Løsningsforlag eksamen MEK3220, høst 2013

Geir Pedersen

Oppg. 1 .

a) Kontinuitetslikningen, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, i sylinderkoordinater (bruker formelark)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Siden $w = w(r)$ forsvinner siste ledd og

$$\frac{\partial(ru)}{\partial r} = 0 \Rightarrow ru = A,$$

der A er en konstant. Fordi vi har heft ved sylinderen er $u(a) = 0$ og $A = 0$. Da følger at $u = 0$ overalt.

b) Navier-Stokes likning

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - g\mathbf{k}.$$

Nå er $\mathbf{v} = w(r)\mathbf{k}$ som gir $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$ og

$$\nabla \mathbf{v} = \frac{\partial w}{\partial r}\mathbf{i}_r\mathbf{k}.$$

Da blir

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = w\mathbf{k} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial r}\mathbf{i}_r\mathbf{k}\right) = 0.$$

Hele akselerasjonen er null.
Formelarket gir nå videre

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla^2 w\mathbf{k} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)\mathbf{k}.$$

De tre komponentene av Navier-Stokes likning blir da

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}, \\
0 &= -\frac{1}{r\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta}, \\
0 &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\nu}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right) - g\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Ved sylinderen har vi heft og får randbetingelsen

$$w(a) = 0.$$

Spenningstensoren er

$$\mathcal{P} = -pI + \mu(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^*) = -pI + \mu \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}(\mathbf{i}_r\mathbf{k} + \mathbf{k}\mathbf{i}_r).$$

Den dynamiske betingelsen ved $r = b$ gir så

$$-p_0\mathbf{i}_r = \mathbf{i}_r \cdot \mathcal{P} = -p\mathbf{i}_r + \mu \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\mathbf{k}.$$

Komponentvis

$$p(b, \theta, z) = p_0, \quad \text{og} \quad \frac{\mathrm{d}w(b)}{\mathrm{d}r} = 0.$$

$\mathbf{i}_r$ og $\mathbf{i}_\theta$ komponentene av bevegelseslikningen gir $p = p(z)$, mens betingelsen på normalspenningen ved $r = b$ da fører til

$$p = p_0,$$

overalt.
$\mathbf{k}$ komponenten av bevegelseslikningen kan nå skrives

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{g}{\nu}r,$$

som gir

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} = \frac{g}{2\nu}r + \frac{B}{r},$$

der B er en konstant. Bruker vi nå $\frac{\mathrm{d}w(b)}{\mathrm{d}r} = 0$ finner vi $B = -\frac{gb^2}{2\nu}$ og

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} = \frac{g}{2\nu}\left(r - \frac{b^2}{r}\right).$$

Denne integreres til

$$w = \frac{g}{2\nu}\left(\frac{1}{2}r^2 - b^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) + D\right),$$

der faktoren $1/a$ i logaritmen er tatt med for å unngå benevning og konstanten D er trukket innfor parantesene av bekvemmelighet.
Den kinematiske betingelsen $w(a) = 0$ gir da $D = -\frac{1}{2}a^2$ og

$$w = \frac{g}{2\nu}\left(\frac{1}{2}(r^2 - a^2) - b^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right)\right),$$

c) Spenningen på sylinderen er

$$\mathrm{P} = \mathbf{i}_r \cdot \mathcal{P} = -p_0 \mathbf{i}_r + \mu \frac{\mathrm{d}w(a)}{\mathrm{d}r} \mathbf{k}.$$

Draget er gitt skjærspenningen (det siste leddet) som er konstant på sylinderen. For å få kraften ganger vi bare med arealet (normalspenningen nuller deg forøvrig ut) og setter inn fra uttrykk for $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}$ gitt i forrige delspørsmål

$$D = 2\pi a H \mu \frac{\mathrm{d}w(a)}{\mathrm{d}r} = -2\pi \rho g H (b^2 - a^2).$$

Siden volumet av væsken rundt sylindersegmentet med høyde H er $2\pi H(b^2 - a^2)$ følger at D er tyngden av denne væsken. Slik må det være fordi væska ikke akselereres og vertikal kraft fra sylinderen da eksakt må motvirke tyngden. En mer formell begrunnelse kan gis ved å se på momentumbalense i væskevolumet avgrenset av en z_0 og $z_0 + H$.

Oppg. 2 . Vi ser på et volum τ omsluttet av randa σ.
Kravet til likevekt er at summen av ytre krefter på volumet er null. Vi har to type ytre krefter:
(i) spenningskrefter på overflaten
(ii) volumkrefter

(i): På hvert flatelelement virker spenningskraften

$$\mathbf{P_n}\, d\sigma = \mathbf{n} \cdot \mathcal{P}\, d\sigma.$$

I sum gir dette

$$\int_\sigma \mathbf{n} \cdot \mathcal{P}\, d\sigma.$$

(ii): Et lite volumelement har massen $\rho\, d\tau$ og er da påvirket av tyngdekraften

$$-\rho\, d\tau g \mathbf{k}.$$

Summert:

$$\int_\tau -\rho\, d\tau g \mathbf{k}.$$

Setter vi bidragene sammen

$$\int_\sigma \mathbf{n} \cdot \mathcal{P}\, d\sigma + \int_\tau -\rho g \mathbf{k}\, d\tau = 0.$$

Gauss sats for flateintegralet gir så

$$\int_\tau (\nabla \cdot \mathcal{P} - \rho g \mathbf{k})\; d\tau = 0.$$

Denne er oppfylt for alle τ. Deler vi på volumet og lar det krympe mot null følger da

$$\nabla \cdot \mathcal{P} - \rho g \mathbf{k} = 0.$$

Oppg. 3 .

a) Ved randa $x = \frac{1}{2}a$ er den utadrettede normalen $\mathbf{i}$ og dynamisk randbetingelse gir

$$-p\mathbf{i} = \mathbf{i} \cdot \mathcal{P} = \mathbf{i}p_{xx} + \mathbf{j}p_{xy} + \mathbf{k}p_{xz}.$$

Denne gir $p_{xx} = -p$ og $p_{xy} = p_{xz} = 0$.
Ved $x = -\frac{1}{2}a$ er normalen $-\mathbf{i}$ og betingelsen

$$p\mathbf{i} = -\mathbf{i} \cdot \mathcal{P} = -\mathbf{i}p_{xx} - \mathbf{j}p_{xy} - \mathbf{k}p_{xz},$$

og vi får igjen $p_{xx} = -p$ og $p_{xy} = p_{xz} = 0$.

Tilsvarende får vi
$p_{yy} = -p$ og $p_{xy} = p_{yz} = 0$ ved $y = \pm a$
$p_{zz} = -p$ og $p_{xz} = p_{yz} = 0$ ved $z = \pm a$

Da er
$p_{xy} = 0$ ved de fire rendene gitt ved $x = \pm a$ eller $y = \pm a$.
$p_{xz} = 0$ ved de fire rendene gitt ved $x = \pm a$ eller $z = \pm a$.
$p_{yz} = 0$ ved de fire rendene gitt ved $y = \pm a$ eller $z = \pm a$.

b) Når vi antar at ikke-diagonal-elementene i $\mathcal{P}$ er null overalt i kuben kan vi sette

$$\mathcal{P} = p_{xx}\mathbf{ii} + p_{yy}\mathbf{jj} + p_{zz}\mathbf{kk},$$

og

$$\nabla \cdot \mathcal{P} = \frac{\partial p_{xx}}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Innsetting i likevektslikningen fra forrige oppgave gir da x-komponenten

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} = 0 \Rightarrow p_{xx} = F(y, z),$$

der F er en funksjon som må finnes. Randbetingelsene fra det forrige delspørsmålet gir

$$-p(z) = p_{xx}(\frac{1}{2}a, y, z) = F(y, z) \quad \text{og} \quad -p(z) = p_{xx}(-\frac{1}{2}a, y, z) = F(y, z).$$

Da følger $F = -p(z)$ og $p_{xx} = -p(z)$.

Tilsvarende gir y komponenten $p_{yy} = -p(z)$.

For z-komponenten blir det litt mer komplisert. Likevektslikning gir

$$\frac{\partial p_{zz}}{\partial z} = \rho g \Rightarrow p_{zz} = G(x, y) + \rho g z.$$

Randbetingelsene gir nå

$$z = \frac{1}{2}a: \quad -(p_0 - \frac{1}{2}\rho g a) = -p(\frac{1}{2}a) = p_{zz}(x, y, \frac{1}{2}a) = G(x, y) + \frac{1}{2}\rho g a,$$

og

$$z=-\frac{1}{2}a: \quad -(p_0+\frac{1}{2}\rho g a)=-p(-\frac{1}{2}a)=p_{zz}(x,y,-\frac{1}{2}a)=G(x,y)-\frac{1}{2}\rho g a.$$

Disse gir $G=-p_0$ og $p_{zz}=-p_0+\rho g z=-p(z)$.

Tilsammen: $p_{xx}=p_{yy}=p_{zz}=-p(z)$.
Merknad: denne enkle løsningen kan ikke realiseres dersom ikke tetthetene av kube og væske var like.

c) Hooks lov gir

$$\begin{aligned}
p_{xx} &= \lambda\nabla\cdot\mathbf{u}+2\mu\epsilon_{xx},\\
p_{yy} &= \lambda\nabla\cdot\mathbf{u}+2\mu\epsilon_{yy},\\
p_{zz} &= \lambda\nabla\cdot\mathbf{u}+2\mu\epsilon_{zz},\\
p_{xy} &= 2\mu\epsilon_{xy},\\
p_{xz} &= 2\mu\epsilon_{xz},\\
p_{yz} &= 2\mu\epsilon_{yz}.
\end{aligned}$$

Vi kjenner p'ene og må løse for ϵ'ene.
De tre nederste gir med en gang at $\epsilon_{xy}=\epsilon_{xz}=\epsilon_{xz}=0$.
Siden p_{xx}, p_{yy} og p_{zz} er like gir de tre øverste likningene med en gang at $\epsilon_{xx}=\epsilon_{yy}=\epsilon_{zz}$. Siden $\nabla\cdot\mathbf{u}=\epsilon_{xx}+\epsilon_{yy}+\epsilon_{zz}=3\epsilon_{xx}$ følger

$$-p(z)=(3\lambda+2\mu)\epsilon_{xx}\to\epsilon_{xx}=-\frac{p(z)}{3\lambda+2\mu}$$

Merknad: Innfører vi $E=\mu(2\mu+3\lambda)/(\mu+\lambda)$ (Youngs modul) og $\nu=\lambda/(2\mu+2\lambda)$ (Poissons forhold) kan vi skrive

$$\epsilon_{xx}=\epsilon_{yy}=\epsilon_{zz}=-\frac{1-2\nu}{E}p(z),$$

som viser at tøyningene er sammensatt av en kompresjon og to tverrekspansjoner.

d) Vi må finne u, v og w som passer med ϵ'ene fra forrige delspørsmål.
Vi starter med

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\epsilon_{xx}=-Kp_0, \quad \text{der} \quad K=1/(3\lambda+2\mu).$$

Integrasjon gir

$$u=-Kp_0x+H(y,z).$$

Symmetribetingelsen $u(0,y,z)=0$ gir så $H=0$ og

$$u=-Kp_0x.$$

Tilsvarende gir

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\epsilon_{yy}=-Kp_0,$$

at

$$v=-Kp_0y+Q(x,z).$$

og $v(x,0,z)=0$ gir så

$$v = -Kp_0 y.$$

Integrasjon av

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \epsilon_{zz} = -Kp_0,$$

gir

$$w = -Kp_0 z + R(x,y).$$

Betingelsen $w(x,y,0)=0$ gir $R=0$.
Vi har nå bestemt $\mathbf{u}$. Det gjenstår å sjekke at $\epsilon_{xy} = \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$. Dette blir enkelt oppfylt fordi $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ etc.