

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MEK 4100 — Matematiske metoder i mekanikk

Eksamensdag: Torsdag 12. juni 2014.

Tid for eksamen: 14.30 – 18.30.

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg: Formelark.

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Matematiske Formel-samlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 (vekt 20%)

En likning er gitt ved

$$x^2 - 3x + 2 = e^{-kx}, \quad (1)$$

og vi vil finne tilnærmede løsninger for store verdier av k .

1a (vekt 10%)

Forklar hvorfor løsningene er tilnærmet $x \approx 1$ og $x \approx 2$ når $k \rightarrow \infty$. Det kan være en god ide å tegne de to sidene i likning (1) for en stor verdi av k . Vi vil fortsette med den løsningen som ligger nær 1.

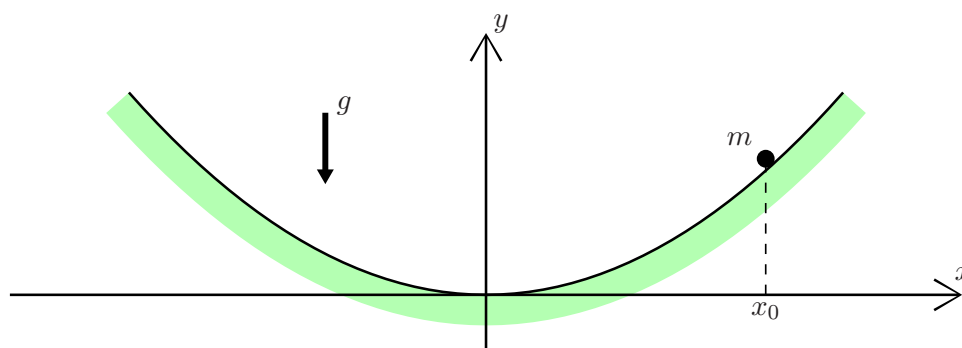
Innfør perturbasjonsrekken

$$x = 1 + x_1 + x_2 + \dots \quad \text{der} \quad 1 \gg x_1 \gg x_2,$$

og bestem x_1 ved dominant-balanse betraktning.

1b (vekt 10%)

Finn x_2 .

Oppgave 2 (vekt 50%)

Føring med partikkel i initiell posisjon.

En partikkel, med masse m , glir i tyngdefeltet på en friksjonsfri føring $y = \frac{1}{2}\alpha x^2$. Bevegelsen foregår i xy -planet der y -aksen er vertikal og x -aksen horisontal. Ved tiden $t = 0$ er partikkelen i ro ved $x = x_0$.

NB: I denne oppgaven er det mulig å løse punkt d uten å løse punktene a-c

2a (vekt 10%)

Posisjonen av partikkelen, x , avhenger av de øvrige parameterene x_0 , α , g , m og t . Vis at x kan uttrykkes

$$x = x_0 F(\pi_1, \pi_2),$$

der π_1 og π_2 er dimensjonsløse tall. Gi uttrykk for π_1 og π_2 .

2b (vekt 10%)

Vi beskriver partikkelen ved koordinaten x . Finn Lagrangesfunksjonen og sett opp Lagrangeslikningen. Denne har et førsteintegral i dette tilfellet. Finn det og forklar hva det svarer til fysisk.

2c (vekt 10%)

Vi antar nå at partikkelen gjør små svingninger, dvs. at x_0 er liten i en eller annen forstand. Reskaler slik at Lagrangeslikningen fra forrige punkt gir

$$\frac{d}{d\tau} \left((1 + \epsilon z^2) \frac{dz}{d\tau} \right) + z = 0, \quad (2)$$

og initialbetingelsen

$$z(0) = 1, \quad \frac{dz(0)}{d\tau} = 0, \quad (3)$$

der τ og z er hhv. dimensjonsløs tid og horisontal posisjon (x), mens ϵ er en liten parameter.

(Fortsettes på side 3.)

2d (vekt 20%)

Finn en periodisk approksimasjon til løsningen av (2) og (3), gyldig tom. orden ϵ .

Oppgave 3 (vekt 30%)

Et randverdiproblem er definert ved

$$\epsilon y'' - f(x)y = g(x), \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2,$$

der f og g er gitte funksjoner som har Taylorekker i alle punkter. Funksjonene f og g er positive på intervallet $[0, 1]$ og ϵ er en liten parameter. Vi søker en tilnærmet løsning vha. grensesjiktsteori.

3a (vekt 10%)

Finn den ytre løsningen og forklar hvorfor vi må ha grensesjikt ved begge render.

3b (vekt 20%)

Finn en uniform tilnærmelse.

SLUTT