# UNIVERSITETET I OSLO

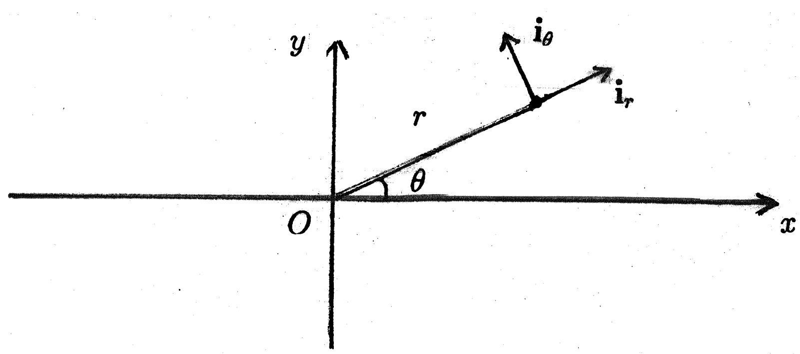
## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

| | |
|---|---|
| Eksamen i: | ME 102 — Innføring i fluidmekanikk. |
| Eksamensdag: | Lørdag 16. juni 1990. |
| Tid for eksamen: | 09.00 – 15.00 |
| Oppgavesettet er på 4 sider. | |
| Vedlegg: | Rottmann: Matematische Formelsammlung. |
| Tillatte hjelpemidler: | Ingen. |

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

## Oppgave 1.

Vi betrakter to-dimensjonal stasjonær, friksjonsfri, virvelfri strøm av en homogen inkompressibel væske hvor det er ingen ytre krefter.




For å beskrive strømmen legger vi et kartesisk koordinatsystem $(x, y)$ med origo i $O$ og et polarkoordinatsystem $(r, \theta)$ som vist på figuren. Enhetsvektorene i polarkoordinatsystemet er $(\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta)$. Gradienten til en skalar $\beta$ og

*(Fortsettes side 2.)*

divergensen til vektoren **v** i polarkoordinater er hhv. gitt ved

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial r}\mathbf{i}_r + \frac{\partial\beta}{r\partial\theta}\mathbf{i}_\theta \quad \text{og} \quad \nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta}$$

hvor $(v_r, v_\theta)$ er komponentene av **v**.

(a) Begrunn hvorfor strømhastigheten **v** kan avledes av et hastighetspotensiale $\phi$. Hvilken likning må $\phi$ oppfylle?

(b) Vis at det eksisterer en strømfunksjon $\psi$ og finn relasjonene mellom $\phi$ og $\psi$ både i kartesiske og polar-koordinater.

(c) Vis at de følgende to hastighetspotensialer

$$\phi_1 = -Ux \qquad \text{og} \qquad \phi_2 = \frac{Q}{2\pi}\ln r\,, \qquad r \neq 0.$$

representerer mulige strømninger i væsken. $U$ og $Q$ er gitte positive konstanter.

(d) Finn strømfunksjonene $\psi_1$ og $\psi_2$ som tilsvarer hastighetspotensialene $\phi_1$ og $\phi_2$ og skisser strømlinjene. Hvilke tolkning kan en gi til konstantene $U$ og $Q$?

(e) Vis at strømmen med hastighetspotensial $\phi = \phi_1 + \phi_2$ og strømfunksjonen $\psi = \psi_1 + \psi_2$ er en mulig strømning utenfor et legeme hvor overflaten er gitt ved

$$r = \frac{Q}{2\pi U}\frac{\theta}{\sin\theta}$$

Bestem bredden på legemet, $B = 2y$ når $x \to -\infty$ og skisser formen.

(f) Trykket i væsken langt oppstrøms fra legemet $(x \to \infty)$ betegnes $p_\infty$. Bestem trykket langs overflaten av legemet.

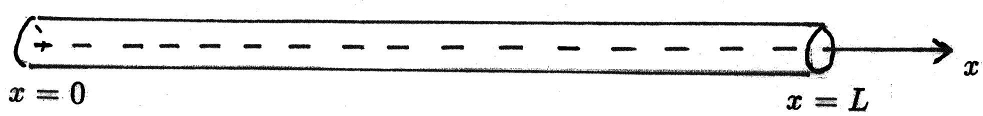
(g) Bestem akselerasjonen for en væskepartikkel som flyter i feltet.

(h) Bruk impulslikningen og finn kraften som virker på legemet.

*(Fortsettes side 3.)*

# Oppgave 2.

En kompressibel friksjonsfri gass fyller et langt tynt rør med lengde $L$ og tverrsnittareal $a$ som er lukket i begge ender. Ved likevekt er det uniform trykk- og tetthetsfordeling i gassen som betegnes henholdsvis med konstantene $p_0$ og $\rho_0$




Vi legger $x$-aksen langs symmetriaksen i røret med origo i den ene enden som vist på figuren og betrakter plane en-dimensjonale lydbølger i gassen. Trykk og tetthets perturbasjonen $p'$ og $\rho'$ antaes bare å være funksjoner av $x$ og tiden ($t$). Det totale trykket i gassen er da

$$p = p_0 + p'$$

og den tilsvarende tettheten er

$$\rho = \rho_0 + \rho'$$

og hastighetsfeltet er gitt ved

$$\mathbf{v} = u(x,t)\mathbf{i}$$

hvor $\mathbf{i}$ er enhetsvektoren i $x$-retning.

Vi antar også at tilstandsendringene i gassen er isentropisk (adiabatiske) slik at det eksisterer en barotropirelasjon

$$p = p(\rho)$$

og vi ser bort fra ytre krefter.

(a) Sett opp bevegelseslikningen og kontinuitetslikningen uttrykt ved de variable $p, \rho$ og $u$.

(b) Anta at trykk-, tetthets- og hastighetsperturbasjonene er små slik at bevegelseslikningen og kontinuitetslikningen kan lineariseres. Utled de lineariserte likningene.

*(Fortsettes side 4.)*

(c) Lineariser barotropirelasjonen om likevektstilstanden og utlede bølgelikningen for trykkperturbasjonen $p'$

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0$$

og bestem konstanten $c$.

(d) Sett opp grenseflatebetingelsene for $u(x,t)$ ved rørendene $x = 0$ og $x = L$ og bestem de tilsvarende betingelsene på trykkperturbasjonen.

(e) Anta stående svingninger

$$p'(x,t) = \hat{p}(x) \cos \frac{2\pi t}{T}$$

Hvor $T$ er svingetiden og $\hat{p}(x)$ er en funksjon av $x$. Bestem funksjonen $\hat{p}(x)$ når den maksimale trykkperturbasjonen settes lik $p_m$ og finn den tilsvarende strømhastighet $u(x,t)$.

(f) Hva blir den *lengste* mulige svingetiden? Bestem denne svingetiden og den tilhørende frekvensen når $L = 3\,m$ og $c = 1500\,m/s$.

(g) Hvilke krav må være oppfylt for at en med god tilnærmelse kan foreta lineariseringen i (b)?

(h) Finn den totale kinetiske energien i røret.

SLUTT