

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

- Eksamen i: ME 102 — Innføring i fluidmekanikk.
Eksamensdag: Fredag 8. desember 2000.
Tid for eksamen: 09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.
Vedlegg: Ingen.
Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Matematiske Formel-sammling.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Et to-dimensjonalt strømfelt i x, y -planet har strømvektor $\mathbf{v} = \{u, v\}$ hvor u og v er komponentene henholdsvis i x - og y -retning. Feltet er virvelfritt og fluidet er inkompressibelt.

- Vis at det kan innføres en strømfunksjon $\psi = \psi(x, y)$.
- Vis at $\psi = \psi_0 = \text{konstant}$ beskriver strømlinjer i feltet.
- Gitt strømfunksjonen $\psi_1 = A \ln [x^2 + (y-a)^2]^{1/2}$ hvor A og a er positive konstanter. Finn strømkomponentene u og v . Skisser strømlinjene med strømretning. Hva kalles dette feltet?
- Til feltet ψ_1 adderes et annet felt gitt ved strømfunksjonen $\psi_2 = -A \ln [x^2 + (y+a)^2]^{1/2}$. Hvilket felt representerer ψ_2 ? Vis at strømlinjene for feltet $\psi = \psi_1 + \psi_2$ er gitt ved

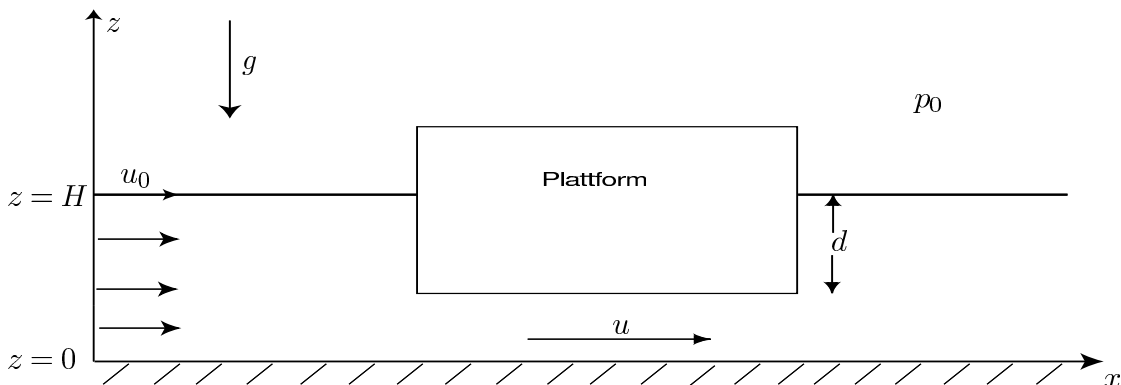
$$x^2 + (y - a\gamma)^2 = a^2(\gamma^2 - 1)$$

hvor γ er en konstant $|\gamma| > 1$. Skisser strømlinjene.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.

En kasseformet plattform flyter i vann hvor bunnen ($z = 0$) er plan og horisontal og vi forutsetter også at overflaten $z = H$ holder seg plan og horisontal. Massen av plattformen er M , bunnarealet er A og plattformen stikker en dybde d ned i vannet. Vannets tetthet er ρ og tyngdens akselerasjon g er rettet i negativ z -retning. Lufttrykket over vannet er p_0 .



- Bestem hvor dypt $d = d_0$ plattformen stikker ned i vannet når plattformen og vannet er i ro og i likevekt.
- Skriv opp Bernoullis likning for inkompressibel strøm (utledning kreves ikke). Definer alle størrelser som inngår i likningen. Hvilke betingelser må være oppfylt for at likningen skal kunne brukes?

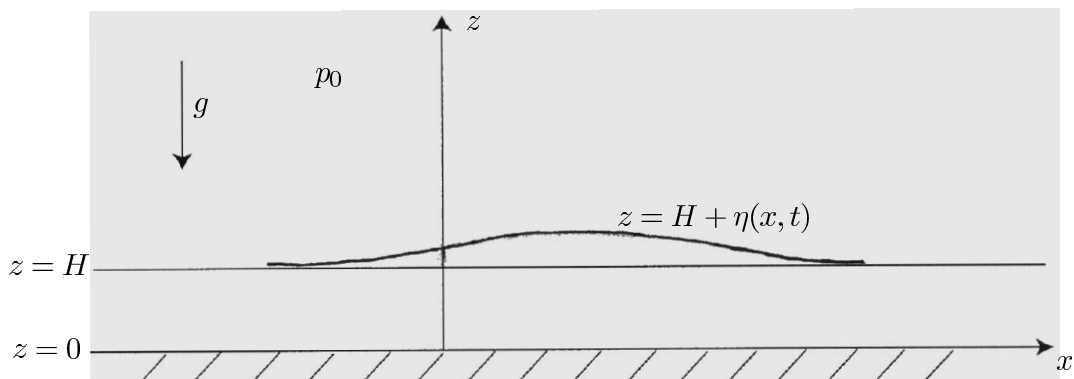
Det oppstår nå en uniform strøm forbi plattformen som er ankret opp slik at den bare kan bevege seg i z -retning. Oppstrøms for plattformen er strømmen u_0 rettet i x -retning og den er konstant over vanddypet. Vi forutsetter at overflaten $z = H$ holder seg plan og at vannstrømmen kan regnes som to-dimensjonal i x, z -planet og at vannstrømmen i sin helhet går under plattformen.

- Bestem strømhastigheten u under plattformen.
- Bestem trykket på bunnplaten av plattformen og den totale trykkraften på plattformen.
- Utled en formel for hvor dypt $d = d_0 + \Delta d$ plattformen stikker når det er strøm. Δd er endringen i dyp i forhold til hvor dypt plattformen stikker uten strøm.

Oppgave 3.

Et lag av en homogen friksjonsfri inkompressibel væske med tetthet ρ grenser mot en plan horisontal bunn ($z = 0$). Koordinataksene z og x er rettet henholdsvis vertikalt og horisontalt slik som figuren viser.

(Fortsettes side 3.)



Eneste ytre volumkraft som virker på væsken er tyngden. Tyngdens akselerasjon er g rettet i negativ z -retning. Ved likevekt er væsken i ro og overflaten er plan og horisontal, $z = H$.

- a) Bestem trykket p i væsken ved likevekt.

Overflaten av væsken forskyves så slik at overflaten er gitt ved $z = H + \eta(x, t)$ hvor forskyvningen $\eta(x, t)$ er en funksjon av x og tiden t . Vi forutsetter at trykket i væsken er gitt ved den hydrostatiske trykkrelasjonen

$$p = p_0 + \rho g(H + \eta - z)$$

Hastighetsfeltet i væsken er to-dimensjonalt i x, z -planet og strømvektoren $\mathbf{v} = \{u, w\}$ er gitt ved komponentene u og w henholdsvis i x - og z -retning. Vi forutsetter at η, u og w er små størrelser slik at linearisering gjelder.

- b) Vis fra bevegelseslikningen at

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

og ved integrasjon av kontinuitetslikningen at

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -H \frac{\partial u}{\partial x}$$

- c) Vis at $\eta(x, t)$ oppfyller likningen

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gH \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

Hva kalles denne likningen? Gi eksempel på løsning av denne likningen og forklar hva disse representerer fysikalsk.

- d) Ta utgangspunkt i løsninger for $\eta(x, t)$ i form av en harmonisk bølgekomponent. Bestem tilhørende verdier av u og w .
- e) Finn krav som må være oppfylt for at typiske ikke-lineære ledd i bevegelseslikningen og grenseflatebetingelsene er små i forhold til lineære leddene som er beholdt ved lineariseringene.

SLUTT