

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: ME 102 — Innføring i fluidmekanikk.

Eksamensdag: Torsdag 3. desember 1998.

Tid for eksamen: 09.00 – 15.00.

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg: Ingen.

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Matematiske Formelsammling.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Vi betrakter to-dimensjonal virvelfri strøm av en homogen inkompressibel væske og beskriver strømmen i et plant polarkoordinatsystem (r, θ) med tilhørende enhetsvektorer \mathbf{i}_r og \mathbf{i}_θ . Strømhastighetsvektoren $\mathbf{v} = v_r \mathbf{i}_r + v_\theta \mathbf{i}_\theta$ hvor v_r og v_θ er komponentene henholdsvis langs r og θ retningen. Du får oppgitt følgende relasjoner:

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\mathbf{i}_r + \frac{\partial\varphi}{r\partial\theta}\mathbf{i}_\theta$$
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}$$

- Hvorfor kan hastighetsvektoren skrives $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ og hva kaller vi φ ? Finn differensiallikning som φ oppfyller.
- Vis at vi kan innføre en strømfunksjon ψ og finn relasjonene mellom φ og ψ .
- Gitt $\varphi = A \ln r + B\theta$ hvor A og B er konstanter. Vis at φ representerer en mulig strømmingstilstand når feltet er uten begrensninger.

(Fortsettes side 2.)

- d) Finn den tilhørende strømfunksjonen og skisser strømlinjene når $A > 0$ og $B = -A$. Angi retningen på strømhastigheten.

Oppgave 2.

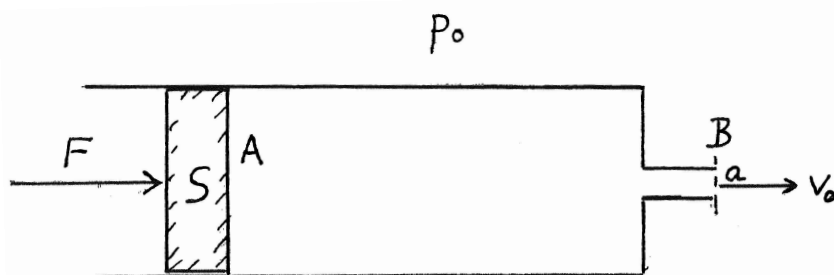
Bernoullis trykklikning for en homogen inkompressibel væske kan skrives

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gz = \text{konstant}$$

- a) Navngi størrelsene som inngår i likningen og skriv opp betingelsene for at likning skal gjelde.
- b) Utled Bernoullis likning på formen ovenfor fra bevegelseslikningen.
Hint:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) + \mathbf{c} \times \mathbf{v} \quad \text{hvor } \mathbf{c} = \nabla \times \mathbf{v}.$$

En vannsprøyte har form som skissert på figuren. Stemplet S som har tverrsnittsareal A skyves med en kraft F slik at det strømmer væsken ut gjennom utløpet B i en stråle med tverrsnittsareal a .



Lufttrykket utenfor sprøyten er p_0 . Vi ser bort fra tyngdens virkning.

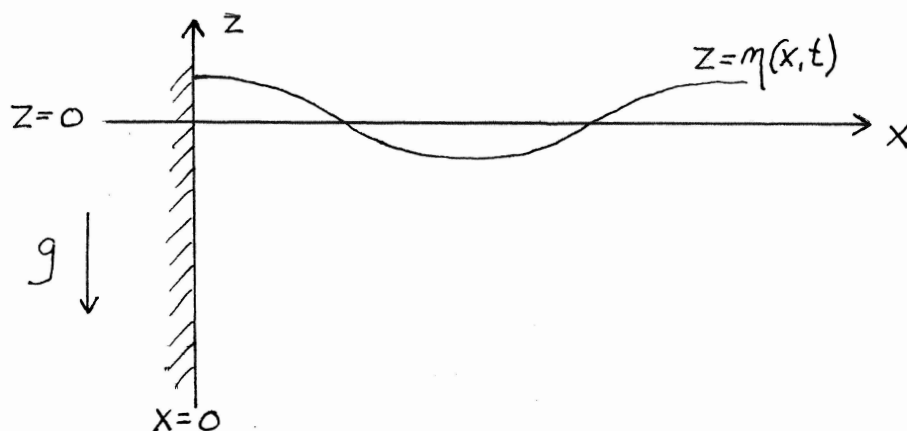
- c) Med hvilken hastighet må stemplet skyves når væsken strømmer ut ved B med hastighet v_0 ?
- d) Hvor stor er kraften F på stempelet?

Oppgave 3.

Vi betrakter to-dimensjonale overflatebølger (tyngdebølger) i en homogen inkompressibel væske og vi antar at bevegelsen er virvelfri. Vi beskriver

(Fortsettes side 3.)

bevegelsen i et plant kartesisk koordinatsystem (x, z) hvor x akse ligger horisontalt langs den uforstyrrede overflaten og z -aksen er vertikal.



Ved $x = 0$ er det en vertikal rett vegg og væskedypet forutsettes å være uendelig stort.

Hastighetspotensialet betegnes $\varphi(x, z, t)$ og overflatehevingen $\eta(x, t)$.

a) Forklar kort hva grenseflatebetingelsene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\eta &= 0 & z = 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} & z = 0 \\ \varphi &\rightarrow 0 & z \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

uttrykker (utledning kreves ikke). Hva må man kreve for at disse betingelsene skal gjelde?

b) Anta overflateheving av formen

$$\eta(x, t) = a \cos kx \sin \omega t$$

hvor a, k og ω er konstanter. Forklar at det tilhørende hastighetspotensialet må ha formen $\varphi = \hat{\varphi}(z) \cos kx \cos \omega t$ og bestem funksjonen $\hat{\varphi}(z)$ og relasjonen mellom k og ω . Vis at grenseflatebetingelsen ved veggene $x = 0$ er oppfylt.

c) Bestem strømfunksjonen som tilsvarende hastighetspotensialet i b) og skisser strømlinjene ved tidspunktet $t = 0$. Hvorfor får strømlinjene samme form når $t \neq 0$?

d) Vis at overflateformen er sammensatt av bølger som forplanter seg både i positiv og negativ x -retning.

$$\text{Hint: } \cos u \sin v = \frac{1}{2}[\sin(u + v) - \sin(u - v)].$$

SLUTT