Oppgave 1 - En tynnfilm påvirket av en skjærkraft

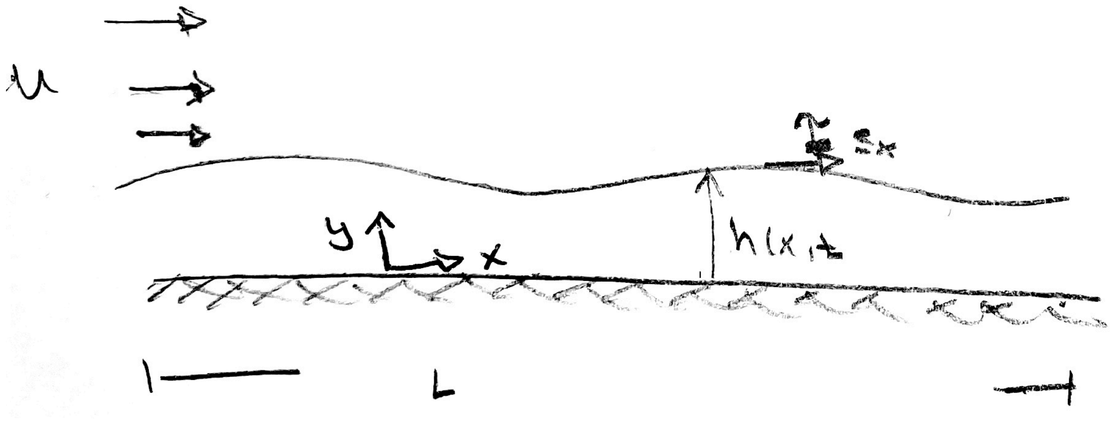
Vi vurderer en to-dimensjonal inkompressibel, viskøs væskefilm med tykkelse $h(x,t)$ som blir påvirket av en skjærkraft på den frie overflaten. Vi anser filmen som tynn i den forstand at $h/L \ll 1$. Anta at skjærkraften virker kun langs x-retningen på filmens overflate og er konstant.

1a: Utled lubrikasjonsligningene.

1b: Finn massefluksen i filmen.

1c: Finn tynnfilmligningen (anta linearisert overflatespenning).
Anta at vi kan se bort i fra gravitasjonen og argumenter for hvor tynn filmen må være for at dette skal være en god tilnærming.

1d: Er filmen stabil/instabil? Finn det stabilitetskriteriet gjennom linær stabilitetsanalyse der du kan anta at vi kan beskrive forstyrrelsen gjennom $h = h_0 + h' = h_0 + \varepsilon e^{it+kx}$. Der h_0 er den konstante, uforstyrrede filmen og vi har at $h_0 \ll \varepsilon$.



Oppgave 2 - Friksjonsfri strømning

2a

Et hastighetsfelt $\mathbf{v} = (u, v, w)$ i et kartesisk koordinatsystem (x, y, z) har virvling $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3) = \nabla \times \mathbf{v}$.

Numeriske, avanserte regneskjemaer i beregningsorientert fluidmekanikk benytter seg av følgende to relasjoner:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{c} \times \mathbf{v} + \nabla \frac{1}{2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla u = \nabla \cdot (\mathbf{v} u) - u \nabla \cdot \mathbf{v}$$

Vis disse relasjonene for det tilfellet at strømningen er todimensjonal, dvs. $\mathbf{v} = (u, v)$ og $\mathbf{c} = (0, 0, c_3)$.

2b

En stasjonær strømning er gitt ved det komplekse hastighetspotensialet $\beta(z) = ln(z - a) + ln(z + a) + Uiz$, der $z = x + iy$ og (x, y) er kartesiske koordinater.

Bestem det reelle hastighetspotensialet og strømfunksjonen.

2c

Finn hastighetene (u, v). Finn også hastighetene (u, v) for $x = 0$.

2d

Finn trykket i strømningen ved $x = 0$ og alle y.

2e

Vi tenker oss at $x = 0$ representerer et fysisk plan. Finn den vektorielle kraften på planet ($p_\infty = 0$).
Hint:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2 dy}{(a^2 + y^2)^2} = \frac{\pi}{2a}$$

Oppgave 3 - Burgers virvel

En idealisert tornado kan beskrives av Burgers virvlingsmodell der hastigheten i sylindriske koordinater er gitt som $\mathbf{u} = \frac{-\alpha r}{2}\mathbf{e_r} + u_\theta(r)\mathbf{e}_\theta + \alpha z \mathbf{e_z}$. Der α er en positiv konstant.

a Poeng: 10/140

Vis at $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

b Poeng: 10/140

Bestem virvlingen $\boldsymbol{\omega} = f(u_r, r)\mathbf{e_z} = \omega \mathbf{e_z}$.

c Poeng: 10/140

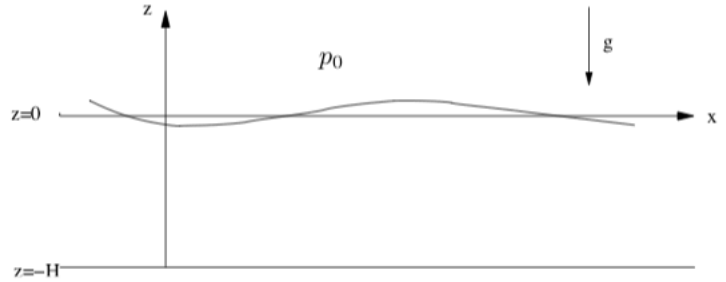
Vi ser at $p = p(r, z)$ og det er ingen trykkvariasjoner i θ-retning. Vis at bevegelsesligningenskomponenten i θ-retning reduseres til: $-\frac{1}{2}\alpha r \omega = \nu \frac{d\omega}{dr}$. Her er ν den kinematiske viskositeten.

d Poeng: 10/140

Bestem $u_\theta(r)$ ved å bruke grensebetingelsene $[r \to 0, u_\theta \to 0]$ og $[r \to \infty, u_\theta \to \frac{\Gamma}{2\pi r}]$. Konstanten Γ gir virvelstyrken.

Oppgave 4 - Potensialbølger

Vi skal se på overflatebølger i et væskelag (med uendelig horisontal utstrekning) over en plan horisontal bunn som vist på figuren.



Eneste volumkraft er tyngden, og vi legger inn et aksekors som vist på figuren. Ved likevekt er væsken i ro og overflaten er plan og horisontal, $z = 0$. Trykket over væsken er konstant og lik p_0. Vi forstyrrer likevektstilstanden og setter i gang en bevegelse i væsken ved tiden $t = t_0$ slik at overflaten for $t > t_0$ er gitt ved

$$\eta(x,t) = a \sin k(x - ct)$$

der a, k og c er konstanter, og vi forutsetter at $\left|\frac{a}{H}\right| \ll 1$ og $|ak| \ll 1$. Væsken regnes som homogen og inkompressibel med tetthet ρ, og bevegelsen er friksjonsfri.

a) Vis at bevegelsen må være hvirvelfri.

b) Utled Euler trykklikning

$$p = -\rho\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \tfrac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + gz\right] + f(t)$$

der ϕ er hastighetspotensialet, p trykket og g tyngdens aksellerasjon. Sett $f(t) = p_0$ i resten av oppgavene.

c) Sett opp de eksakte grenseflatebetingelser for problemet uttrykt ved ϕ, η og g og linearisér disse betingelser.

d) Vi antar at hastighetspotensialet for bevegelsen er gitt ved

$$\phi(x,z,t) = F(z) \cos k(x - ct)$$

Finn $F(z)$.

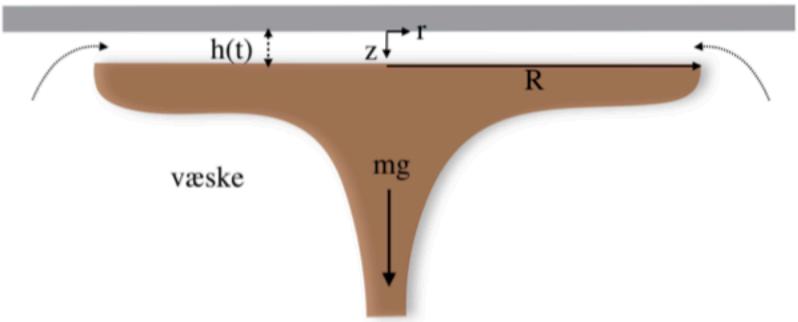
e) Finn c uttrykt ved g, k og H. Hva kalles denne relasjonen?

f) Finn den maksimale verdi av c for den gitte dybde H. Hva kalles bølgene i dette tilfellet?

g) Finn trykket i væsken. Hvordan blir trykkfordelingen i tilfellet i spørsmål f)? Kommenter resultatet.

Oppgave 5 - Dynamikken av en sugekopp

Vi har festet en hard sugekopp med masse m på en fast vegg (omgitt av en viskøs inkompressibel væske), der den viskøse sugekraften bremser sugekoppen fra å falle ned på grunn av tyngdekraften (mg). Fluidfilmen mellom de faste overflatene har en dynamisk høyde $h(t)$ som er mye mindre enn sugekoppens radius R ($h/R \ll 1$).



Figur 2: Vi har festet en sugekopp som er omgitt av en inkompressibel og viskøs væske til en vegg og den separeres sakte fra veggen. Filmhøyden $h(t)$ øker med tiden, men $h/R \ll 1$.

a Poeng: 10/140

Finn lubrikasjonsligningene ved å bruke skaleringsanalyse på de oppgitte Navier-Stokes ligningene i sylinderkoordinater. Hvordan skalerer trykket i r- og z-retning?

b Poeng: 10/140

Vi har full heft (no-slip) ved overflatene $u_r(0) = u_r(h) = 0$. Bruk disse grensebetingelsene til å finne hastigheten $u_r = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial r}(z^2 - zh)$.

c Poeng: 10/140

Bruk massebevarelse og den kinematiske grensebetingelsen ved sugekoppen for å utlede filmligningen: $\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h^3}{12\mu r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)$.

d Poeng: 10/140

Eliminer trykket via kraftbalanse for å finne den ordinære differensial ligningen som beskriver $h(t)$. Bruk skalering for å finne den karakteristiske tiden ("dreneringstiden") og dens relasjon til filmhøyden. (Hint: Husk trykket er endelig i filmen og det er atmosfærisk trykk ved kanten $p(R) = p_0$)