UNIVERSITETET I OSLO
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Underveiseksamen i:	MEK1300.
Eksamensdag:	Mandag 15/3, 2004.
Tid for eksamen:	Kl. 14.30.00–17.30.
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsammlung, godkjent kalkulator.

Oppgavesettet er på 3 sider.

Oppgave 1. En åpen stålkasse med et rektangulært tverrsnitt flyter som vist på fig. 1. Tyngdepunktet for kassen er merket C.

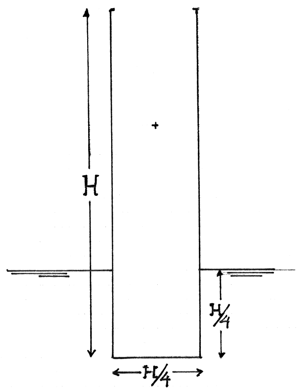


Fig. 1.

a) Lag en (stor) figur og tegn inn oppdriftssenteret B.

b) Flyter kassen stabilt? Begrunn svaret ved å bruke en tydelig figur.

Kassen skal ballasteres ved å fylle på sjøvann gjennom en sirkulær åpning med diameter d ved A (se fig. 2).

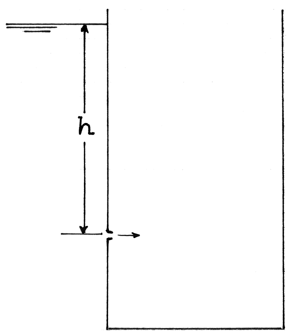


Fig. 2.

c) Hvor stor er volumstrømmen Q_1 av vann inn gjennom åpningen idet fyllingen starter? Strømningen regnes som stasjonær og vannet som en homogen, inkompressibel væske.

d) Prosjektlederen vil prøve å øke innstrømningen ved å sette på en tut med sirkulært tverrsnitt slik som vist i fig. 3. Hvor stor blir volumstrømmen Q_2 nå?

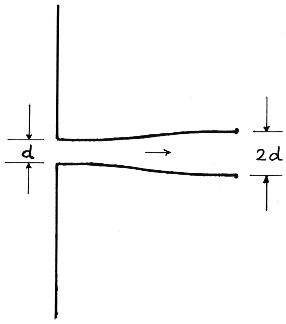
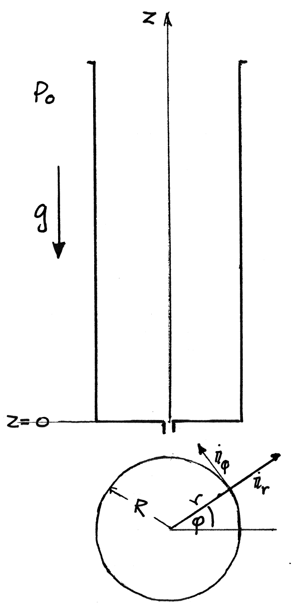


Fig. 3.

Oppgave 2. Homogen inkompressibel væske strømmer stasjonært i en åpen beholder med sirkulært tverrsnitt. Væsken strømmer inn i tanken langs sideveggen i toppen og ut gjennom et lite hull i sentrum av bunnen. Eneste volumkraft er tyngden og trykket utenfor beholderen er p_0. Beholderen har radius R, og vi innfører sylindriske polarkoordinater (r, ϕ, z). Hastigheten i strømningen er gitt ved



$$\boldsymbol{v} = v(r)\boldsymbol{i}_\phi$$

(Vi ser bort fra små komponenter innover mot sentrum og nedover.)

a) Finn hastighetssirkulasjonen rundt en sirkel med radius r om z-aksen.

b) Anta at sirkelen representerer en materiell kurve som trekkes sammen symmetrisk om z-aksen. Bruk Kelvins sats til å vise at

$$V(r) = \frac{A}{r}. \quad r \neq 0 \quad (A \text{ er en konstant})$$

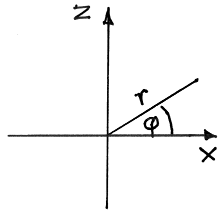
c) Vis at $\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\frac{V^2}{r}\boldsymbol{i}_r$.

d) Sett opp de tre komponenter av bevegelsesligningen for denne strømningen når $\boldsymbol{f}^v = \boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{i}_z$.

e) Bruk bevegelsesligningen til å finne trykket $p = p(r, z)$ i strømningen når $p(R, 0) = p_1$.

f) Bruk den dynamiske grenseflatebetingelsen til å finne formen på væskeoverflaten (den frie overflate) når $r \neq 0$.

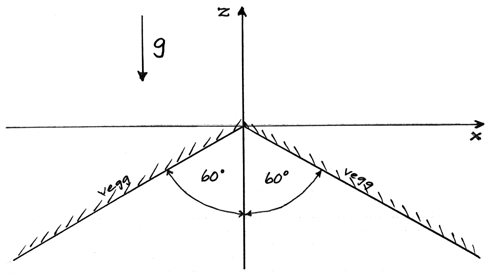
Oppgave 3. Gitt $\phi(r,\varphi) = Ar^k \sin k(\varphi + \frac{\pi}{2})$ der r, φ er sylindriske polarkoordinater, A og k er positive konstanter. $\left(\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$



a) Vis at ϕ kan representere et hastighetspotensial for hvirvelfri bevegelse av en homogen, inkompressibel væske.

b) Hva er betingelsene for at det eksisterer en strømfunksjon?
Finn strømfunksjonen ψ for strømningen gitt ved ϕ.

c) Sett $k = \frac{3}{2}$ i uttrykket for ϕ og vis at ϕ kan representere strømningen i et hjørne som vist på figuren nedenfor.



d) Finn trykket i strømningen når trykket i origo ($x = 0$, $z = 0$) er p_0 og tyngden er eneste volumkraft.

e) Finn trykket langs veggene i hjørnet og bestem A slik at trykket langs veggene er konstant.

SLUTT