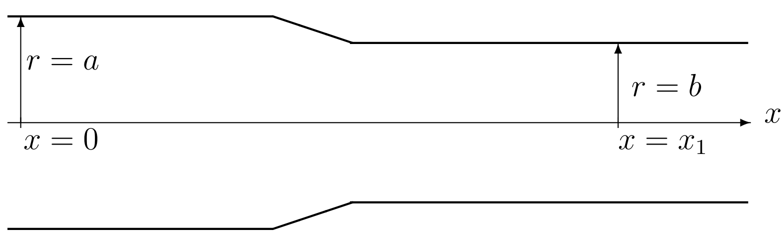
UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

UNDERVEISEKSAMEN I:	MEK3300/4300 – VISKØS STRØMNING OG TURBULENS.
EKSAMENSDAG:	ONSDAG 13/10, 2004.
TID FOR EKSAMEN:	KL. 09.00–12.00.
VEDLEGG:	INGEN.
TILLATTE HJELPEMIDLER:	ROTTMANN: MATHEMATISCHE FORMELSAMMLUNG, GODKJENT KALKULATOR.

OPPGAVESETTET ER PÅ 3 SIDER.

Oppgave 1. Gjennom et sirkulært rør med radius som varier med aksial posisjon (se figur 1) strømmer en viskøs væske med konstant kinematisk viskositet ν og konstant tetthet ρ.



Figur 1 viser skjematisk lengdesnitt av sirkulært rør omtalt i teksten.

Strømningsfeltet beskrives i sylinderkoordinater (r, θ, x) . I $x = 0$ er rørradius a , og i $x = x_1$ er rørradius b . I $x = 0$ er væskehastigheten $\mathbf{u}(r, x)$ gitt som

$$\mathbf{u}(r, x = 0) = U_0 \left(1 - (\frac{r}{a})^2\right) \mathbf{i}_x \tag{1}$$

mens den i $x = x_1$ er

$$\mathbf{u}(r, x = x_1) = U_1 \left(1 - (\frac{r}{b})^2\right) \mathbf{i}_x \tag{2}$$

Både U_0 og U_1 er konstante størrelser.

a) Anta U_0 kjent og finn U_1

For spenningstensoren $\mathcal{P}$ gjelder at

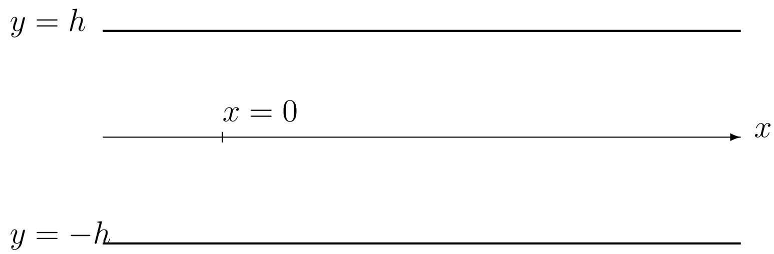
$$[\mathbf{i}_x \cdot \mathcal{P}]_{x=0} = -\mathbf{i}_x p_0 \tag{3}$$

$$[\mathbf{i}_x \cdot \mathcal{P}]_{x=x_1} = -\mathbf{i}_x p_1 \tag{4}$$

hvor p_0 og p_1 er konstante.

b) Finn x-komponenten av kraften som virker på rørstykket begrenset av snittene $x = 0$ og $x = x_1$ på grunn av trykkfeltet og hastighetsfeltet i væsken.

Oppgave 2. Rommet mellom to plan $y = h$ og $y = -h$ er fylt med en homogen og viskøs



Figur 2 viser skjematisk rommet mellom to plan $y = h$ og $y = -h$ omtalt i teksten.

væske med konstant tetthet ρ og konstant kinematisk viskositet ν. Den gitte trykkgradienten

$$\nabla p = \mathbf{i}_x K \cos \omega t \tag{5}$$

induserer et hastighetsfelt

$$\mathbf{u}(y, t) = \mathbf{i}_x u(y, t) \tag{6}$$

a) Finn $u(y, t)$ med randbetingelsene for viskøs væskestrømning oppfylt på rendene $y = h$ og $y = -h$.

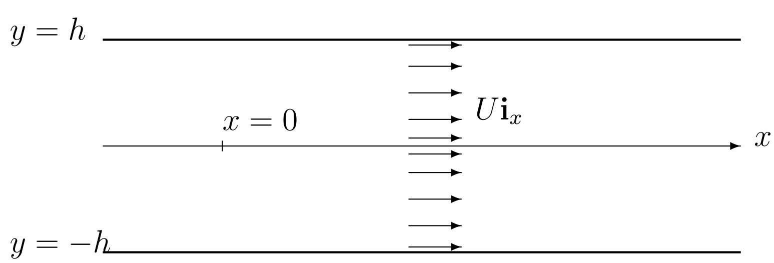
Oppgave 3. I rommet mellom to plan $y = h$ og $y = -h$ går en væskestrømning med plugg-profil gitt som

$$\mathbf{u}(x, |y| < h) = \mathbf{i}_x U \tag{7}$$

$$\mathbf{u}(x, y = \pm h) = \mathbf{0} \tag{8}$$

der U er konstant. For $x < 0$ er veggtemperaturen gitt

$$T(x < 0, y = \pm h) = T_0 \tag{9}$$



Figur 3 viser skjematisk rommet mellom to plan $y = h$ og $y = -h$ omtalt i teksten. Mellom planene går det en væskestrøm med plugg-profil $U\mathbf{i}_x$ som antydet.

For $x \geq 0$ er veggtemperaturen

$$T(x \geq 0, y = \pm h) = T_0 - \Delta T \tag{10}$$

Temperaturutviklingen i væsken for $x \geq 0$ kan approksimativt beskrives med

$$U \frac{\partial T(x,y)}{\partial x} = \kappa \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} \tag{11}$$

med betingelsene

$$T(x=0, |y| < h) = T_0 \tag{12}$$

$$T(x \geq 0, y = ^{+}_{-} h) = T_0 - \Delta T \tag{13}$$

a) Hvilke approksimasjoner er gjort for å oppnå likning (**??**) fra den fullstendige temperaturlikning (neglisjerte ledd)?

b) Innfør følgende dimensjonsløse variable

$$\Theta(\xi, \eta) = \frac{T(x,y) - T_0 + \Delta T}{\Delta T} \tag{14}$$

$$\xi = \frac{x}{h} \tag{15}$$

$$\eta = \frac{y}{h} \tag{16}$$

og vis at temperaturlikningen (**??**) kan skrives

$$\frac{\partial \Theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{\kappa}{Uh} \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \tag{17}$$

Randbetingelsene for Θ er

$$\Theta(\xi \geq 0, \eta = \pm 1) = 0 \tag{18}$$

$$\Theta(\xi = 0, \eta < 1) = 1 \tag{19}$$

Det kan antas som kjent at en funksjon $g(\zeta)$ som på intervallet $-\frac{\pi}{2} \leq \zeta \leq \frac{\pi}{2}$ er gitt ved

$$g(\zeta) = 1, \; for \; -\frac{\pi}{2} < \zeta < \frac{\pi}{2} \tag{20}$$

$$g(\zeta) = 0, \; for \; \zeta = -\frac{\pi}{2} \tag{21}$$

$$g(\zeta) = 0, \; for \; \zeta = \frac{\pi}{2} \tag{22}$$

kan representeres med

$$g(\zeta) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2} \zeta\right] \tag{23}$$

c) Finn temperaturfordelingen $\Theta(\xi, \eta)$ for $\xi \geq 0$ i rommet mellom planene.

SLUTT