UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	ME 102 — Innføring i fluidmekanikk.
Eksamensdag:	Torsdag 4. desember 1997.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsammlung.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Vi betrakter plan to-dimensjonal virvelfri strøm av en homogen, inkompressibel væske og beskriver bevegelsen i forhold til et kartesisk koordinatsystem (x, y).

a) Forklar at det eksisterer et hastighetspotensiale ϕ og vis at $\phi = A(x^3 - 3xy^2)$, hvor A er en positiv konstant, representerer en mulig bevegelse.

b) Vis at det eksisterer en strømfunksjon ψ og finn strømfunksjonen som tilsvarer potensialet i a). Finn strømlinjene $\psi = 0$ og skisser strømlinjebildet.

c) Finn akselerasjonen for en partikkel som flyter i feltet.

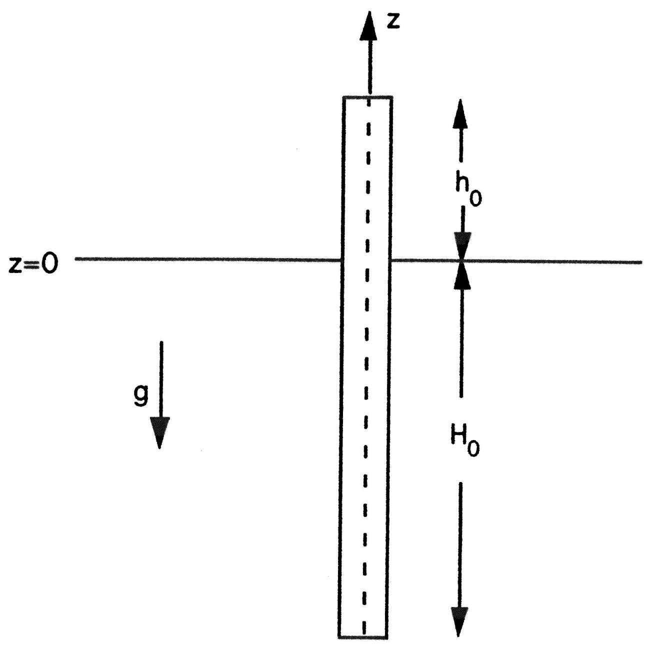
d) Bestem trykkgradienten i feltet når vi antar at det er ingen volumkrefter (tyngdekrefter) som virker.

e) Finn trykket når vi antar at trykket i origo er p_0.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.

En sirkulær sylinder med radius r og lengde L flyter med lengdeaksen (z-aksen) i vertikal stilling i en homogen inkompressibel væske med tetthet ρ. Massen av sylinderen er M. Ved likevekt er vannspeilet i $z = 0$ og lengden av den delen av sylinderen som er over vann er h_0 mens lengden av delen som er under vann er H_0 ($L = h_0 + H_0$). Vi antar at det er hydrostatisk trykkfordeling i væsken.



a) Beregn trykk-kraften på sylinderen ved likevekt.

b) Bestem lengden (H_0) av den delen av sylinderen som er under vann ved likevekt.

Vi løfter nå sylinderen rett opp et lite stykke ξ_0 slik at sylinderens topp får avstanden $\xi_0 + h_0$ fra vannspeilet og slipper sylinderen fra ro. Vi forutsetter at vannspeilet holder seg konstant og at en fortsatt kan regne med hydrostatisk trykk i væsken. I den etterfølgende bevegelse vil avstanden mellom sylinderens topp og vannspeilet være gitt ved $\xi(t) + h_0$ hvor $\xi(t)$ er en funksjon av tiden.

c) Vis at

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\Omega^2\xi$$

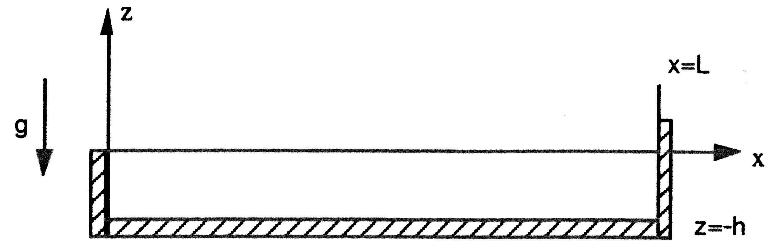
og bestem konstanten Ω. Løs likningen med de gitte initialbetingelsene.

d) Hvor i sylinderen må tyngdepunktet ligge for at den skal bli stående stabilt i vertikal retning?

(Fortsettes side 3.)

Oppgave 3.

Vi betrakter plane to-dimensjonale svingninger (bølger) av en homogen, inkompressibel og friksjonsfri væske i et rektangulært basseng med x- og z-aksen henholdsvis i horisontal og vertikal retning som vist på figuren.



Lengden av bassenget er L og væskedypet er h når væsken er i ro og væskeoverflaten faller da sammen med x-aksen. Vi antar at svingningene (bølgene) i væsken har så liten amplitude at alle likninger kan lineariseres. Tyngdens akselerasjon er g.

a) Når det er svingninger i væsken antar vi at den horisontale strømhastigheten gitt ved
$$u = u_0 \sin kx \sin \omega t$$
hvor u_o, k og ω er konstanter. Hvordan må k velges for at u skal oppfylle randbetingelsene?

b) Vis at den vertikale strømkomponenten som tilsvarer u gitt i a) er
$$w = -u_0 k(z + h) \cos kx \sin \omega t$$

c) Finn overflatehevningen, η, som tilsvarer strømfeltet gitt i a) og b) og bestem relasjonen mellom konstantene k og ω når vi antar hydrostatisk trykkfordeling i væsken.

d) Finn perioden, T, for svingningene uttrykt ved L, g og h. Gi en fysikalsk tolkning av dette resultatet for svingningen med lengst periode.

e) For at vi skal ha hydrostatisk trykkfordeling i væsken følger det fra den vertikale komponenten av bevegelseslikningen at $|\frac{\partial w}{\partial t}| \ll g$. Hvilket krav på parameteren kh leder dette til?

SLUTT