UNIVERSITETET I OSLO

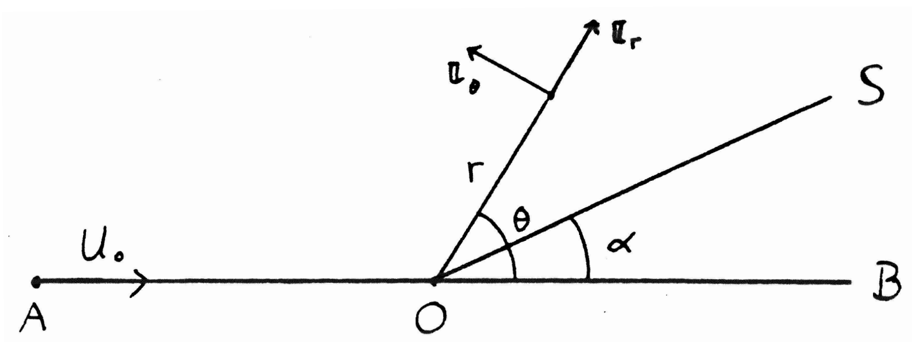
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	ME 102 — Innføring i fluidmekanikk.
Eksamensdag:	Torsdag 5. desember 1996.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsammlung.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Vi skal betrakte en stasjonær to-dimensjonal og virvelfri strøm av en homogen, inkompressibel, frisksjonsfri væske og vi skal beskrive strømmen i et plant polarkoordinatsystem (r, θ)



I polarkoordinater er hastighetsfeltet gitt ved $\boldsymbol{v} = v_r \boldsymbol{i}_r + v_\theta \boldsymbol{i}_\theta$ hvor v_r og v_θ er hastighetskomponentene henholdsvis i r og θ retning og $\boldsymbol{i}_r$ og $\boldsymbol{i}_\theta$ er de tilhørende enhetsvektorene. Vinkelen θ ligger i intervallet $[0, \pi]$.

(Fortsettes side 2.)

a) Forklar hvorfor vi kan innføre et hastighetspotensiale ϕ hvor hastighets-komponentene er gitt ved

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \qquad v_\theta = \frac{\partial \phi}{r\partial \theta}$$

b) Vis at hastighetspotensialet oppfyller Laplacelikningen

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0$$

Hint: $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}$.

c) Forklar at det også eksisterer en strømfunksjon ψ slik at

$$v_r = -\frac{\partial \psi}{r\partial \theta} \qquad v_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

d) Vis at hastighetspotensialet

$$\phi = Cr^{p+1}\cos[(p+1)\theta - p\pi]$$

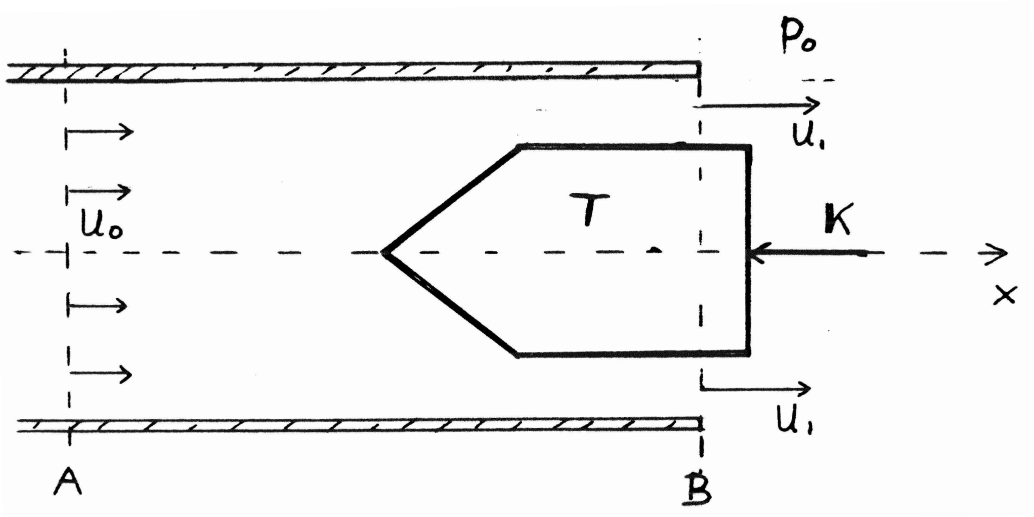
hvor C og p er konstanter representerer en mulig strømning i væsken når vi ser bort fra randkrav.

e) Finn den tilhørende strømfunksjonen.

f) Vis at AO er en strømlinje og bestem p slik at OS også er en strømlinje når vinkelen $BOS = \alpha$. Bestem konstanten C når strømhastigheten ved A, i avstand a fra O, er U_0 med retning som vist på figuren.

Oppgave 2.

En sirkulær sylinderformet tapp (T) med kjegleformet spiss holdes fast i åpningen av et sirkulært rør slik som vist på figuren. Radius i røret og den sylinderformede delen av tappen er henholdsvis R og a. Senteraksen i tappen faller langs senteraksen av røret (x-aksen)



(Fortsettes side 3.)

Gjennom røret er det en stasjonær strøm av en homogen inkompressibel og friksjonsfri væske. Strømhastigheten i spalten mellom rørveggen og tappen ved røråpningen B er U_1 og den antaes å være konstant over spalten. Lufttrykket ved åpningen er p_0, tettheten av væsken er ρ og enhetsvektoren i x-retning betegnes $\boldsymbol{i}$. Vi ser bort fra tyngdekraft og andre volumkrefter.

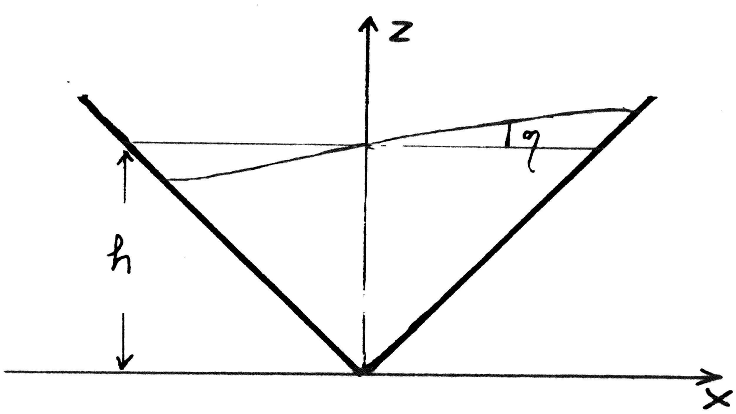
a) Finn strømhastigheten, U_0, ved snittflaten A oppstrøms for tappen når vi antar at hastigheten er konstant over snittflaten.

b) Finn trykket p_A ved snittflaten A.

c) Bestem kraften $\boldsymbol{K}$ som skal til for å holde tappen på plass i strømmen.

Oppgave 3.

Vi betrakter en to-dimensjonal virvelfri bevegelse av en friksjonsfri inkompressibel væske hvor veggene i beholderen er plane og danner en vinkel på 45° med horisontalplanet (x-aksen).



Ved likevekt er overflaten i væsken plan og i høyde $z = h$ over horisontalplanet x.

a) Vis at hastighetspotensialet

$$\varphi = A(t)xz + B(t)$$

hvor $A(t)$ og $B(t)$ er funksjoner av tiden t kan beskrive en mulig bevegelse av væsken i karet som også oppfyller grenseflatebetingelsene på veggene $z = \pm x$.

(Fortsettes side 4.)

b) Vi antar at forskyvningen av væskeoverflaten η er liten ($\eta \ll h$) slik at likningene kan lineariseres. Forklar hvorfor betingelsene

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\eta = f(t)$$

og

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

må være oppfylt ved $z = h$.

c) Bruk betingelsene i b) til å finne en differensiallikning for $A(t)$ og vis at

$$A(t) = A_0 \sin \sqrt{\frac{g}{h}}\, t$$

når vi krever at $A(t = 0) = 0$.

d) Bestem $\eta(x, t)$.

SLUTT