor f og g er en vilkårlige funksjoner. Hvordan varierer amplituden sammenlignet med en plan lydbølge?

- d) Anta at trykkperturbasjonen er et utgående sinusoidalt bølgetog med frekvens ω . Hva blir perioden og bølgelengden?

Amplituden for $r = r_0$ er \hat{p} . Sett opp et eksplisitt uttrykk for trykkfeltet i fluidet der ω inngår.

2. Et rom i et hus har lengde L , bredde B og høyde H . Et stereoanlegg genererer lydbølger, dvs. trykkperturbasjoner $p(\mathbf{r}, t)$. Vi antar at rommet ikke inneholder noen møbler og at stereoanlegget er innebygget i veggen slik at rommets form er eksakt lik en boks med dimensjoner $L \times B \times H$.

- a) Sett opp randbetingelsen for hastighetsperturbasjonen på rommets begrensingsflater. Vis ved hjelp av bevegelseslikningen at den normalderiverte av trykket må være null på rendene.

- b) Sett opp et randverdiproblem for de tre-dimensjonale trykkperturbasjonene $p(x, y, z, t)$. Vi ser bort fra initialbetingelsene.

- c) Vi setter

$$p(x, y, z, t) = \cos \omega t \cos k_x x \cos k_y y \cos k_z z$$

Aksene plasseres slik at $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq B$ og $0 \leq z \leq H$.

Vis at bare bestemte verdier av k_x , k_y og k_z er tillatt. Forklar at lydbølgene vil være stående bølger. Hvilke verdier av ω er tillatt?

- d) Rommet har dimensjoner $L = 3\text{m}$, $B = 3\text{m}$ og $H = 2.20\text{m}$. Finn de 3 laveste vinkelfrekvensene som kan representeres i rommet. Finn også de tilsvarende frekvensene $\omega/2\pi = 1/T$. Gi svaret i antall Hertz (Hz=1/s).

Lydhastigheten i rommet kan settes til 341 m/s.

- e) En moderne kirke med samme form som rommet over skal innstallere et stort orgel som kan produsere toner ned til 20Hz. Hvor stor må den største av dimensjonene L , B , og H da være for at tilhørerne skal ha mulighet til å høre den laveste orgeltonen?

Kommentar: Et generelt lydsignal i rommet vil være sammensatt av alle de lovlige frekvensene:

$$p = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \cos \omega_{mnl} t \cos \frac{\pi}{L} m x \cos \frac{\pi}{B} n y \cos \frac{\pi}{H} l z$$

Avstanden mellom frekvensene avtar ettersom m , n og l øker. I virkeligheten vil møbler, tapet etc. føre til at gjengivelsen av det lave frekvensområdet blir dårligere enn hva vi har regnet ut i denne oppgaven.

3. Vi betrakter en plan lydbølge

$$p(x, y, t) = a \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

som reflekteres fra en vegg. $\mathbf{k} = k_0(\cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j})$ der \mathbf{i} og \mathbf{j} er enhetsvektorer i et kartesisk koordinatsystem. p betegner trykkperturbasjonen i mediet. a og ω er konstanter. Vi regner med at det reflekteres en plan bølge fra veggen $x = x_0$, men med en annen forplantningsretning. p kan da skrives

$$p(x, y, t) = a \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) + a \cos(\mathbf{l} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

hvor $\mathbf{l} = l(\cos \beta \mathbf{i} + \sin \beta \mathbf{j})$.

Vis vha. bevegelses-likningens x -komponent og randbetingelsen for hastigheten ved $x = x_0$ at

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad x = x_0$$

Vis at denne betingelsen gir

$$\beta = \pi - \alpha$$

Illustrer dette resultatet på en figur.

4. Overflatebølger i fluider kan beskrives ved et tre-dimensjonalt hastighetspotensial $\varphi(x, y, z)$. Dersom bølgelengden λ er stor i forhold til dypet H , kan en formulere et alternativt likningssett der alle størrelser kun avhenger av horisontal-koordinatene (x, y) . Dette likningssettet er mye enklere å arbeide med sammenlignet med randverdiproblemet for hastighetspotensialet. Formålet med denne oppgaven er å utlede det alternative likningssettet. Utledningen foretas enklest ved å gå ut fra den primitive formen av bevegelseslikningen og kontinuitetslikningen.

a) I dette punktet skal vi innføre antagelsen om lange bølger i den generelle bølgeløsningen for φ og se hvilke forenklinger i løsningen dette medfører.

Sett opp hastighets- og trykkfeltet svarende til en overflateheving

$$\eta = a \cos k(x - ct)$$

Bevegelsen er hvirvelfri, og dypet er H (konstant). Sett også opp sammenhengen mellom fasehastigheten og bølgetallet.

Vis at dersom $kH \ll 1$ har vi

- (i) $c \approx \sqrt{gH}$
- (ii) $w \ll u$ (sammenlign bare amplituder)
- (iii) $\partial u / \partial z \ll \partial u / \partial x$ (sammenlign bare amplituder)
- (iv) $p \approx p_0 + \rho g(\eta - z)$ (dvs. hydrostatisk trykk)

b) Vi skal nå utlede et forenklet likningssett for tilfellet $kH \ll 1$ der vi tar hensyn til resultatene under a), dvs. vi setter $u = u(x, t)$ og $p = p_0 + \rho g(\eta - z)$.

- (i) Sett opp de eksakte grense-flate-betingelsene for u , w , η og p ved bunnen og ved overflaten.
- (ii) Sett opp x -komponenten av bevegelseslikningen, og vis at denne, linearisert og med hydrostatisk trykk som i a), gir

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

- (iii) Sett opp kontinuitets-likningen, integrer denne fra bunnen $z = -H$ til overflaten $z = \eta$ og benytt grense-flate-betingelsene for å vise at

$$\frac{\partial}{\partial x} \{u(H + \eta)\} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

Lineariser og vis at vi får

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -H \frac{\partial u}{\partial x}$$

- (iv) Alternativt kan (1) utledes ved direkte oppsetting av et masse-regnskap i en væskekolonne

$$\Omega = \{x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x, -H \leq z \leq \eta(x, t)\}$$

- (A) Vis at netto innstrømmet væskemasse i Ω i tiden Δt kan uttrykkes

$$\left[\{u(H + \eta)\}_{x_0} - \{u(H + \eta)\}_{x_0 + \Delta x} \right] \Delta t$$

- (B) Siden væsken er inkompressibel, må netto innstrømning føre til heving av overflaten. Vis at i tiden Δt øker volumet til Ω med

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} \Delta t \Delta x$$

- (C) Vis at vi får

$$\frac{\partial}{\partial x} \{u(H + \eta)\} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0.$$

5. Hvis en bølge η kan separeres i tid og rom slik at

$$\eta = T(t)X(x)$$

kaller vi bølgen en stående bølge. X og T er typisk sinusoidale, f.eks. $\eta = A \sin \omega t \sin kx$. Nullpunktene x_n til X kalles *noder*. I nodepunktene er η alltid null.

Ved stående bølger vil hvert punkt på overflaten svinge med samme frekvens, men ha x -avhengig amplitude. I motsetning til bølgetog ($\eta = a \sin k(x - ct)$) har en stående bølge ingen fasehastighet. Bølgelengden er bestemt av X .

- a) Vis at en stående bølge kan fremkomme som superposisjon av to bølgetog med samme frekvens og bølgelengde, men med motsatt forplantningsretning.

(Hint: Benytt formelen for sinus til summen av to vinkler.)

- b) Vi har et kar med konstant dyp h og lengde L , $L \ll h$. Ved tiden $t = 0$ er overflaten η i ro og har formen

$$\eta(x, 0) = a \cos \frac{2\pi}{L}x, \quad 0 < x < L$$

der $a \ll h$.

- (i) Vi antar at bølgelengden er tilstrekkelig lang i forhold til dypet slik at trykket kan regnes som hydrostatisk (jfr. oppgave 4). η oppfyller da bølgelikningen med bølgehastighet \sqrt{gh} og randbetingelser $\partial\eta/\partial x = 0$ på sideveggene $x = 0, L$.

Sett $\eta = T(t) \cos \frac{2\pi}{L}x$ og finn $T(t)$.

- (ii) Vi spesifiserer nå ikke initialbetingelsen og setter

$$\eta = X(x) \cos \omega t$$

Vis at dette er en mulig løsning av bølgelikningen og de romlige randbetingelsene dersom

$$X(x) = K \sin \left(\frac{\pi}{L}nx \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

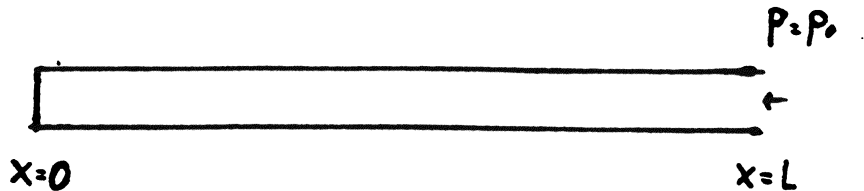
K er en konstant. Hva blir bølgelengden? Hvilke verdier av vinkelfrekvensen ω er tillatt?

Kommentar: Dersom initialbetingelsen er gitt ved $f(x)$, kan en sette η som en sum av alle de "lovlige" sinusbølgene $\sin(\pi nx/L)$:

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sin \left(\frac{\pi}{L}nx \right) \cos(\sqrt{gh} \frac{n\pi}{L}t)$$

Konstantene K_n kan tilpasses til initialbetingelsen ved Fourier-rekke utvikling.

6. Vi har en orgelpipe med lengde L , se figur. I den ene enden ($x = 0$) er pipen tett mens pipen er åpen (i kontakt med luft ved trykk $p = p_0$) i $x = L$. Ved å blåse luft inn i pipen settes det opp lydølger. Vi skal ikke ta hensyn til hvordan denne innblåsningen skjer, men bare konstatere at luften i pipen gis en forstyrrelse som gir opphav til lydølger.



Anta at bølgene er plane slik at alle størrelser er funksjoner av kun x og tiden t . Trykket skrives $p = p_0 + p'$ der p_0 er konstant (likevektstrykket) og p' er trykkperturbasjonen. Vi lar u betegne hastighetsperturbasjonen (hastigheten svarende til $p = p_0$ er null). Strømningen antas å være isentropisk slik at $\varrho = \varrho(p)$.

- a) Utled at trykkperturbasjonen oppfyller

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}$$

der c er lydhastigheten i luft (ved den temperaturen som luften i pipen har).

- b) Anta at relasjonen mellom trykk og tetthet er gitt som

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{konst.} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma}$$

Vis at $c = \sqrt{\gamma RT_0}$ der R er gasskonstanten og T_0 er temperaturen ved likevekt. Det antas at luft er en ideal gass med tilstandslikning $p = \rho RT$.

- c) Forklar at vi må ha

$$\begin{aligned} u &= 0 & x &= 0 \\ p' &= 0 & x &= L \end{aligned}$$

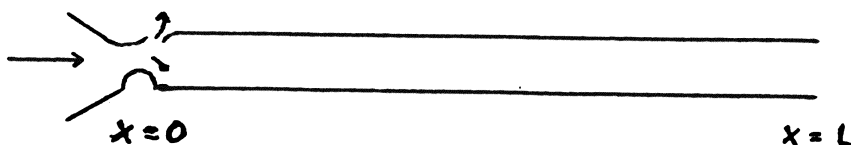
Når vi skal finne p' ved å løse bølgelikningen i (a), trenger vi randbetingelser i $x = 0, L$ der bare p' inngår. Vis ved hjelp av bevegelseslikningen at grenseflate-betingelsene ved $x = 0$ kan skrives $\partial p' / \partial x = 0$.

- d) Anta $p = p_0 + X(x) \cos \omega t$. Finn X og vis at bare et sett diskrete verdier av ω er tillatt.
- e) Vis at den laveste vinkelfrekvensen er

$$\omega_0 = c \frac{\pi}{2L}$$

Denne vinkelfrekvensen kalles *grunntonen*, og i musikkinstrumenter er det som oftest grunntonen som har størst amplitude. De andre verdiene av ω gir opphav til *overtoner*. Det totale klangbildet til et musikkinstrument avhenger av amplitudeforholdet mellom de forskjellige ω -verdiene.

- f) Vi definerer *frekvensen* f som $f = 1/T$ der T er bølgeperioden. Finn sammenhengen mellom f og ω . f måles i Hertz, $\text{Hz} = 1/\text{s}$. Temperaturen i orgelpipen er 15°C . Finn den tilsvarende verdi av c . Vis at orgelpipen må ha lengde $L = 4,26\text{m}$ for å kunne gjengi en grunntone på 20Hz .
- g) Mange orgelpiper er åpne i den ene enden ($x = L$) mens det blåses luft inn den andre enden ($x = 0$).



Vi antar at $p \approx p_0$ i enden $x = 0$. Vis at orgelpipen nå må være 8,52m lang for å kunne gjengi en tone på 20Hz ved en temperatur $15^\circ C$.

7. Vis at i en to-dimensjonal isentropisk strømning der $\rho = \rho(p)$ så kan bevegelses- og kontinuitets-likningen kombineres til

$$\frac{\partial u}{\partial x} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) + \frac{\partial v}{\partial y} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{uv}{c^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0$$

der $c^2 = \partial p / \partial \rho$.

I resten av denne oppgaven antar vi at væsken er en ideal gass slik at

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{konst.}, \quad c = \frac{\gamma p}{\rho}.$$

Anta så at strømningen er hvirvelfri og at \mathbf{v} består av små perturbasjoner av en grunnstrøm $U_0 \mathbf{i}$ slik at vi kan sette

$$\mathbf{v} = U \mathbf{i} + \nabla \varphi(x, y)$$

der de deriverte av φ er små i forhold til U_0 . Vis at lineært har vi da følgende likning til å bestemme φ :

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

hvor M er Mach-tallet

$$M = \frac{U_0}{c_0}$$

c_0 er verdien av c der perturbasjonene er null.

Klassifiser likning (2) som hhv. hyperbolsk og parabolisk. Under hvilke forutsetninger reduserer (2) seg til likningen for *inkompressibel* potensialstrøm?

Sett opp Bernoullis likning (husk at $p = p(\rho)$!) og vis at

$$\frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 = \frac{c_0^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} U_0^2$$

og uttrykk c ved hjelp av c_0 (lineært).

Kommentar: Når $M \approx 1$ (*transonisk strøm*), kan ikke de ikke-lineære leddene sløyfes. Likning (2) gjelder derfor bare når M er tilstrekkelig forskjellig fra 1.

Kapittel 10

Strømning med friksjon

10.1 Newtons friksjonslov. Navier-Stokes likning

Til nå har vi behandlet strømningsfenomenet i friksjonsfrie fluider hvor det ikke opptrer andre spenninger enn det isotrope trykket. Selv om ingen væske eller gass kan betraktes som fullstendig friksjonsfri, har det vist seg at den friksjonsfrie beskrivelsen er en brukbar modell for mange strømninger. Det er imidlertid overmåte viktig å kjenne begrensninger, og for å få en forståelse av dette skal vi se på noen tilfeller hvor friksjonen har en vesentlig innvirkning på bevegelsen.

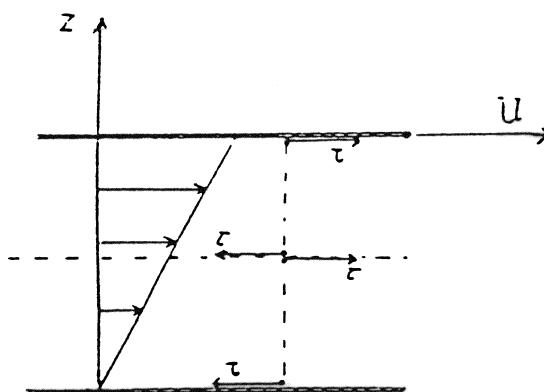
Dersom et sylinderformet kar med væske settes i rotasjon (med konstant vinkelhastighet) om sin akse, så vil vi se at væsken trekkes gradvis med i rotasjonen, og etter en viss tid vil væsken og karet rotere som et fast legeme. Den bevegelsen som oppstår i væsken kan bare forklares ved at det opptrer friksjonskrefter som er rettet tangensielt den flaten de virker på. Vi innser dette fordi endringen av spinnmomentet av væsken må skyldes spenninger langs sylinderflaten som har et moment med hensyn på rotasjonsaksen. La oss studere et annet forsøk hvor en setter et væske- eller gasslag mellom to parallelle plater i bevegelse ved at den øvre platen trekkes med konstant hastighet U i lengderetningen (x -retningen) mens den nedre platen holdes i ro. Det er ingen trykkgradient i x -retningen. Forutsatt at U ikke er for stor, vil en i alminnelige væsker og gasser få utviklet en retlinjet og stasjonær skjærstrøm hvor hastigheten er

$$u = U \frac{z}{h}$$

og h er avstanden mellom platene. Hastigheten vil altså tilta lineært fra den nedre platen hvor den er null, til den øvre platen hvor den er U . For å dra platen trengs det en kraft, og eksperiment viser at kraften pr. flateenhet er proporsjonal med hastighetsgradienten $\frac{du}{dz}$. Ved den øvre platen virker det altså en tangensialspenning eller *skjærspenning* på fluidet rettet i x -retningen. Størrelsen på skjærspenningen er

$$\tau = \mu \frac{du}{dz} = \mu \frac{U}{h} \quad (10.1)$$

hvor μ er en proporsjonalitetsfaktor som avhenger av mediets fysikalske egenskaper. Denne skjærspenningen overføres gjennom mediet slik at det på enhver

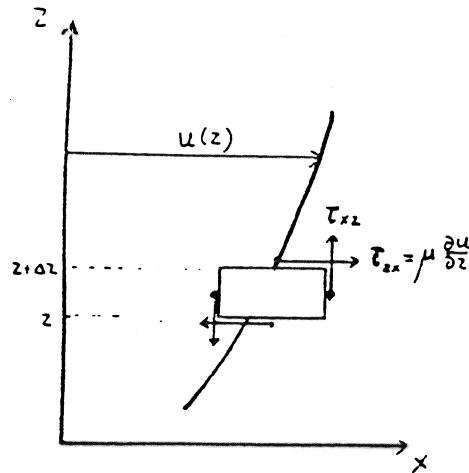


Figur 10.1: Skjærstrøm mellom to plater.

flate normalt z -aksen virker en skjærspenning av samme størrelse. Ved en tenkt flate normalt z -aksen (se figur 10.1) må fluidet over flaten virke på fluidet under flaten med skjærspenningen τ i x -retning, mens fluidet under flaten virker med en like stor og motsatt rettet skjærspenning på fluidet over flaten. På denne måten vil resultantkraften på et hvert lag av fluidet være null og bevegelsen vil forbli stasjonær.

Årsaken til skjærspenningen er å finne i molekylstrukturen i mediet. I gasser hvor den midlere avstand mellom molekylene er stor slik at bindingskreftene er små, skyldes skjærspenningene vesentlig transport av bevegelsesmengde på grunn av molekylbevegelsen. I den skjærstrømmen som vi betrakter her, vil molekylene som beveger seg i negativ z -retning i middel bringe med seg større bevegelsesmengde i x -retning enn de molekylene som beveger seg i positiv z -retning. Endringene i bevegelsesmengde som derved oppstår innefor et avgrenset volum vil kunne tolkes som en *flatekraft* (se kapittel 1) på volumets begrensingsflater. I væsker er forholdene mer komplisert fordi den midlere avstand mellom molekylene er så liten at bindingskreftene mellom molekylene er viktige. I dette tilfellet skyldes skjærspenningene hovedsaklig disse kreftene. Spenninger som på denne måten oppstår på grunn av molekylstrukturen i mediet, virker som en *indre friksjon*, og denne spesielle formen for friksjon i fluidet blir betegnet *viskøs friksjon*, og de tilhørende spenningene kalles *viskøse spenninger*. Å sette den viskøse skjærspenningen proporsjonal med hastighetsgradienten viser seg å være en meget god tilnærming for de fleste vanlige væsker og gasser. Selv om de molekylære mekanismer som bestemmer friksjonen ikke er den samme i gasser og væsker, kan altså det samme matematiske uttrykk for friksjonsspenningene brukes i de to medier. Denne lineære relasjonen mellom spenning og hastighetsgradient blir kalt *Newtons friksjonslov*, og proporsjonalitetsfaktoren μ er den dynamiske viskositetskoeffisienten. Den er en egenskap ved mediet og avhenger av temperatur og i liten grad av trykk slik at trykkavhengigheten som regel kan neglisjeres. Viskositetskoeffisienten, μ , har dimensjon masse pr. lengde- og tidsenhet, og enheten i SI-systemet er kg/ms.

Vi skal nå se på kraften på et volumelement i en rettlinjert skjærstrøm hvor strømhastigheten u er en vilkårlig funksjon av z . Sidekantene i volumelementet



Figur 10.2: *Krefter på et væskeelement.*

er Δx , Δy og Δz . På sideflatene normalt z -aksen virker det skjærspenninger i x -retning slik som angitt på figur 10.2. På sideflatene normalt x -aksen virker det også skjærspenninger rettet langs z -aksen slik som angitt på figuren. Vi innfører betegnelsen

$$\tau_{zx}$$

for en skjærspenning i x -retningen på en flate normalt z -aksen. Første indeks står altså for flatenormalen og andre indekset står for spenningens retning. På tilsvarende måte vil

$$\tau_{xz}$$

betegne spenningen i z -retning på en flate normalt x -aksen. Det kan vises at i et punkt i mediet så er

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

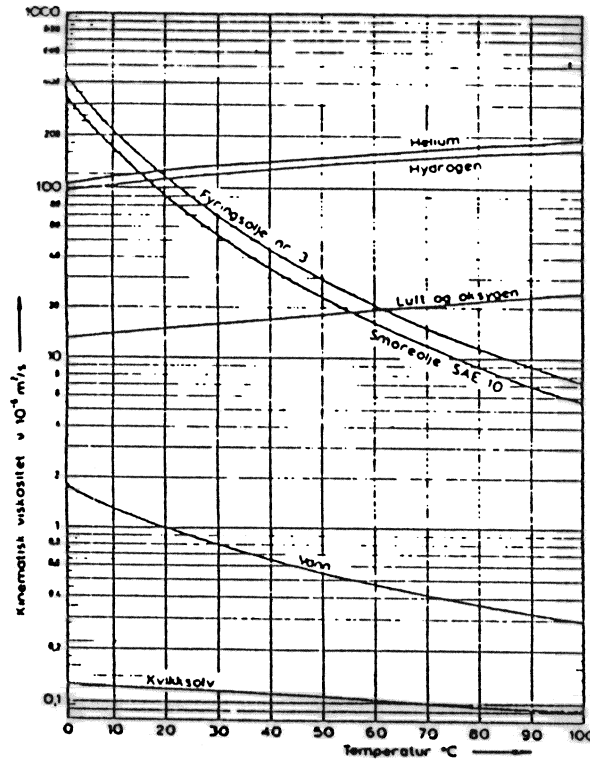
Vi skal ikke gå nærmere inn på de utledninger som fører til dette resultatet fordi dette blir behandlet inngående i kurset ME 105. Her skal vi nøye oss med å finne resultanten av de viskøse spenningene som virker på elementet i x -retning. Vi har at resultantkraften er

$$\mu \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y - \mu \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_z \Delta x \Delta y \simeq \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Delta x \Delta y \Delta z = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Delta \tau$$

hvor $\Delta \tau$ er volumet av elementet. Siden massen av elementet er $\rho \Delta \tau$ så er kraften pr. masseenhet i x -retning

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

hvor konstanten $\nu = \mu/\rho$ er den kinematiske *viskositetskoeffisienten*. Dimensjonen for den kinematiske viskositetskoeffisienten er flateareal pr. tidsenhet og



Figur 10.3: Den kinematiske viskositetskoeffisient som funksjon av temperaturer for noen væsker og gasser.

enheten i SI systemet er m^2/s . Dersom det foruten strømskjær i z -retningen også er et strømskjær i y -retning slik at u er en funksjon av både z og y , så vil det opptre viskøse skjærspenninger i x -retning på de sideflatene som er normalt y -aksen. På samme måten som foran vil vi finne at resultantkraften pr. masseenheter av disse spenningene er

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

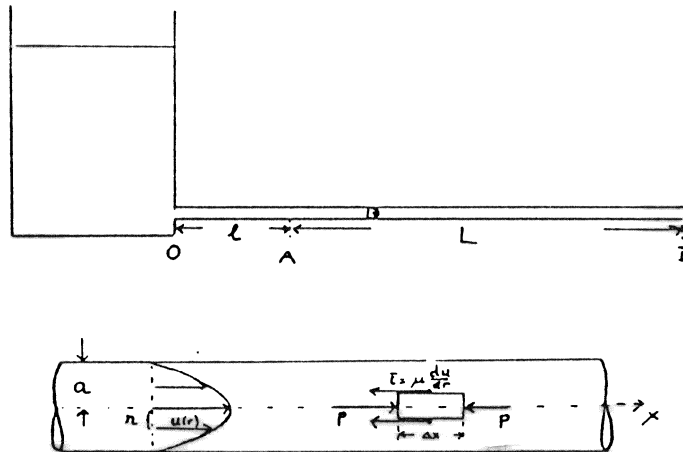
På tilsvarende måte vil en strømvariasjon i x -retningen lede til en resultantkraft på elementet i x -retning og for en inkompressibel væske kan det vises at kraften pr. masseenheter er

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

For en vilkårlig strømprofil vil resultatanten av de viskøse spenninger i x -retning være

$$f_{\text{frik}} = \nu \nabla^2 u$$

På tilsvarende måte vil en finne analoge uttrykk for de viskøse spenningen i y - og z -retning dersom strømhastigheten har komponenter i y - og z -retning. Den



Figur 10.4: Utstrømning fra tank gjennom sirkulært rør.

totale kraft pr. masseenhet som virker på elementet er derfor

$$\mathbf{f}_{\text{frik}} = \nu \nabla^2 \mathbf{v}$$

Setter vi dette uttrykket for friksjonskraften inn i bevegelseslikningen (2.13) får vi

$$\frac{D\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}_v \quad (10.2)$$

hvor \mathbf{f}_v som før betegner eventuelle volumkrefter. Likningen (10.2) kalles *Navier-Stokes likning*, og slik den her er skrevet gjelder den for en inkompressibel viskøs væske. Diagrammet i figur 10.3 viser den kinematiske viskositetskoeffisienten ν for noen fluider som funksjon av temperaturen. Som det fremgår av figuren avtar ν med økende temperatur for væsker, mens det motsatte er tilfellet for gasser. Som vi har nevnt er den molekylære mekanisme som bestemmer friksjonen forskjellig i væsker og gasser. Men bindingskreftene mellom molekylene avtar med økende temperatur, vil molekylhastigheten øke. Dette er forklaringen på at ν varierer med temperaturen på forskjellig måte for væsker og gasser.

10.2 Laminær rørstrøm og grensesjiktstrøm

Med *laminær strøm* mener vi en regelmessig lagdelt strømningstilstand hvor de forskjellige lagene beveger seg ved siden av hverandre uten at det foregår blanding.

Vi skal her betrakte to laminære strømningstilstander hvor viskositeten har en dominerende innflytelse på bevegelsen. Det første tilfellet er trykkdrevet strøm i et sirkulært horisontalt rør. Når for eksempel en væske strømmer ut fra en stor tank gjennom et tilstrekkelig tynt og langt rør, utvikler det seg en rettlinjert og tilnærmet stasjonær strømningstilstand i en viss avstand (l) fra utløpet (0) fra tanken. I den delen av røret ($A - B$) hvor den rettlinjerte strømningstilstanden

er velutviklet, viser det seg at det er et konstant trykkfall i rørets lengdeakse (x -aksen). Trykkfallet pr. lengdeenhet er

$$\beta = \frac{p_2 - p_1}{L}$$

hvor p_2 og p_1 er trykket henholdsvis ved A og B , og L er avstanden AB .

Vi forutsetter at røret er horisontalt, og at trykket og de viskøse spenningsene er de eneste kreftene som virker på væsken i x -retning, og vi antar at strømhastigheten bare er avhengig av r som er avstanden fra rørets akse. Strømprøfilen kan nå bestemmes enten ved å integrere Navier-Stokes likning eller ved å betrakte kreftene på et volumelement av form som en sirkulær sylinder med x -aksen som symmetriakse. Vi betegner lengden av elementet med Δx og radius er r . Siden strømmen er stasjonær, må trykk-krefter og friksjonskrefter som virker på elementet balansere hverandre, og vi har

$$-2\pi r \Delta x \mu \frac{du}{dr} = \pi r^2 \beta \Delta x$$

Derav følger

$$\frac{du}{dr} = -\frac{\beta}{2\mu} r$$

Integrerer vi denne likningen og benytter at $u = 0$ ved rørveggen, får vi

$$u = U \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$$

hvor

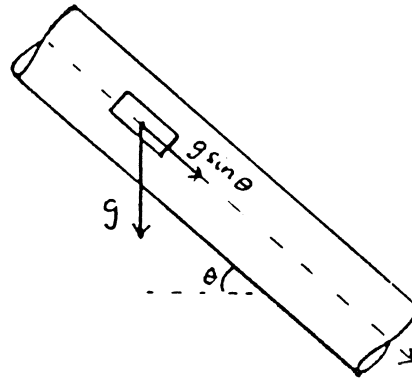
$$U = \frac{\beta a^2}{4\mu}$$

Strømprøfilen er altså parabolisk og maksimumshastigheten, U , opptrer i midten av røret. Volumstrømmen (pr. tidsenhet) gjennom røret er

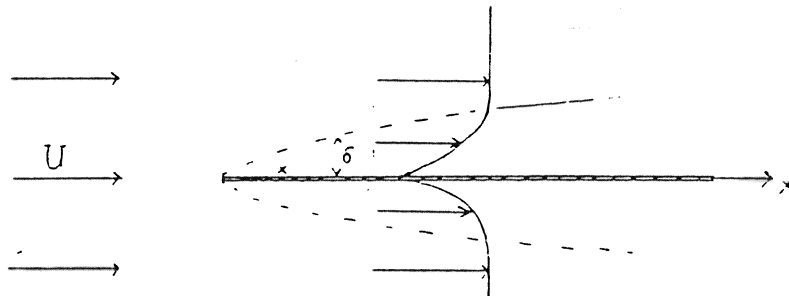
$$Q = \int_0^a u 2\pi r dr = \frac{\pi a^2}{2} U = \frac{\pi a^4 \beta}{8\mu} \quad (10.3)$$

Det paraboliske strømprøfilet blir kalt *Hagen-Poiseuille strøm* etter tyskeren Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen (1797-1884) og franskmannen Jean Léon Marie Poiseuille (1799-1869) som omkring 1840 kom fram til formelen (10.3) hovedsaklig på grunnlag av eksperimentelle undersøkelser. Dersom røret har en helning i forhold til vertikalen, må man ta hensyn til tyngdekraften som vil bidra til å drive strømmen. Også i dette tilfellet vil den stasjonære strømprøfilen bli parabolisk. Det er ikke vanskelig å vise dette, og det overlates til leseren. Uttrykkene for maksimumshastigheten U og volumstrømmen Q vil få samme form som for rent trykkdrevet strøm bortsett fra at β er erstattet med

$$\beta' = \beta + \rho g \sin \theta \quad (10.4)$$



Figur 10.5: Strøm i rør med helning.



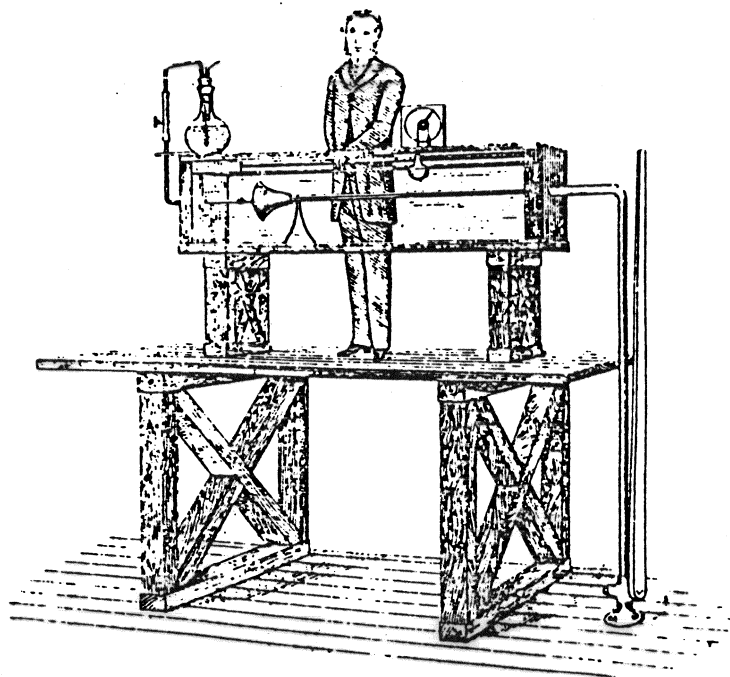
Figur 10.6: Grensesjikt ved plate.

hvor θ er rørets helningsvinkel med vertikalen, og g er tyngdens akselerasjon. Vi legger merke til at tyngdekraften vil kunne drive en strøm mot økende trykk ($\beta < 0$) dersom $\rho g \sin \theta > |\beta|$.

Det andre tilfellet som vi skal betrakte er en uniform strøm, U , mot en flat stillestående plate som er orientert langs strømretningen. I en sone nær platen vil viskositeten ha en dominerende innflytelse på strømprofilen. Strømhastigheten vil øke fra null ved platen og nærme seg U ved utkanten av sonen. Lengre ute fra platen er strømmen upåvirket. Denne sonen kalles *grensesjiktet*, og tykkelsen av grensesjiktet øker gradvis nedover langs platen. Ved hjelp av Navier-Stokes likning kan man finne grensesjikttykkelsen δ som funksjon av avstanden, x , fra forkanten av platen. Det viser seg at

$$\delta = 5.0 \left(\frac{\nu x}{U} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (10.5)$$

Dette resultatet er også blitt bekreftet ved eksperiment. For luft og vann hvor viskositeten er meget liten, er grensesjiktet meget tynt selv for forholdsvis lange plater. Ved en strømhastighet på 50 km/t er grensesjikttykkelsen i luft omkring 1 cm så langt som 3 m fra spissen av platen. I vann med strømhastighet på 5 m/s er grensesjikttykkelsen omkring 0.2 cm i en avstand 0.6 m fra spissen av platen. At friksjonens innflytelse er begrenset til smale grensesjikt, er en erkjennelse av overordentlig stor betydning for praktiske anvendelser, og det betyr at man



Figur 10.7: Originaltegning av Reynolds forsøksapparat.

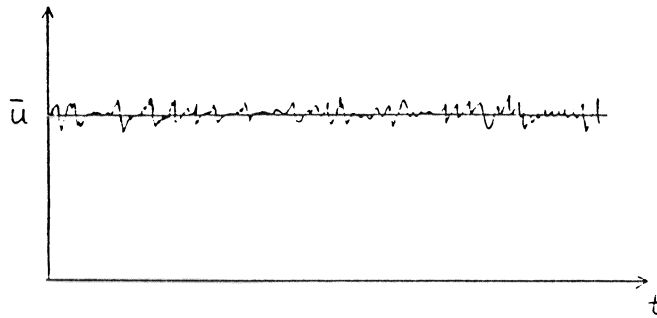
utenfor grensesjiktet kan regne strømmen som friksjonsfri. Grensesjiktbegrepet ble introdusert omkring 1904 av den tyske vitenskapsmann Ludwig Prandtl (1875-1953).

10.3 Turbulent strøm

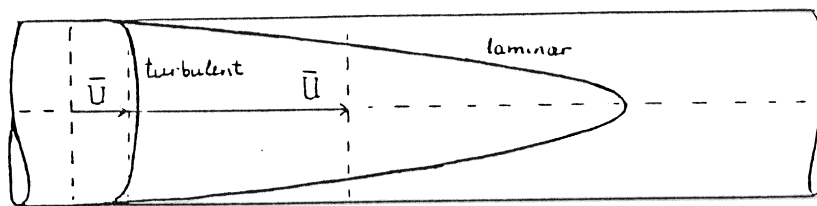
Den engelske fysikeren Osborne Reynolds (1842-1912) utførte forsøk med trykkdrevet væskestrøm i rør. En kopi av originaltegningen av forsøksapparatet fra Reynolds klassiske avhandling som ble publisert i 1883 er gjengitt på figur 10.7. Reynolds fant at det bare var mulig å oppnå laminær strømning for forholdsvis lave strømningshastigheter. For større strømningshastigheter oppsto det forstyrrelser i strømmen, og for store strømhastigheter ble strømmingen meget uregelmessig, og strømlinjene gikk om hverandre i et kaotisk mønster. Dette er også senere blitt bekreftet ved tallrike forsøk. Om man måler strømhastigheten i rørets lengderetning, viser det seg at strømmen flukturerer på en irregulær måte omkring en midlere verdi \bar{u} slik som antydnet på figur 10.8. Denne kaotiske strømmingstilstanden blir betegnet *turbulent strøm*. Det har vist seg at strømmingstilstanden er karakterisert ved det dimensjonsløse *Reynoldstallet*

$$Re = \frac{\bar{U}d}{\nu} \quad (10.6)$$

hvor $d = 2a$ er rørdiametren og \bar{U} er middelhastigheten som er volumstrømmen Q dividert med tverrsnittsarealet av røret. Dersom Reynoldstallet er lavere enn en kritisk verdi $(Re)_{\text{krit}}$ så er strømmen laminær. For Reynoldstallet større enn



Figur 10.8: Turbulente fluktuasjoner omkring en middelstrøm.



Figur 10.9: Turbulent og laminært hastighetsprofil for strøm i rør.

$(Re)_{\text{krit}}$ vil turbulent strøm kunne opptre avhengig av forholdene ved innløpet i røret og rørets ruhet. Det viser seg at rørstrøm blir turbulent for Reynoldstall i området

$$2 \cdot 10^3 < Re < 10^5$$

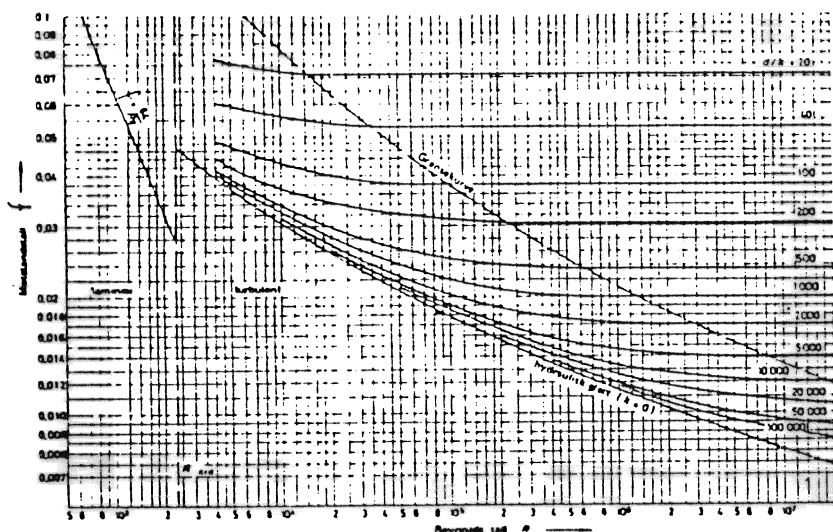
og for $Re > 10^5$ vil det som regel være en fullt utviklet turbulent strøm i røret. Figur 10.9 viser formen på strømprofilen når det er fullt utviklet turbulens. Til sammenlikning er den laminære strømprofilen for tilsvarende verdi av trykkgradienten tegnet. Det turbulente hastighetsprofilen er karakterisert ved at strømhastigheten øker hurtig i et tynt sjikt ute ved rørvæggen og at hastigheten er nærmest konstant i det indre av røret. Ved Reynoldstall på $5 \cdot 10^5$ vil for eksempel strømhastigheten øke til halvparten av maksimumshastigheten innfor et sjikt av tykkelse 0.003 a. Forholdet mellom maksimumshastigheten U og middelhastigheten \bar{U} er omkring 1.15 for turbulent strøm og lik 2 for laminær strøm. Regninger viser at for laminær strøm er det en lineær relasjon mellom volumstrømmen Q og trykkfallet pr. lengdeenhet β (se likning (10.4)). Eksperiment viser at det er en annen relasjon mellom Q og β når strømmen er turbulent. Ved å måle samhørende verdier av Q og β har det vist seg at relasjonen kan skrives

$$\beta = \frac{f \rho}{d} \bar{U}^2 \quad (10.7)$$

hvor f er motstandstallet som avhenger av Reynoldstallet og rørveggens overflateruhet. Som mål for overflateruheten har man innført en *ruhetsparameter*

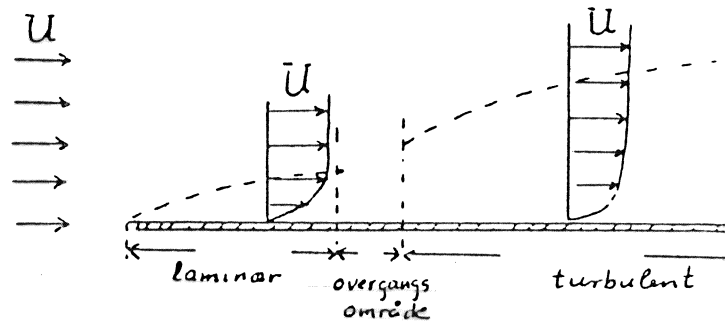
Tabell 10.1. Tabell med typiske verdier av ruhetshøyden for forskjellige materialer.

Materiale	k i mm
Trukne rør	0.0015
Vanlige stålrør	0.045
Asfalterte jernrør	0.12
Galvaniserte jernrør	0.15
Støpejernsrør	0.25
Trerør	0.18–0.9
Sementrør	0.3–3.0

Figur 10.10: *Moody's motstandsdiagram for strømning i rør.*

d/k hvor k er midlere ruhetshøyde og d betegner som før rørdiameteren. Tabellen gir typiske verdier for ruhetshøyden k for forskjellige materialer. Det er utført en rekke eksperimenter for å bestemme motstandstallet som funksjon av Reynoldstallet og ruhetsparametren, og resultatene er samlet i *Moody's motstandsdiagram* som er gjengitt i figur 10.10. Dersom røret har en helning i forhold til vertikalen slik at tyngdekraften bidrar til å drive strømmen sammen med trykkgradienten, vil formelen (10.5) fortsatt gjelde forutsatt at man på tilsvarende måte som i det laminære tilfellet bytter ut β med β' som er definert i likning (10.4)

Turbulent strøm er en hyppig forekommende strømningstilstand som opptrer i forskjellige forbindelser og ikke bare i sammenheng med strømning i rør. Turbulent strøm vil for eksempel opptre i grensesjiktet ved en plate dersom hastigheten er stor nok eller platen er tilstrekkelig lang. Nær forkanten av platen hvor grensesjiktet er tynt, vil man alltid ha laminær strømning. Lengre nedstrøm hvor grensesjiktet er tykkere vil det oppstå uregelmessigheter i den laminære strømning, og om platen er tilstrekkelig lang i forhold til strømningshastigheten, vil det utvikle seg et turbulent grensesjikt hvor strømningen er uregelmessig og kaotisk på samme måte som i rørstrøm. For å karakterisere



Figur 10.11: Laminær og turbulent grensesjikt ved plate.

strømmen i grensesjiktet kan man innføre et *lokalt Reynoldstall* R som er basert på grensesjikttykkelsen δ og strømhastigheten utenfor grensesjiktet

$$Re = \frac{U\delta}{\nu}$$

Dette Reynoldstallet vil altså være null ved forkanten av platen, og det vil øke når man går langs platen i strømmens retning. Beregninger viser at dersom Reynoldstallet er mindre enn 1200 så er grensesjiktet alltid laminært. I praksis skjer overgangen til turbulens når Reynoldstallet er i området

$$2 \cdot 10^3 < Re < 10^4$$

Disse tallene gjelder for en glatt plate i strømning uten trykkgradient. Ved overgang til turbulens blir grensesjiktet tykkere, og det vil som i det laminære tilfellet øke i tykkelse nedover langs platen (se figur 10.11). Grensesjiktet vil likevel være et tynt lag forholdsvis langt nedover platen.

10.4 Eksempler på beregning av rørstrøm

1. Beregning av trykktap (laminær strøm).

Gjennom en rørledning med indre diameter $d = 0.1 \text{ m}$ og lengde $l = 2.8 \text{ km}$ er det en volumstrøm $Q = 10 \text{ m}^3$ olje pr. time. Oljens kinematiske viskositet $\nu = 62 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ og dens tetthet er $\rho = 900 \text{ kg}/\text{m}^3$. Beregn trykktapet (Trykkfallet) Δp i rørledningen. Middelshastigheten er

$$\bar{U} = \frac{Q}{\pi \frac{d^2}{4}} = 0.35 \text{ m/s}$$

Reynoldstallet er

$$R = \frac{\bar{U}d}{\nu} = 570 \quad (10.8)$$

Strømmen er altså laminær, og vi kan benytte (10.3) til å beregne trykktapet

$$\Delta p = \beta l = \frac{8\mu l Q}{\pi a^4} = 1.77 \cdot 10^5 \text{ N}/\text{m}^2 = 1.77 \text{ bar} \quad (10.9)$$

2. Beregning av volumstrøm (turbulent strøm)

Et tilførselsrør med diameter $d = 0.02 \text{ m}$ har lengde $l = 300 \text{ m}$ og det ligger med jevn helning slik at høydeforskjellen mellom rørendene er $h = 10 \text{ m}$. Den kinematiske viskositeten for vannet er $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Beregn volumstrømmen gjennom røret. Rørets helningsvinkel er θ

$$\sin \theta = \frac{h}{l} = \frac{1}{30}$$

Vi forutsetter at overtrykket ved rørutløpet i brønnen er lite (grunn brønn) og setter $\beta \simeq 0$. Fra (10.4) finner vi

$$\beta' = \rho g \sin \theta$$

Regner **som om** det er laminær strøm og benytter (10.3) til å finne middelhastigheten

$$\bar{U} = \frac{Q}{\pi a^2} = \frac{a^2 \beta'}{8\mu} = 4.17 \text{ m/s}$$

Det tilsvarende Reynoldstallet er

$$Re = \frac{\bar{U}d}{\nu} = 8.3 \cdot 10^4$$

En må altså regne med at strømmen er turbulent. Under den forutsetning kan middelhastigheten finnes ved hjelp av likning (10.7) som gir

$$\bar{U} = \left(\frac{2\beta'd}{\rho f} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2gd \sin \theta}{f} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Siden motstandstallet f avhenger av modellhastigheten og avhengigheten er kjent bare ved Mody's diagram, må man i alminnelighet prøve seg frem for å finne den verdien av \bar{U} som passer i likningen. Vi forutsetter her at røret er glatt ($k = 0$). I dette tilfellet kan det vises at

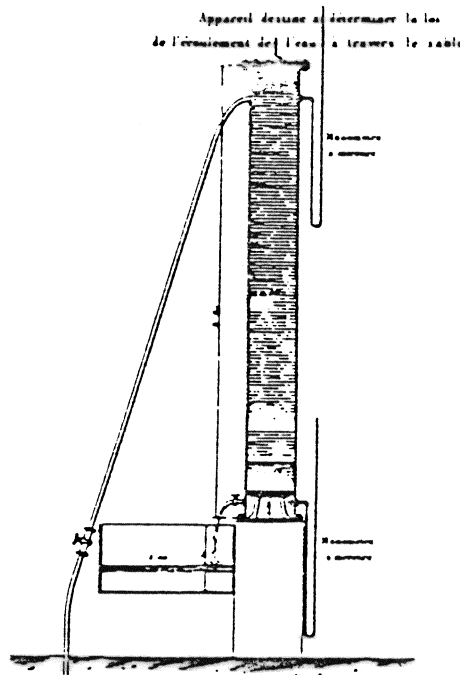
$$f = 0.32 \left(\frac{\bar{U}d}{\nu} \right)^{-\frac{1}{4}}$$

Derved kan \bar{U} bestemmes direkte og vi finner

$$\bar{U} = 4.68 a^{\frac{5}{7}} g^{\frac{4}{7}} \nu^{-\frac{1}{7}} \sin^{\frac{4}{7}} \theta = 0.67 \text{ m/s}$$

Volumstrømmen gjennom røret er

$$Q = \pi a^2 \bar{U} = 12.6 \text{ liter/min.}$$



Figur 10.12: Apparaturl benyttet av Henry Darcy (1803–1858) for å finne strøm i porøse media.

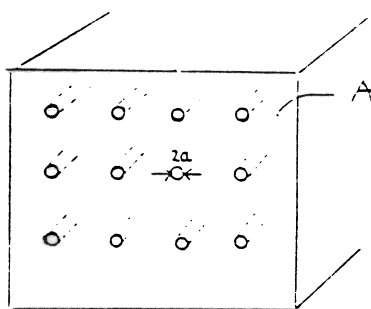
10.5 Strøm i porøse media

I mange materialer er det gjennomgående porer hvor væske eller gass kan strømme. Eksempel på dette er grunnstrøm i jord eller sand og strøm av olje og gass i sedimenter. Kunnskaper om strømningsformer i porøse media er av stor praktisk betydning både innen hydrologi og oljereservoarteknikk. Den grunnleggende loven for strømning i porøse media ble funnet av Henry Darcy (1803–1858) som var ingeniør ved vannverkene i den franske byen Dijon. Omkring 1850 gjorde han eksperiment for å bestemme gjennomstrømningen i rør fylt med sand. En tegning av apparaturen som han brukte, er gjengitt på figur 10.12. Darcy utførte forsøk med et vertikalt rør og han målte sammenhørende verdier for volumstrømmen q pr. flateenhet av rørets tverrsnittsareal og trykkfallet β pr. lengdeenhet langs røret. Han kom frem til følgende relasjoner mellom q og β

$$q = \frac{K}{\rho g} (\beta + \rho g) \quad (10.10)$$

hvor g som tidligere betegner tyngdens akselerasjon og K er en proporsjonalitetsfaktor som det er blitt vanlig å kalle *hydraulisk ledningsevne*. Den avhenger blant annet av porestørrelsen og viskositeten. Relasjonen (10.8) har fått navnet *Darcy's lov* og den viser at det virker en friksjonskraft rettet mot bevegelsen som er

$$f_{\text{frik}} = -\frac{g}{K}q \quad (10.11)$$



Figur 10.13: Modell for et porøst medium.

Senere undersøkelser har bekreftet de resultatene som Darcy kom frem til, og Darcy's lov er grunnlegende for strømning i porøse media. I et enkelt tilfelle er det mulig å bestemme den hydrauliske ledningsevnen og vise hvordan den avhenger av porestørrelsen og viskositeten i væsken. Vi betrakter et medium hvor porene består av rette, tynne, parallelle rør. Alle rørene er sirkulære og like og radius er a . Gjennom tvernsnittsarealet A av mediet løper det N rør. Som mål for porevolumet er det vanlig å innføre en størrelse n som er forholdet mellom porevolumet og det totale volumet. I dette tilfellet blir n (porøsiteten)

$$n = \frac{\pi a^2 N}{A}$$

Dersom rørene er så tynne at vi kan regne med laminær strømning, så er volumstrømmen gjennom hvert av rørene gitt ved (10.3). For ren trykkdrevet strøm er derfor den samlede volumstrømmen gjennom N rør

$$Q = \frac{\pi a^4 \beta}{8\mu} N$$

Volumstrømmen pr. flateenhet er

$$q = \frac{Q}{A} = \frac{\pi a^4 \beta N}{8\mu A} = \frac{a^2 \beta n}{8\mu}$$

Dette viser at den hydrauliske ledningsevnen for et porøst medium som består av tynne rør er

$$K = \frac{na^2 \rho}{8\nu}$$

Dette uttrykket viser at ledningsevnen avtar når poreåpningene blir mindre og når viskositeten blir større.

10.6 Øvingsoppgaver

1. Mellom to plan, $z = 0$ og $z = H$, har vi en homogen, inkompressibel, Newtonsk væske. Planet $z = 0$ er i ro mens planet $z = H$ beveger seg

med konstant hastighet $U_0\mathbf{i}$. Vi antar at hastighetsfeltet i væsken er lik $\mathbf{v} = u(x, z)\mathbf{i}$ og at trykket er konstant. Det er ingen volumkrefter. (En slik strømning kalles Couette strøm.)

- Vis ved hjelp av kontinuitets-likningen at u bare kan være en funksjon av z .
- Bevegelses-likningen for en Newtonsk væske har formen

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{f}_v$$

Vis at med antagelsene over får vi

$$\frac{d^2u}{dz^2} = 0$$

- En væske med friksjon må ha samme hastighet på en grenseflate som grenseflaten selv. Vis at vi her får grenseflate-betingelsene $u(0) = 0$ og $u(H) = U_0$.
- Finn hastighetsfeltet.
- Finn strømlinjene og partikkelbanene.
- Finn hvirvlingen til \mathbf{v} .
- Finn volumstrømmen pr. enhets lengde i y -retningen.
- Finn strømfunksjonen. Skisser ekvidistante linjer for strømfunksjonen og kontroller svaret i g).
- Skjærspenningen τ på et plan $z = \text{konst}$ er gitt ved

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial z}$$

Finn skjærspenningen på planene $z = 0$ og $z = H$.

- Hvis væsken var friksjonsfri, hvordan ville da bevegelsen blitt?

- En homogen, inkompressibel, Newtonsk væske strømmer stasjonært i et rett rør med radius a (Poiseulle strøm). Det er ingen volumkrefter.

Vi innfører sylinder-koordinater (x, r, θ) slik at x -aksen er sammenfallende med røraksen og r er avstanden til røraksen. Hastighetsfeltet antas å være rettet langs røret. Væskens kinematiske og dynamiske viskositetskoeffisienter betegnes henholdsvis ν og μ , der $\mu = \rho\nu$. ρ er tettheten. I oppgave a)–c) skal vi sette opp egnede likninger for problemet. I oppgave d)–g) skal vi så løse disse likningene. De resterende punktene går ut på å beregne størrelser som er av stor praktisk betydning i rørstrømning. Disse størrelsene finnes som regel fra enkle formler der løsningen (hastighets- og trykkfelt) inngår.

- Sett opp den mest generelle formen på hastighetsfeltet når det tas hensyn til opplysningene over.

- b) Sett opp bevegelses-likningen, kontinuitets-likningen og grense-flate-betingelsene.
- c) Vis ved hjelp av kontinuitets-likningen at hastighetsfeltet ikke kan endre seg langs med røret. Sett så opp et likningsystem for p og u .
- d) Vis at trykk-gradienten $\partial p/\partial x$ må være konstant. (Hint: Deriver x -komponenten av bevegelses-likningen med hensyn på x).
- e) Vi betegner trykk-gradienten i x -retning med $-\beta$. Vis at trykkfeltet i væsken blir

$$p(x, r, \theta) = -\beta x + C$$

der C er en konstant.

- f) Vis at hastigheten i x -retning, u , oppfyller

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = -\frac{\beta}{\mu}$$

med $u = 0$ for $r = a$. (Hint: Benytt formelen $\nabla^2 u(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right)$ som gjelder i sylinderkoordinater.)

- g) Finn u .
- h) Finn volumstrømmen i røret. Finn også middelhastigheten \bar{u} over et tverrsnitt.
- i) Beregn trykk-tapet over en rørlengde L , uttrykt ved volumstrømmen.
- j) Definer et Reynoldstall (Re) for denne strømmingen der middelhastigheten over tverrsnittet benyttes som karakteristisk hastighet. For hvilke Re er modellen over gyldig?
Skisser grovt hvordan hastighetsprofilen i røret (dvs. $u(r)$) varierer med Re .
- k) Se på en del av røret. Hvilke krefter virker på væsken i denne delen? Hvordan må det innbyrdes forholdet mellom disse kreftene være? (Her skal det ikke regnes, bare resonneres fysisk!).
- l) Beskriv hvordan hastighetsfeltet og trykkfeltet ville blitt dersom vi betraktet væsken som friksjonsfri.

Kapittel 11

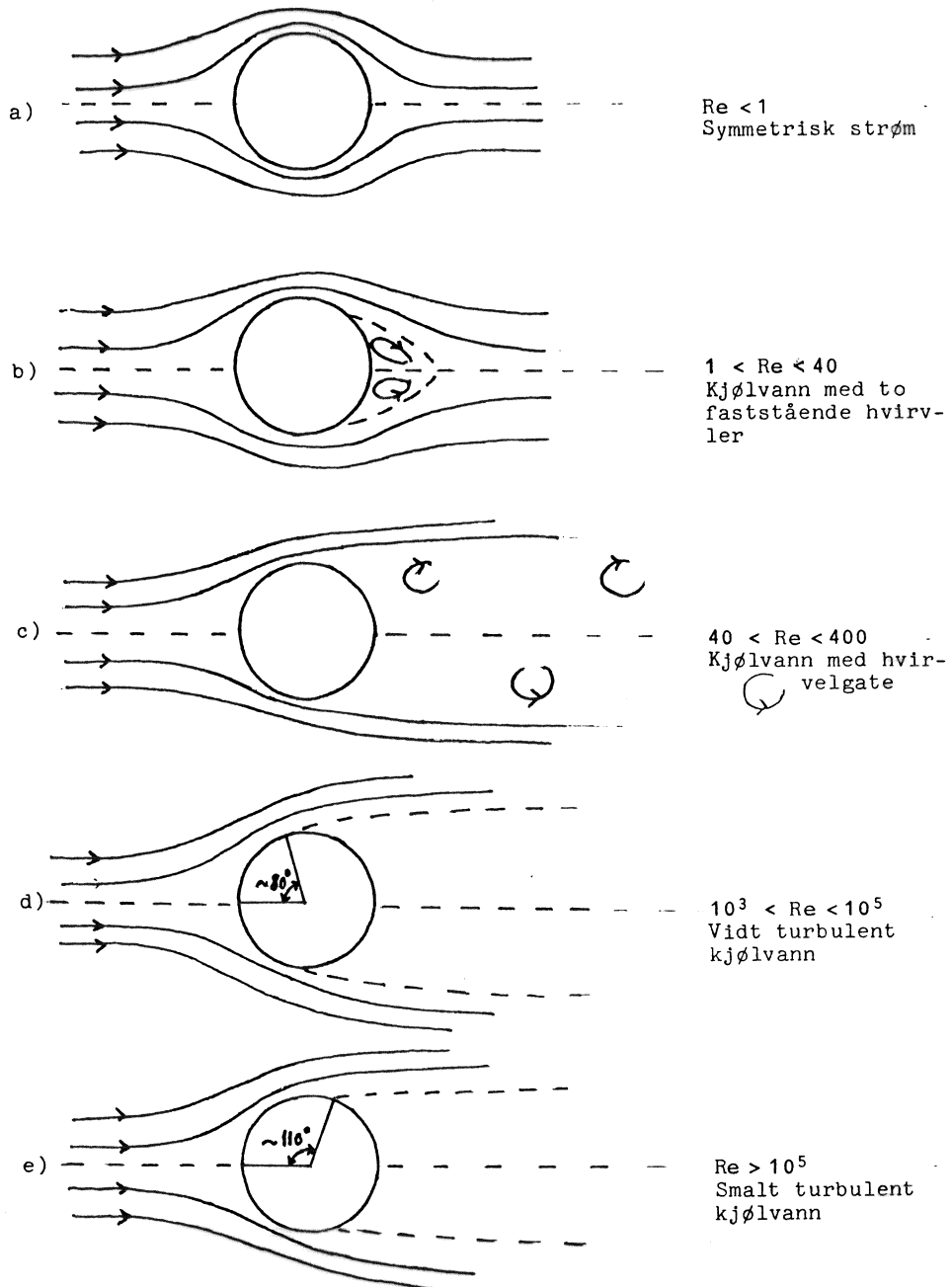
Kjølvannsstrømning. Motstand på legemer

11.1 Sammendrag

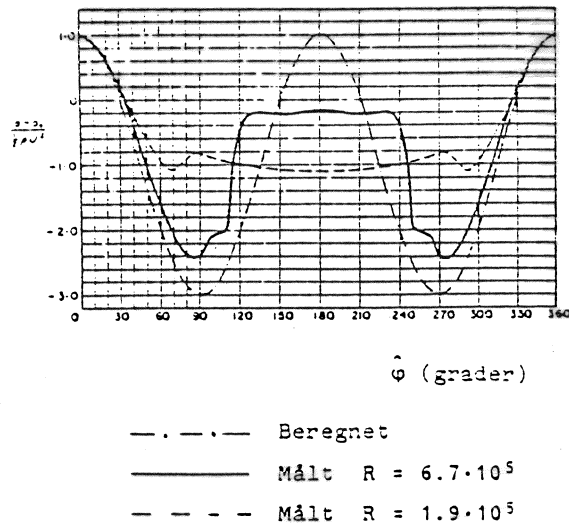
I kapittel 7 fant vi at en sylinder eller kule som beveger seg med jevn hastighet gjennom en friksjonsfri og inkompressibel væske (potensialstrømning) ikke møter motstand. Dette strir mot dagligdagse observasjoner som viser at både sylindrer og kuler såvel som andre legemer blir utsatt for motstandskrefter når de beveger seg gjennom væsker eller gasser. At potensialteorien kommer til kort når det gjelder å bestemme motstandskrefter på legemer, ble lenge oppfattet som et uforståelig paradoks (d’Alamberts paradoks), og det bidro til å bringe teorien for friksjonsfri strømning i miskreditt. Vi vet nå at friksjonsvirkninger er avgjørende for motstandskraften, men forøvrig kan potensialstrømningen gi en god beskrivelse av strømforholdene. Vi har allerede vært inne på dette i avsnitt 7.9. For å karakterisere strømningstilstanden om et legeme, innfører vi Reynoldstallet

$$Re = \frac{Ud}{\nu}$$

Hvor U er legemets hastighet, eller om vi vil strømningshastigheten når legemet er holdt fast. ν er den kinematiske viskositetskoeffisienten og d er et karakteristisk lengdemål for legemet. For en sylinder eller kule er diametren et naturlig lengdemål. I figur 11.1a har vi skissert hovedtrekkene i strømningsmønstret ved en fastholdt sirkulær sylinder i en uniform strøm. Når Reynoldstallet er lite, det vil si $Re < 1$ (figur 7.17) er strømmingen fullstendig bestemt av viskositeten og at sylinderens innvirkning på strømmen er merkbar forholdsvis langt fra sylinderen. For Reynoldstall mellom grensene $1 < Re < 40$ dannes det to faste hvirvler hvor væsken eller gassen sirkulerer i en bakevje uten å forlate denne (figur 79b). For større Reynoldstall $Re > 40$ vil bakevjen brytes opp og hvirvlene rives løs avvekslende fra den ene og den andre siden av sylinderen. Samtidig dannes det nye hvirvler ved sylinderen som i sin tur rives løs. Etter hvert som hvirvlene transporteres nedover i strømmen, vil det dannes en regelmessig hvirvelgate hvor hvirvlene ligger på to rekker i kjølvannet (figur 79c).

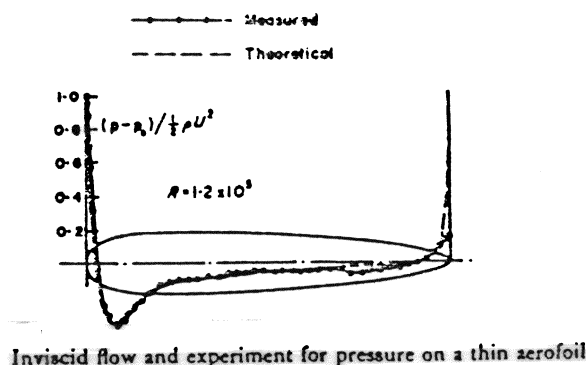


Figur 11.1:



Figur 11.2:

Denne strømningsformen kan ofte iakttas i naturen for eksempel bak kvister i bekker og elver. Strømningsmønsteret har fått navnet *Karman's virvelgate* etter den ungarsk/amerikanske vitenskapsmannen Theodore von Karman (1881–1963) som er særlig kjent for å ha løst viktige strømningsproblemer i forbindelse med flyving. For Reynoldstall større enn $Re > 400$ vil det oppstå uregelmessigheter i hvirvelgaten, og for Reynoldstall $Re > 10^3$ blir uregelmessighetene så fremtredende at en kan snakke om en turbulent kjølvannstrømning. For Reynoldstall opptil $Re = 10^5$ vil kjølvannstrømmen løse seg (separerer) fra sylinderflaten ved en hvirvel på omkring 80° regnet fra stagnasjonspunktet på forsiden av sylindere (figur 79d). Punktet hvor kjølvannet løser seg fra sylinderflaten kalles *seperasjonspunktet*. For Reynoldstall større enn 10^5 vil kjølvannet være smalere og kjølvannstrømmen løser seg fra sylinderflaten ved en vinkel på omkring 110° fra stagnasjonspunktet (figur 79e). Vi skal senere se at overgangen fra bred til smal turbulent kjølvannsstrømning har en stor innvirkning på motstandskraftens størrelse. Når Reynoldstallet er stort $Re > 10^3$ vil friksjonsvirkningen på forsiden av sylindere være begrenset til et tynt grensesjikt langs sylinderflaten, og potensialstrømningen vil være en god beskrivelse av strømforholdene utenfor grensesjiktet. Dette fremgår blant annet av figur 11.2 som viser at det på lo-siden av sylindere er en god overensstemmelse mellom observert og beregnet trykkfordeling. Referanseverdien for trykket er trykket i den uforstyrrede strømmen (se kapittel 7.9). Målingene er for to forskjellige Reynoldstall. Den laveste verdien tilsvarer en bred kjølvannsstrømning hvor seperasjonspunktet ligger forholdsvis langt frem på sylindere. Den høyeste verdien for Reynoldstallet tilsvarer en smal kjølvannsstrømning med seperasjonspunktet lengre bak på sylinderflaten. Vi ser av figuren at overensstemmelsen mellom målinger og beregninger er best i det siste tilfellet. Når det gjelder motstandskraften på sylindere, skyldes den to forhold. For det første gir friksjonsspenningsene langs sylinderflaten en netto motstandskraft i strømmens retning.



Figur 11.3:

Denne delen av den totale motstandskraften skal vi her kalle *overflatefriksjon*, men den engelske betegnelsen 'skin friction' er mer beskrivende. For det andre vil kjølvannsstrømning medføre at det oppstår en trykkforskjell mellom le- og lo-siden. Siden trykket er størst på lo-siden, medfører dette en motstandskraft i strømmens retning. Denne delen av den totale motstandskraften skal vi kalle *formmotstand* fordi størrelsen av motstandskraften avhenger svært mye av legemets form.

For *strømlinjeformede legemer* vil kjølvannsstrømmen som regel være meget smal, og motstanden vil hovedsaklig bestå av overflatefriksjonen. Dette kommer til uttrykk ved at friksjonsvirkningen er begrenset til tynne grensesjikt og at det utenfor grensesjiktet er potensialstrømning. Derfor vil trykkfordelingen langs et strømlinjeformet legeme med god tilnærming være slik som potensialteorien forutsetter (se figur 11.3). Referanseverdien for trykket er trykket i den uforstyrrede strømmen (se kapittel 7.9). Den totale motstandskraften på et legeme består i alminnerlighet av både overflatefriksjon og formmotstand. Vanligvis dominerer overflatefriksjonen over formmotstanden ved små Reynoldstall, mens det motsatte er tilfellet for store Reynoldstall.

Det har vist seg at motstandskraftens størrelse, F , kan uttrykkes ved en empirisk formel

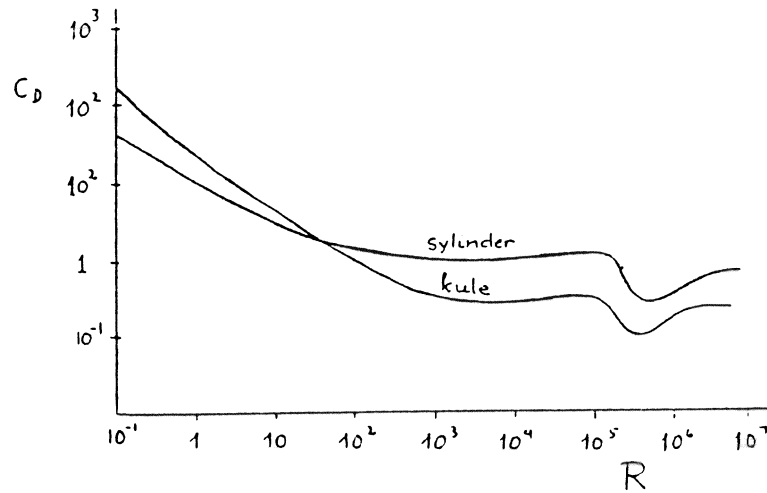
$$F = \frac{\rho}{2} c_D U^2 A \quad (11.1)$$

hvor c_D er *motstandskoeffisienten* (drag-koeffisienten) og A er legemets tverrsnittsareal (i et plan normalt strømetningen). Motstandskoeffisienten er en dimensjonsløs størrelse som avhenger av Reynoldstallet. Det er bestemt ved målinger, men i enkelte tilfeller er det mulig å beregne den ved å løse Navier-Stokes likning. For en kule ved små Reynoldstall $Re < 1$ viser det seg for eksempel at

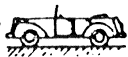


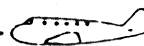


$$c_D = \frac{24}{Re}$$

Motstandskraften på en kule med radius a kan derfor skrives

$$F = 6\pi\mu aU \quad (11.2)$$



Figur 11.4: Motstandskoeffisienten for kule og sylinder.

Legeme	C_D	Legeme	C_D
	0,90		0,13
	0,43		0,08
	0,20		0,07

Figur 11.5: Motstandskoeffisient på forskjellige legemer.

hvor μ er den dynamiske viskositetskoeffisienten. Formelen (11.2) er kjent som *Stokes motstandslov*. Den gjelder altså bare for små Reynoldstall.

På figur 11.4 har vi gjengitt målte verdier for motstandskoeffisienten for kule og sylinder. Fallet i motstandskoeffisientens verdi (og derved i motstandskraften) ved Reynoldstall i området 10^5 til 10^6 henger sammen med at kjølvannsstrømningen blir smalere i dette området av Reynoldstallet. Motstandskoeffisientens størrelse for andre legemer enn kule og sylinder er gitt på figur 11.5. Til nå har vi bare behandlet motstanden når legemet er i jevn og rettlinjet bevegelse. Ved akselerert bevegelse vil en måtte akselerere både legemet og den omkringliggende væske eller gass. Dette fører til at man må bruke en større kraft for å akselerere legemet enn hva dets masse eller treghet tilsier. Dersom massen av legemet er M og akselerasjonen er \dot{U} kan kraften skrives

$$F = (M + m)\dot{U}$$

hvor m er 'tilleggsmassen' som skyldes at væsken eller gassen akselereres. Der-

som man kan se bort fra friksjonseffekter kan denne tillegsmassen finnes ved hjelp av potensialteori. For en sylinder med radius a gir potensialet (7.33) en kraft på sylindren

$$\pi\rho a^2\dot{U}$$

pr. lengdeenhet i sylindrens retning. Dette betyr at tillegsmassen (pr. lengdeenhet) er

$$m_{\text{syl}} = \pi\rho a^2$$

For en kule kan vi på tilsvarende måte finne tillegsmassen

$$m_{\text{kule}} = \frac{2}{3}\pi a^3\rho$$

hvor a er radius i kula.

Kapittel 12

Appendiks

12.1 Trykkenheter

Enhet for trykk i SI-systemet er i Pascal (Pa), $1Pa = 1N/m^2$ (Newton pr. kvadratmeter). Foruten denne enheten finnes det en rekke andre enheter. De viktigste er :

- 1 fysisk atmosfære (atm) = $1.0133 \cdot 10^5 Pa$
- 1 teknisk atmosfære (at) = $1 kp/cm^2 = 0.8907 \cdot 10^5 Pa$
- 1 bar = 10^3 millibar (mb) = $10^5 Pa$
- 1 millimeter kvikksølvhøyde (mm Hg) = 1 Torr = $1.3332 \cdot 10^2 Pa$
- 1 millimeter vannsøyle (mm Vs) = $9.8067 Pa$
- 1 psi (pound pr. square inch) = $6.8948 \cdot 10^3 Pa$

Sammenhengen mellom noen av trykkenhetene fremgår dessuten fra tabellen.

	Pa	bar	atm	Torr
$1Pa$	1	10^{-5}	$0.9869 \cdot 10^{-5}$	$0.75006 \cdot 10^{-2}$
1 bar	10^5	1	0.9869	750.06
1 atm	$1.0133 \cdot 10^5$	1.0133	1	760
1 Torr	$1.3332 \cdot 10^2$	$1.3332 \cdot 10^{-3}$	$1.3158 \cdot 10^{-3}$	1

