UNIVERSITETET I OSLO

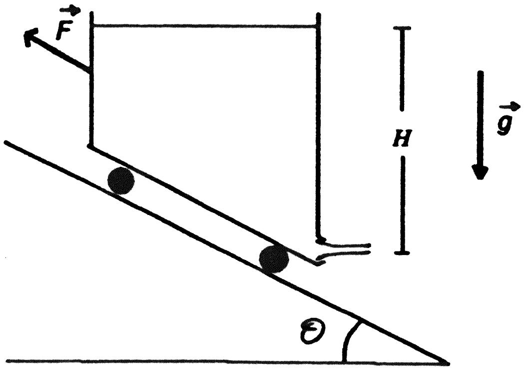
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	ME 102 — Innføring i fluidmekanikk.
Eksamensdag:	Onsdag 9. juni 1993.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsammlung.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

En åpen vogn fylt med homogen, inkompressibel og friksjonsfri væske, med tetthet ρ fastholdes på et skråplan ved hjelp av kraften $\boldsymbol{F}$ (se figur). Vogna er masseløs og kraften $\boldsymbol{F}$ er rettet parallelt med skråplanet. Væsken strømmer ut av et hull i vogna, og idet væskestrålen forlater vogna er den rettet i horisontal retning og har tverrsnittsareal a. Vognas tverrsnittsareal i horisontalplanet er A, og høyden mellom hullet senter og væskeoverflaten er H. Vi har at $a \ll A$ og $a \ll H^2$, da kan væskens hastighet regnes tilnærmet lik null ved overflaten, og konstant over tverrsnittet av hullet. Eneste volumkraft er tyngden, og det er ingen friksjon mellom vogn og underlag. Atmosfæretrykket er konstant.



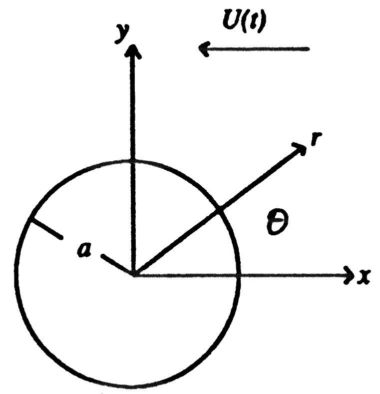
(Fortsettes side 2.)

(a) Finn væskens utløpshastighet.

(b) Bestem kraften $\boldsymbol{F}$. Massen til væsken i vogna kan settes lik m.

Oppgave 2.

En homogen, inkompressibel, friksjonsfri væske med tetthet ρ strømmer virvelfritt forbi en uendelig lang sirkulær sylinder med radius a. Strømningen er todimensjonal, og sylinderen, som er i ro, er plassert slik at aksen går gjennom origo i vå}rt koordinatsystem (se figur). Uendelig langt fra sylinderen er hastighetsfeltet gitt ved $\boldsymbol{v} = -U(t)\boldsymbol{i}$, hvor $\boldsymbol{i}$ er enhetsvektoren langs x-aksen og $U(t)$ er en gitt funksjon av tiden. Vi ser bort fra volumkrefter.



(a) Formuler randverdiproblemet for hastighetspotensialet ϕ.

(b) Vis at

$$\phi = -U(t)(r + a^2/r)\cos\theta,$$

og bestem partikkelakselerasjonen i punktet $x = 0$, $y = a$.

(c) Finn trykket ved sylingerens overflate når trykket i forkant av sylinderen ($x = a$, $y = 0$) er p_s. Beregn trykkraften pr. lengdeenhet som virker på sylinderen fra væsken.

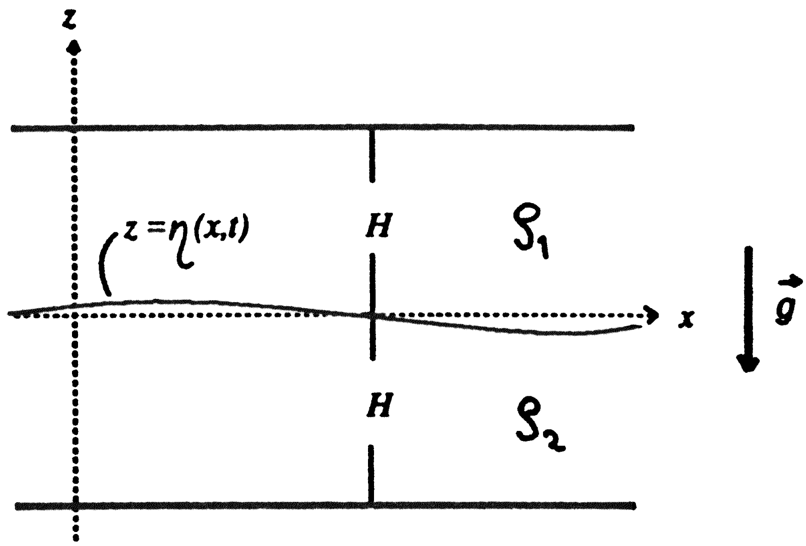
(d) Nå går vi over til å betrakte situasjonen hvor sylinderen beveger seg med hastigheten $U(t)\boldsymbol{i}$ gjennom væsken. Uendeling langt fra sylinderen er v/aesken nå i ro. Finn, eventuelt ved hjelp av resultater fra tidligere punkter, trykkraften pr. lengdeenhet som virker fra v/aesken på sylinderen. Kommenter forskjeller/ likheter med trykkraften beregnet i (c).

Oppgave 3.

To væsker, hver med konstant tetthet h.h.v. ρ_1 og ρ_2 befinner seg i ro i tyngdefeltet mellom to horisontale plan. Hvert av v/aeskelagene har tykkelse H. Væskene settes i todimensjonal bevegelse slik at skilleflaten mellom dem antar formen $\eta(x,t) = a\sin(kx - \omega t)$ hvor k og ω er konstanter og t er tiden. $ka \ll 1$ og $a/H \ll 1$

(Fortsettes side 3.)

slik at grenseflatebetingelsene for væskebevegelsen kan lineariseres. Bevegelsen er friksjonsfri.



(a) hvorfor kan væskebevegelsen i hvert av lagene beskrives ved et hastighetspotensial? Hvilken betingelse må ρ_1 og ρ_2 oppfylle?

(b) Utled og lineariser randverdiproblemet for hastighetspotensialene i de to væskene.

(c) Løs det lineariserte randverdiproblemet.

(d) Bestem fasehastighet og gruppehastighet for bølgene på skilleflaten når bølgelengden er mye mindre enn avstanden mellom de to planene.

SLUTT

Formler

La (r, θ) være plarkoordinater og $\beta(r, \theta)$ en skalar funksjon. Da er

$$\nabla^2 \beta(r, \theta) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \beta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \beta}{\partial \theta^2}$$

og

$$\nabla \beta(r, \theta) = \boldsymbol{i}_r \frac{\partial \beta}{\partial r} + \boldsymbol{i}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial \beta}{\partial \theta}.$$

SLUTT