24. april 2022

MEK4100

Obligatorisk oppgave 2 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 5. mai 2022, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Merk at man har **ett forsøk** på å få oppgaven godkjent. Dette betyr at det ikke lenger gis andregangsforsøk.

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) senest samme dag som innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Minimum for å få godkjent er å løse minst to av oppgavene.

Oppgave 1. Oppgave 82 i leaflet:

Ei ikkelineær ordinær differensiallikning med randkrav er gitt ved

$$\epsilon \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y^2 = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = \frac{1}{2}$$

hvor $\epsilon \to 0$. Finn en uniform løsning ved å kombinere en ytre løsning med en tilnærming i et grensesjikt.

Plott indre, ytre og uniform løsning for $\epsilon = 0.1$ og $\epsilon = 0.01$.

Oppgave 2. Omtrent oppgave 76 i leaflet:

Ei ordinær differensiallikning er gitt ved

$$\epsilon y'''' + W(x) y = 0$$

hvor $W(x) > 0$ og $\epsilon \to 0$.

Finn de to første leddene i en WKB utvikling for alle løsningene.

Oppgave 3. Omtrent oppgave 77 i leaflet:

Vi skal studere

$$\epsilon \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + W(x) y = 0$$

hvor $W(x)$ er kontinuerlig og $\epsilon \to 0$. Vi har $W(x) > 0$ for $x < x_t$, $W(x_t) = 0$, $W(x) < 0$ for $x > x_t$.

a) Beskriv oppførselen til WKB utviklingen på hver side av x_t og forklar hvorfor utviklingen ikke er gyldig i $x = x_t$. Et slikt punkt kalles et vendepunkt (turning point) og krever spesiell behandling.

b) Introduser en lokal koordinat $z = (x - x_t)/\delta$ i et grensesjikt rundt vendepunktet og finn at oppførselen i grensesjiktet kan tilnærmes ved likninga

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}z^2} = z y$$

som kalles Airy likninga.

I gamle dager konsulterte vi Abramowitz & Stegun, en "telefonkatalog" full av matematiske formler og tabeller, for å jobbe med Airy likninga. Nå for tiden konsulterer vi heller Digital Library of Mathematical Functions som i praksis er en digitalisert utgave av Abramowitz & Stegun https://dlmf.nist.gov.

En god referanse for denne likninga er således https://dlmf.nist.gov/9.2. Se figurer som viser de to fundamentale løsningene $\mathrm{Ai}(z)$ og $\mathrm{Bi}(z)$ her https://dlmf.nist.gov/9.3. I Matlab er disse funksjonene tilgjengelig som henholds `airy(0,z)` og `airy(2,z)`. Vi vil trenge uttryk for asymptotisk oppførsel for store argumenter, de finner vi her https://dlmf.nist.gov/9.7.

For stor og positiv z går $\mathrm{Ai}(z)$ eksponentielt mot null mens $\mathrm{Bi}(z)$ går eksponentielt mot uendelig.

c) Finn en uniform løsning ved å bruke WKB utviklinger som ytre løsninger på hver side av vendepunktet og Airy funksjonen som indre løsning. Pålegg som krav at $y(x)$ har endelig verdi (0) i grensen at $x \to \infty$ og at $y(0) = 1$.

Ekstra: Gjør dette spesielt for $W(x) = -\tanh x$ og plot resultatet for $\epsilon = 0.1$ og $\epsilon = 0.01$.