UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK4100 — Matematiske metoder i mekanikk
Eksamensdag:	Torsdag 15. desember 2017
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Formelark
Tillatte hjelpemidler:	Mathematical Handbook, av K. Rottmann. Sertifisert kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 (vekt 25%)

Et ikkelineært randverdiproblem er gitt ved

$$\epsilon \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y^2 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2,$$

der $\epsilon \to 0$. Finn en uniform tilnærmelse (*unified solution*) ved hjelp av grensesjiktsteori.

Oppgave 2 (vekt 40%)

En dempet harmonisk oscillator er styrt av likningen:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + Cx^2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0$$

der m er systemets masse, x er posisjonen, k en fjærkonstant og C en dempningskoeffissient. Vi har videre gitt initialbetingelsene:

$$x(0) = x_0, \quad \frac{\mathrm{d}x(0)}{\mathrm{d}t} = 0$$

2a (vekt 5%)

Finn et komplett sett av dimensjonsløse tall fra parameterene i problemet (inklusive x og t).

(Fortsettes på side 2.)

2b (vekt 10%)

Gjør problemet dimensjonsløst slik at det transformeres til:

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}s^2} + \epsilon u^2 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} + u = 0,$$
$$u(0) = 1, \quad \frac{\mathrm{d}u(0)}{\mathrm{d}s} = 0,$$

der s er dimensjonsløs tid, u er dimensjonsløs posisjon og ϵ skal bestemmes. Vis eksplisitt hvordan u, s og ϵ relaterer seg til de dimensjonsløse tallene fra forrige delpunkt.

2c (vekt 25%)

Vi antar $\epsilon \ll 1$ og innfører en langsom skala $\tau = \epsilon s$. Finn den ledende tilnærmelsen til løsningen av systemet i forrige deloppgave ved en toskala-utvikling.

Oppgave 3 (vekt 15%)

En legeme, med masse m, beveger seg horisontalt, langs en rett linje, på et friksjonfritt underlag, påvirket av en fjærkraft. Legemets posisjon defineres da som $\vec{r} = x(t)\vec{\imath}$, der x er forskyvingen fra den posisjonen der fjæra er avspent, og den potensielle energien fra fjærkraften er $\frac{1}{2}kx^2$. Finn Hamiltonfunksjonen og sett opp Hamiltons kanoniske likninger i dette tilfellet.

Oppgave 4 (vekt 20%)

En funksjon er gitt ved

$$f(x) = \frac{1 + \epsilon x}{\cosh^2(x-2)} + \epsilon \tanh(x-2),$$

der cosh og tanh er hhv. hyperbolsk cosinus og hyperbolsk tangens. Finn de to første leddene i en perturbasjonsrekke for maksimumspunktet når $\epsilon \to 0$. Du trenger bare finne x-posisjonen til maksimumspunktet. Det spørres ikke etter maksimalverdien.

SLUTT