UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK 1300 — Fluidmekanikk.
Eksamensdag:	Onsdag 2. juni 2004.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

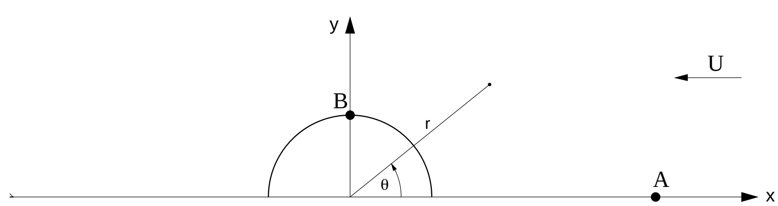
Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

a) Vis at $\phi_1 = Ax$ og $\phi_2 = B\frac{x}{r^2}$ er løsninger av Laplace-likningen

$$(r^2 = x^2 + y^2, \quad A \text{ og } B \text{ er konstanter})$$

Vi ser på en todimensjonal, stasjonær og friksjonsfri strømning av homogen, inkompressibel væske med tetthet ρ om en halvsylinder med radius a. Halvsylinderen ligger i ro på planet $y = 0$ som vist på figuren:



Langt borte fra halvsylinderen er det en uniform, rettlinjet strøm med hastighet $-U\mathbf{i}$. Det er ingen volumkrefter.

b) Vis at hastighetspotensialet

$$\phi = \phi_1 + \phi_2$$

kan beskrive denne strømningen og finn konstantene A og B.

(Fortsettes side 2.)

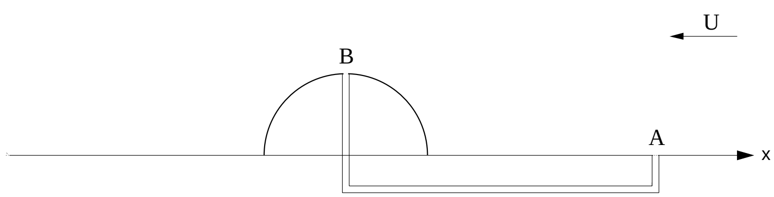
c) Finn trykket $p(r,\theta)$ i strømningen når $p = p_\infty$ langt fra halvsylinderen.

d) Finn et uttrykk for trykkdifferansen Δp mellom punktene $A(r = r_A, \theta = 0)$ og $B(r = a, \theta = \frac{\pi}{2})$ (se fig.).

e) Hvis vi antar at trykket under halvsylinderen (dvs. i området $-a \leq x \leq a,\ y = 0$) er lik stagnasjonstrykket, hva blir den totale trykk-kraften på halvsylinderen?

Præriehunden gjør seg visstnok nytte av trykkdifferansen mellom A og B til naturlig ventilasjon i sine underjordiske tunneller. Den legger opp en jordhaug og graver en tunnell som går fra toppen av jordhaugen til et sted på overflaten et stykke unna.

Vi lar nå vår halvsylinder være en todimensjonal modell for præriehundens jordhaug og forbinder punktene A og B med en tunnell (et rør) slik som vist på figuren nedenfor:



f) 1. Hvorfor blir det en luftstrøm gjennom tunnellen, og hvilken retning har strømmen? (Vi antar at strømningen omkring halvsylinderen er upåvirket av luftstrømmen gjennom tunnellen.)

Middelhastigheten V i tunnell-strømmen regnes konstant langs tunnellen, og vi antar at det totale trykkfallet (mellom tunnellens endepunkter) pga. friksjon er

$$K\tfrac{1}{2}\rho V^2 \quad \text{der } K \text{ er en konstant.}$$

2. Finn $\frac{V}{U}$ når vi for enkelhets skyld regner at A ligger langt fra halvsylinderen. $\left(\frac{r_A}{a} \gg 1\right)$
3. Hvilken plassering av A $(r_A \geq a, y = 0)$ ville gi størst gjennomstrømning i tunnellen?
4. Ville det ha noen virkning for beregningene hvis vinden (den uniforme strømmen langt fra halvsylinderen) skiftet retning og blåste i positiv x-retning? Svarene må begrunnes.

I sylindriske polarkoordinater r, θ, z er

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{\partial}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

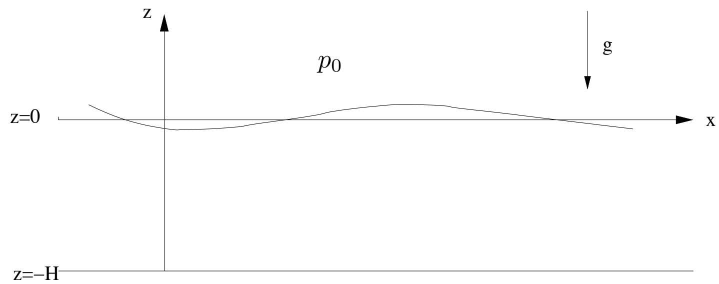
og følgende integraler kan være nyttige:

$$\int_0^\pi \sin^2\theta\, d\theta = \int_0^\pi \cos^2\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2}$$

(Fortsettes side 3.)

Oppgave 2.

Vi skal se på overflatebølger i et væskelag (med uendelig horisontal utstrekning) over en plan horisontal bunn som vist på figuren.



Eneste volumkraft er tyngden, og vi legger inn et aksekors som vist på figuren. Ved likevekt er væsken i ro og overflaten er plan og horisontal, $z = 0$. Trykket over væsken er konstant og lik p_0. Vi forstyrrer likevektstilstanden og setter i gang en bevegelse i væsken ved tiden $t = t_0$ slik at overflaten for $t > t_0$ er gitt ved

$$\eta(x,t) = a \sin k(x - ct)$$

der a, k og c er konstanter, og vi forutsetter at $\left|\frac{a}{H}\right| \ll 1$ og $|ak| \ll 1$. Væsken regnes som homogen og inkompressibel med tetthet ρ, og bevegelsen er friksjonsfri.

a) Vis at bevegelsen må være hvirvelfri.

b) Utled Euler trykklikning

$$p = -\rho\left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \tfrac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + gz\right] + f(t)$$

der ϕ er hastighetspotensialet, p trykket og g tyngdens aksellerasjon. Sett $f(t) = p_0$ i resten av oppgavene.

c) Sett opp de eksakte grenseflatebetingelser for problemet uttrykt ved ϕ, η og g og linearisér disse betingelser.

d) Vi antar at hastighetspotensialet for bevegelsen er gitt ved

$$\phi(x,z,t) = F(z) \cos k(x - ct)$$

Finn $F(z)$.

e) Finn c uttrykt ved g, k og H. Hva kalles denne relasjonen?

f) Finn den maksimale verdi av c for den gitte dybde H. Hva kalles bølgene i dette tilfellet?

g) Finn trykket i væsken. Hvordan blir trykkfordelingen i tilfellet i spørsmål f)? Kommenter resultatet.

SLUTT