UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	ME 102 — Innføring i fluidmekanikk.
Eksamensdag:	Torsdag 2. desember 1999.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsammlung.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Vi betrakter et to-dimensjonalt strømfelt i xz-planet med strømvektor $\boldsymbol{v} = \{u, w\}$ hvor u og w er komponentene henholdsvis i x- og z-retning. Den tilhørende strømfunksjonen $\psi = A \cos kx \cos \ell z$ hvor A, k og ℓ er positive konstanter.

a) Finn strømkomponentene u og w og bestem divergens og virvling til strømvektoren.

b) La $-\frac{\pi}{2\ell} \leq z \leq \frac{\pi}{2\ell}$ og $-\frac{\pi}{2k} \leq x \leq \frac{\pi}{2k}$. Bestemt strømlinjene $\psi = 0$. Skisser hvordan strømkomponentene u og w varierer i feltet langs x- og z-aksen og skisser strømlinjene.

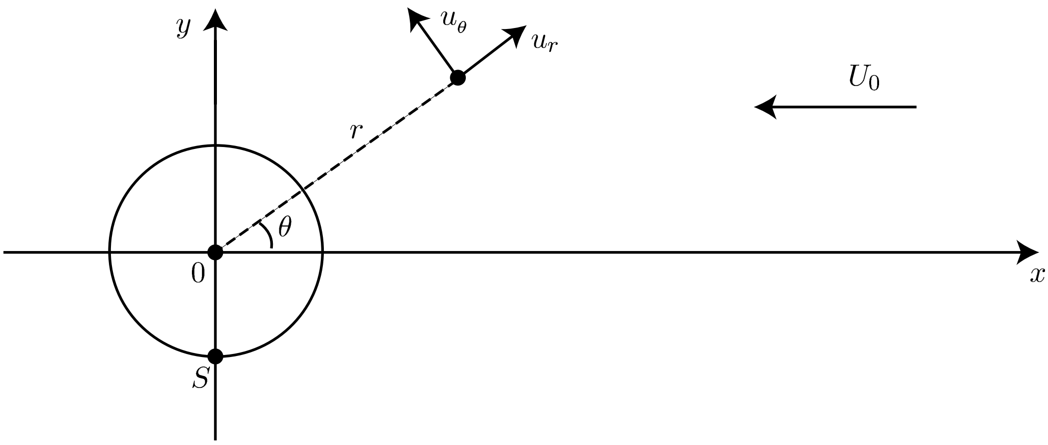
c) Bestem banene for partikler som flyter med feltet i nærheten av origo og forklar hvorfor banene er strømlinjer. Hint: Når $kx \ll 1$, $\ell z \ll 1$ er $\sin kx \cong kx$, $\sin \ell z \cong \ell z$, $\cos kx \cong 1$ og $\cos \ell z \cong 1$.

Oppgave 2.

Vi betrakter en stasjonær to-dimensjonal (plan) virvelfri strøm av en homogen friksjonsfri og inkompressibel væske forbi en sylinder. Sylinderen er

(Fortsettes side 2.)

plassert med sentrum i origo 0 av et rettvinklet kartesisk aksekors x, y og radius i sylinderen er a.



Til hjelp innfører vi også et polarkoordinatsystem r, θ hvor r er avstanden fra origo og θ er vinkelen med x-aksen. I polarkoordinatsystemet har hastighetsvektoren $\boldsymbol{v}$ komponenter u_r og u_θ henholdsvis langs r retningen og retningen normalt denne rettet mot økende verdier av θ. Langt borte fra sylinderen er det en rettlinjet strøm $-U_o\boldsymbol{i}$ hvor $\boldsymbol{i}$ er enhetsvektoren i x-retning.

a) Gjør rede for at det eksisterer et hastighetspotensiale φ i dette tilfellet.

b) Hastighetspotensialet kan skrives om en sum av tre deler som hver for seg oppfyller Laplace-likning (kreves ikke vist)

$$\varphi = Ax + B\frac{x}{r^2} + C\theta$$

hvor A, B og C er konstanter. Gjør kort rede for hva disse tre delfeltene representerer.

c) Bestem konstantene A og B slik at potensialet beskriver strømmen omkring sylinderen. Hint: $u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r}$, $u_\theta = \frac{\partial\varphi}{r\partial\theta}$.

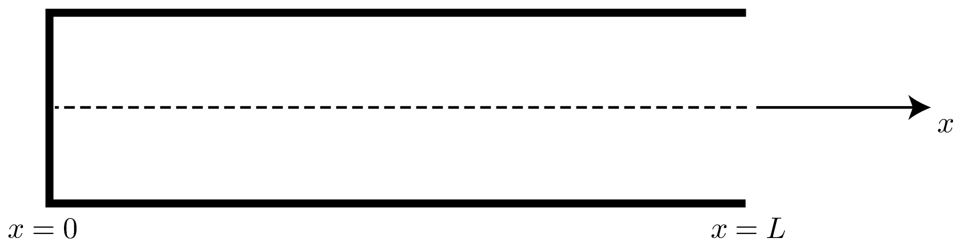
d) Bestem konstanten C når vi krever at det er et stagnasjonspunkt i punktet S på sylinderflaten hvor $r = a$ og $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

e) Sett trykket i stagnasjonspunktet S lik p_0 og finn trykket langs sylinderflaten. Beregn den totale trykkraften på sylinderen.

Oppgave 3.

Et rett jevntykt rør inneholder en kompressibel gass (luft). Røret har lengde L og er orientert med x-aksen langs rørets senterakse.

(Fortsettes side 3.)



Endeveggen ved $x = 0$ kan svinge med små utslag og høy frekvens slik at hastigheten ved endeveggen er $u(x = 0, t) = u_0 \cos \omega t$ hvor u_0 og ω er konstanter og t er tiden. Ved $x = L$ er røret åpent. Når endeveggen er i ro er lufttrykket både innenfor og utenfor røret p_0 og tettheten i lufta er ρ_0. Svingningene av endeveggen ved $x = 0$ gjør at det oppstår plane en-dimensjonale lydbølger i røret. Inne i røret er trykkperturbasjonene på grunn av lydbølgene er $p' = p'(x, t)$ og hastigheten i lydfeltet er $u(x, t)$. Vi ser bort fra tyngdekraften og regner lufta som friksjonsfri. Det kan da vises (bevis kreves ikke) at

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}$$

hvor c er en konstant.

a) Hva kalles denne likningen og hvilken fysikalsk betydning har konstanten c?

b) Vis at for små trykk- og hastighetsperturbasjoner inne i røret så er

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x}$$

c) Vi antar at trykkperturbasjonen kan skrives $p'(x, t) = \hat{p}(x) \sin \omega t$ hvor $\hat{p}(x)$ er en funksjon bare av x-koordinaten. Finn $\hat{p}(x)$. Forklar hvorfor den tilhørende hastigheten $u(x, t) = \hat{u}(x) \cos \omega t$ hvor $\hat{u}(x)$ er en funksjon av x og bestem denne. Integrasjonskonstanter er foreløpig ubestemt.

d) Ved røråpningen $x = L$ antar vi at trykket med god tilnærmelse kan settes lik lufttrykket utenfor røret. Formuler randbetingelsene ved $x = 0$ og $x = L$ og bruk disse til å bestemme integrasjonskonstantene i løsningen funnet under punkt c.

e) For visse verdier av vinkelhastigheten ω kan man få meget store verdier for lydtrykket i røret (resonans).
Bestem perioden for svingningene når det skjer.

SLUTT