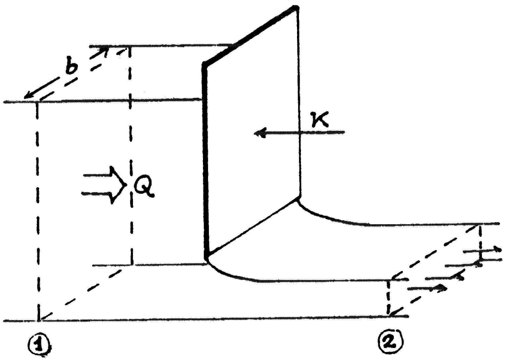
UNIVERSITETET I OSLO

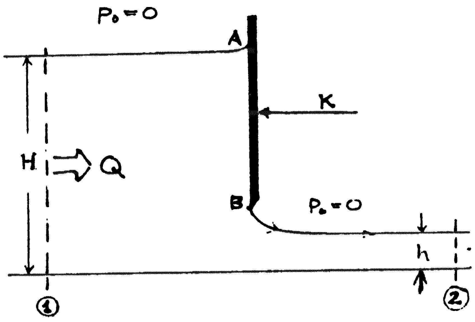
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	ME 102 — Innføring i fluidmekanikk.
Eksamensdag:	Mandag, 9. desember 2002.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsammlung.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.





Væske som regnes homogen, inkompressibel og friksjonsfri strømmer stasjonært i en åpen kanal under en vertikal luke (plate) som vist i figuren. Bredden av kanalen er b, væskens tetthet ρ, det atmosfæriske trykket p_0 settes lik null, tyngdens aksellerasjon er g og volumstrømmen i strømningen er Q. Hastigheten regnes uniform over tverrsnittene 1 og 2. Luka holdes på plass med en kraft K.

a) Sett opp impulslikningen (uten utledning) og forklar betydningen av hvert enkelt ledd i likningen.

b) Bruk impulslikningen til å finne hvor stor kraft K (uttrykt ved Q, b, H, h og g) som trenges for å holde luka på plass.

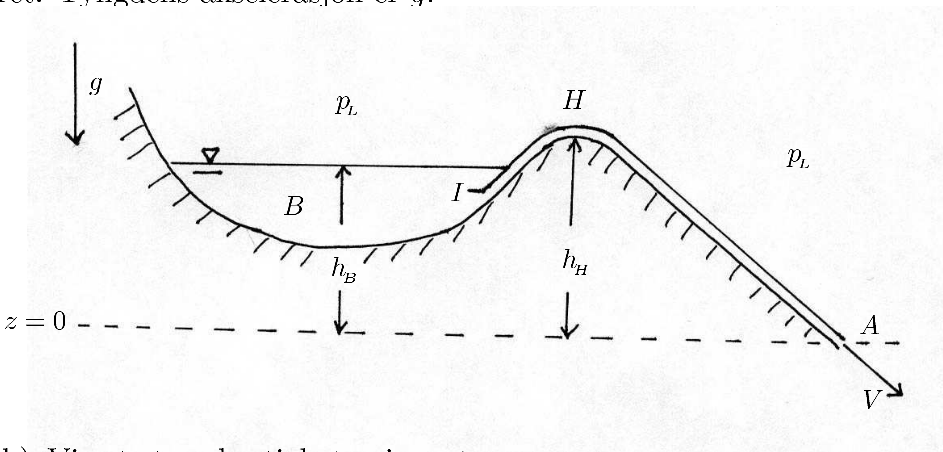
(Fortsettes side 2.)

c) Hva ville kraften bli hvis du antar hydrostatisk trykkfordeling på luka? Skisser (uten utregning) hvordan du mener trykkfordelingen langs AB virkelig er. Vil antagelsen om hydrostatisk trykk gi større eller mindre kraft enn den som er utregnet i b)?

Oppgave 2.

a) Skriv opp Bernoullis likning for strøm i en homogen inkompressibel væske og definer alle størrelsene som inngår i likningen. Hvilke betingelser må være oppfylt for at likningen skal gjelde? Bevis for likningen kreves ikke.

En vannledning fra et stort vannbasseng B går fra innløpet I over en høyde H til tappestedet A. Vannspeilet i bassenget står i en høyde h_B over A og toppen H er i en høyde h_H over A og $h_H > h_B$ (se figur). Lufttrykket er p_L. En pumper ved A til vannet begynner å renne med jevn (stasjonær) fart V gjennom røret. Det forutsettes at en kan se bort fra friksjonsvirkningen i røret. Tyngdens akselerasjon er g.



b) Vis at strømhastigheten i røret er

$$V = \sqrt{2gh_B}$$

c) Finn trykket i rørets toppunkt H.

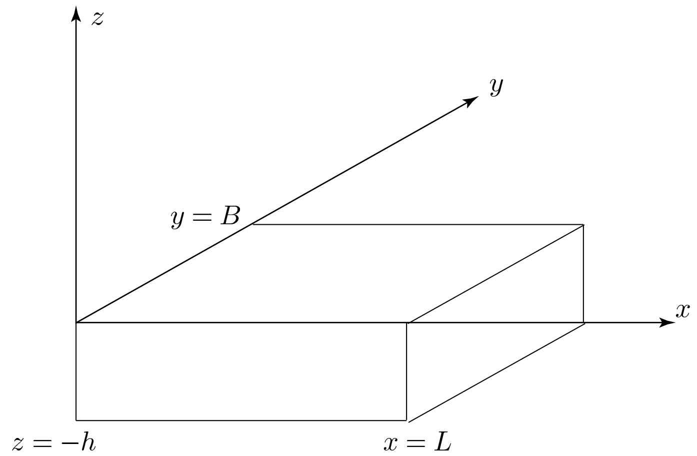
d) Hvordan varierer trykket i røret langs den rette skråningen fra H til A?

e) Er det en grense for hvor høy toppen H kan være for at en skal få vannet til å renne i røret?

(Fortsettes side 3.)

Oppgave 3.

Et svømmebasseng har konstant dybde h, lengde L og bredde B, med $L > B$. La x-aksen være orientert i lengderetning, y-aksen i bredderetning, og overflaten i $z = 0$ ved likevekt.



Anta at vannet er homogent, inkompressibelt og friksjonsfritt, og at bevegelsen er virvelfri.

a) Begrunn hvorfor vi kan uttrykke hastigheten med et potensial ϕ.

La overflaten være gitt ved $z = \eta$, la g være tyngdens akselerasjon og la t være tiden.

b) Vis at de lineariserte likningene i vannet og i overflaten er:

$$\nabla^2\phi = 0 \qquad \text{i vannet}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\phi}{\partial z} &= 0 \\ \eta &= -\frac{1}{g}\frac{\partial\phi}{\partial t} \end{aligned}\right\} \qquad \text{i } \ z = 0$$

c) Skriv ned kinematiske randkrav for de fem flatene i bassenget.

Det er stående bølger i bassenget med overflateform

$$\eta(x, y, t) = a\cos kx \cos \ell y \sin \omega t$$

k, ℓ og ω er konstanter.

d) Vis at hastighetspotensialet ϕ for disse bølgene har formen

$$\phi = \hat{\phi}(z) \cos kx \cos \ell y \cos \omega t$$

og bestem funksjonen $\hat{\phi}(z)$.

e) Finn dispersjonsrelasjonen (relasjonen mellom k, ℓ og ω).

f) Vis at kun et diskret sett av verdier for k, ℓ og ω er tillatt.

(Fortsettes side 4.)

I resten av oppgaven kan vi anta at $\ell = 0$.

g) Beskriv hvordan den stående bølgen med lengst periode ser ut.

h) Hvor dypt må bassenget være for at den lengste stående bølgen kan betraktes som en dyptvannsbølge?

i) Hvordan vil et dypt og et grunt basseng skille seg fra hverandre med hensyn til svingeperiode?

SLUTT