UNIVERSITETET I OSLO

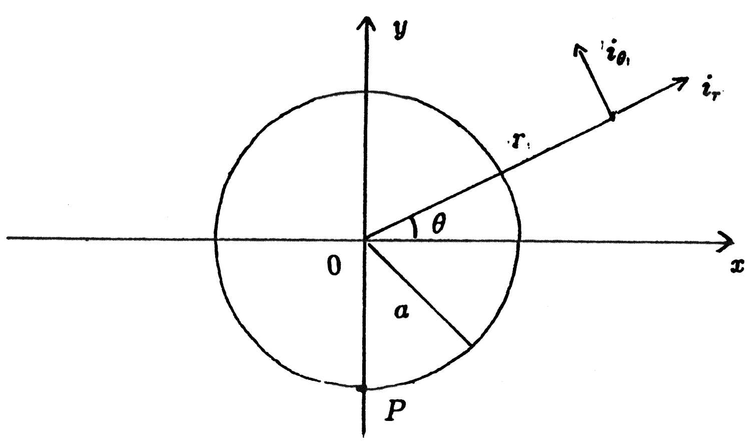
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	ME 102 — Innføring i fluidmekanikk.
Eksamensdag:	Fredag 14. juni 1991.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsammlung.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Vi betrakter to-dimensjonal stasjonær, friksjonsfri, virvelfri strøm av en homogen inkompressibel væske hvor det er ingen ytre krefter.



For å beskrive strømmen legger vi et kartesisk koordinatsystem (x, y) med origo i O og et polarkoordinatsystem (r, θ) som vist på figuren. Enhetsvektorene i polarkoordinatsystemet er $(\boldsymbol{i}_r, \boldsymbol{i}_\theta)$. Gradienten til en skalar β og

(Fortsettes side 2.)

divergensen til vektoren $\boldsymbol{v}$ i polarkoordinater er hhv. gitt ved

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial r}\boldsymbol{i}_r + \frac{\partial\beta}{r\partial\theta}\boldsymbol{i}_\theta \quad \text{og} \quad \nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta}$$

hvor (v_r, v_θ) er komponentene av $\boldsymbol{v}$.

a) Vis at det eksisterer et hastighetspotensial (ϕ) og en strømfunksjon (ψ). Hvilken likning oppfyller ϕ og ψ?

b) Finn relasjonene mellom ϕ og ψ både i kartesiske og polar-koordinater.

c) Vis at de følgende tre hastighetspotensialene

$$\phi_1 = -Ux\,, \qquad \phi_2 = \frac{Bx}{r^2}\,, \qquad \phi_3 = C\theta$$

hvor $r^2 = x^2 + y^2$ representerer mulige strømninger i væsken. Finn de tilhørende strømfunksjonene og skisser strømlinjene for de tre feltene. U, B og C er konstanter.

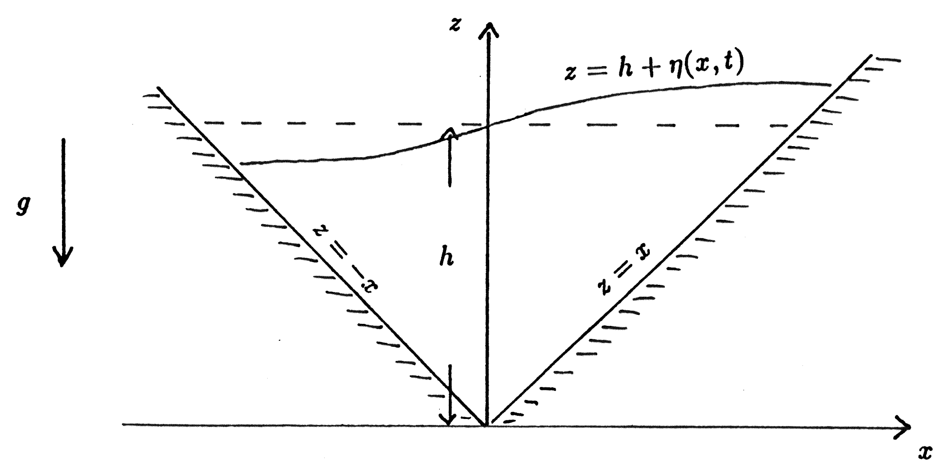
d) Vis at potensialet $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$ representerer en mulig strøm om en sylinder med sentrum i origo O og bestem B når radius i sylinderen er a.

e) Bestem konstanten C slik at punktet P med kartesiske koordinater $(0, -a)$ på sylinderflaten blir et stagnasjonspunkt.

f) Finn trykket langs sylinderflaten og den totale trykk-kraften pr. lengdeenhet som virker på sylinderen når trykket i punktet P er p_0.

Oppgave 2.

Vi betrakter to-dimensonal periodiske svingninger av en homogen inkompressibel friksjonsfri væske i en beholder som skissert på figuren. Bevegelsen forutsettes virvelfri.



(Fortsettes side 3.)

Veggene er gitt ved likningene $z = \pm x$ hvor z-aksen er vertikal og origo O ligger i det dypeste punktet i beholderen. Når væsken er i ro ligger vannspeilet i avstand h over x-aksen. Væsken settes i periodiske svingninger med liten amplitude og væskeoverflaten er gitt ved

$$z = h + \eta(x,t)$$

hvor η er forflytningen av overflaten utfra likevektstillingen. Tyngdeakselerasjonen betegnes ved g og tyngden er den eneste ytre kraft som virker. Trykket i luften over væsken er p_0.

a) Vis at de lineariserte grenseflatebetingelsene for hastighetspotensialet ϕ kan skrives

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\phi}{\partial z} &= 0 \qquad \text{for} \quad z=h \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial z} &= 0 \qquad \text{for} \quad z=x \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial z} &= 0 \qquad \text{for} \quad z=-x \end{aligned}$$

b) Vis at $\phi = Axz\cos\omega t$, hvor A og ω er konstanter, er en mulig løsning og bestem perioden for svingningen.

c) Bestem den tilhørende strømfunksjonen (ψ) og overflateforflytningen η. Skisser strømlinjene og overflateformen.

d) Vis at den mere generelle funksjonsformen $\phi = B(\sinh kx \sin kz + \sin kx \sinh kz)\cos\omega t$ hvor B, k og ω er konstanter også er en mulig løsning. Bestem de to relasjonene som må gjelde mellom ω, k og h.

e) Hvilke krav må en legge på k for at løsningen i d) skal reduseres til en løsning av formen gitt i b)?

SLUTT